Physique : DM7

Océans, atmosphère et communications (Centrale PC – 2018)

I) Particules chargées dans l'atmosphère

Q1) Soit $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\wedge\vec{B}_0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \partial v_x/\partial t \\ \partial v_y/\partial t \\ \partial v_z/\partial t \end{vmatrix} = \dfrac{q}{m}\begin{vmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{vmatrix} = \dfrac{q}{m}\begin{vmatrix} V_y B_0 \\ -V_x B_0 \\ 0 \end{vmatrix}$

. D'où $\boxed{dv_x/dt = \dfrac{qB_0}{m} V_y \;,\; \dfrac{dV_y}{dt} = -\dfrac{qB_0}{m} V_x \text{ et } \dfrac{dV_z}{dt} = 0}$

. D'où $\boxed{v_z = cste}$

. De plus $P = \vec{F}_L\cdot\vec{v} = 0 = \dfrac{dE_c}{dt} \Rightarrow \boxed{v^2 = cste}$

Q2) Soit $\vec{v} = \vec{w} + \vec{v}_{//}$ où $\vec{v}_{//} = v_z\vec{e}_z$

Comme $\begin{cases} \dfrac{dv_z}{dt} = 0 \\ \vec{V}_z\wedge\vec{B}_0 = \vec{0} \end{cases}$, on a : $\boxed{m\dfrac{d\vec{w}}{dt} = q\vec{w}\wedge\vec{B}_0}$

Q3) Posons $\vec{\Omega}_c = \dfrac{(-q)}{m}\vec{B}_0 \Rightarrow \dfrac{d\vec{w}}{dt} = \vec{w}\wedge\vec{\Omega}_c \Rightarrow \begin{vmatrix} \dfrac{dw_x}{dt} \\ dw_y/dt \\ dw_z/dt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_c \end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow w_z = cste$ et $\begin{cases} dw_x/dt = w_y\Omega_c \quad (1) \\ dw_y/dt = -w_x\Omega_c \quad (2) \end{cases}$

On intègre d'où : $\begin{cases} w_x = \Omega_c y + C_1 \\ w_y = -\Omega_c x + C_2 \end{cases}$

Prenons comme CI : $\underbrace{\begin{cases} w_x(0) = v_\perp \\ w_y(0) = 0 \end{cases}}_{\text{choix d'un bon système d'axes}}$ et $\overbrace{\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}}^{\text{Choix le plus simple}} \Rightarrow \begin{cases} w_x = \Omega_c y + v_\perp & (1') \\ w_y = -\Omega_c x & (2') \end{cases}$

(1) s'écrit alors : $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\Omega_c^2 x \\ (2)\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\Omega_c^2 y - \Omega_c v_\perp \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = A\cos(\Omega_c t) + B\sin(\Omega_c t) \\ y = A'\cos(\Omega_c t) + B'\sin(\Omega_c t) + v_\perp/\Omega_c \end{cases}$

les CI donnent : $\begin{cases} A = 0 \text{ et } B = v_\perp/\Omega_c \\ A' = -\dfrac{v_\perp}{\Omega_c} \text{ et } B' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{v_\perp}{\Omega_c}\sin(\Omega_c t) \\ y - \dfrac{v_\perp}{\Omega_c} = -\dfrac{v_\perp}{\Omega_c}\cos(\Omega_c t) \end{cases}$

Donc $x^2 + \left(y - \dfrac{v_\perp}{\Omega_c}\right)^2 = \left(\dfrac{v_\perp}{\Omega_c}\right)^2$

$\boxed{\text{Equation d'un cercle de rayon } \rho_c = \left|\dfrac{v_\perp}{\Omega_c}\right| \text{ où } \Omega_c = -\dfrac{q}{m} B_0}$

Q.4) L'ordre de grandeur B_0 est $10^{-5} \to 10^{-4}$ T $\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \Omega_c \simeq 10^7 \text{ rad.s}^{-1} \text{ pour } e^- \\ \Omega_c \simeq 10^4 \text{ rad.s}^{-1} \text{ pour } p^+ \end{cases}}$

Q5) Soit $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E}_1 + \vec{v} \wedge \vec{B}_0) \Leftrightarrow \boxed{\begin{vmatrix} \dfrac{dV_x}{dt} \\ \dfrac{dV_y}{dt} \\ \dfrac{dV_z}{dt} \end{vmatrix} = \dfrac{q}{m} \begin{vmatrix} V_y B_0 + E_1 \\ -V_x B_0 \\ 0 \end{vmatrix}}$

Q6) On cherche une solution de la forme $\vec{v} = \vec{V_d} = V_{dx}\vec{e_x} + V_{dy}\vec{e_y}$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 = q/m\,(V_{dy} B_0 + E_1) \\ 0 = \dfrac{q}{m}(-V_{dx} B_0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{V_d} = -\dfrac{E_1}{B_0}\vec{e_y}}$ Solution unique

Q.7) Soit $\vec{u} = \vec{v} - \vec{V_d}$

d'où $\dfrac{d\vec{u}}{dt} = \dfrac{q}{m}\left(\vec{E_1} + (\vec{u} + \vec{V_d}) \wedge \vec{B_0}\right)$

or d'après Q6 : $\dfrac{q}{m}\left[\vec{E_1} + \vec{V_d} \wedge \vec{B_0}\right] = \vec{0} \Rightarrow \dfrac{d\vec{u}}{dt} = \dfrac{q}{m}\left(\vec{u} \wedge \vec{B_0}\right)$

Donc $\vec{v} = \vec{u} + \vec{V_d}$ se décompose par deux termes :

$\begin{cases} \vec{u} \text{ responsable d'un mvt circulaire dans le plan } (xOy) \\ \vec{V_d} \text{ ——— d'un mvt rectiligne suivant } \vec{u_y} \end{cases}$

$\Rightarrow$ L'ensemble forme une trajectoire cycloïdale

Q.8) Soit $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\dfrac{e}{m}\left(\vec{E_1} + \vec{v} \wedge \vec{B_0}\right)$ avec en ordre de grandeurs :

$\begin{cases} \|d\vec{v}/dt\| \sim v/\tau \\ \|-e/m\, \vec{v} \wedge \vec{B}\| \sim \dfrac{eB_0}{m} v \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{\|d\vec{v}/dt\|}{\|-e/m\, \vec{v} \wedge \vec{B}\|} \sim \dfrac{m}{eB_0\tau}$

Ce rapport est très inférieur à 1 ssi $\dfrac{m}{eB_0\tau} \ll 1 \Leftrightarrow \tau\Omega_c \gg 1$

$\Leftrightarrow \tau \gg 1/\Omega_c$

$\Leftrightarrow c\tau \gg c/\Omega_c$

$\Leftrightarrow \underline{\ell \gg c/\Omega_c \sim 30\,m}$

Dans cette condition : $\vec{E_1} + \vec{v} \wedge \vec{B_0} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{e_z} \wedge \vec{E_1} + \vec{e_z} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B_0}) = \vec{0}$ ($\perp$ à $\vec{B_0}$)

$\Leftrightarrow \vec{e_z} \wedge \vec{E_1} + \vec{v}(\vec{e_z} \cdot \vec{B_0}) - \vec{B_0}\underbrace{(\vec{e_z} \cdot \vec{v})}_{=0} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{e_z} \wedge \vec{E_1} + \vec{v} B_0 = \vec{0}$

or $\vec{j} = n^*(-e)\vec{v} \Rightarrow \vec{e_z} \wedge \vec{E_1} + \dfrac{\vec{j}}{-n^* e} B_0 = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{0} = \vec{e_z} \wedge \vec{E_1} - \frac{\Omega_c m}{n^* e^2} \vec{j} \quad \text{car } \Omega_c = \frac{eB_0}{m}$$

or $\omega_p^2 = \frac{n^* e^2}{m \varepsilon_0}$ $\Rightarrow \vec{0} = \vec{e_z} \wedge \vec{E_1} - \frac{\Omega_c}{\varepsilon_0 \omega_p^2} \vec{j}$

$$\Rightarrow \vec{j} = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\Omega_c} \vec{e_z} \wedge \vec{E_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = \gamma \vec{e_z} \wedge \vec{E_1} \text{ où } \gamma = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\Omega_c}} \text{ ssi } \tau \gg 1/\Omega_c$$

Q9) A.N $\begin{cases} n^* = 10^{10} m^{-3} \\ B = 5.10^{-5} T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Omega_c = 9.10^6 \text{ rad.s}^{-1} \\ \omega_p = 6.10^6 \text{ rad.s}^{-1} \\ \frac{\omega_p^2}{\Omega_c} = 4.10^6 \text{ rad.s}^{-1} \end{cases}$

Toutes ces pulsations sont très supérieures aux ondes radios d'$\omega = 50.10^3$ rad.s^{-1} d'après l'annexe.

Q10) Par définition $I_0 = \langle \Pi \rangle = \langle u_{em} \rangle c$ où $\langle u_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} \langle E^2 \rangle + \frac{\langle B^2 \rangle}{2\mu_0}$

$$\Rightarrow I_0 = c\left(\frac{\varepsilon_0 E_1^2}{4} + \frac{B_1^2}{4\mu_0} \right)$$

or $\langle u_{em} \rangle = 2\langle u_E \rangle = 2 \langle u_m \rangle \Rightarrow \frac{B_1^2}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2} = I_0 / c$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} E_1 = \sqrt{\frac{2 I_0}{\varepsilon_0 c}} \\ B_1 = \sqrt{\frac{2\mu_0 I_0}{c}} \end{cases}}$$

Pour avoir $B_1 \ll B_0$ il faut $\sqrt{\frac{2\mu_0 I_0}{c}} \ll B_0 \Leftrightarrow \boxed{I_0 \ll \frac{B_0^2 c}{2\mu_0}} = \underline{3.10^5 \text{ Wm}^{-2}}$

L'intensité lumineuse reçue sur terre en provenance du soleil est de l'ordre 10^3 Wm^{-2} donc <u>on peut négliger B_1 /à B_0</u>.

Q11) En notation complexe : div $\leftrightarrow (i\vec{k}\cdot)$ $\quad \dfrac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow (-i\omega)$ et rot $\leftrightarrow (i\vec{k}\wedge)$

$$\Rightarrow \begin{cases} MG : & i\vec{k}\cdot\vec{\underline{E}}_1 = \underline{\rho}/\varepsilon_0 \\ MT : & i\vec{k}\cdot\vec{\underline{B}}_1 = 0 \\ MF : & i\vec{k}\wedge\vec{\underline{E}}_1 = i\omega\vec{\underline{B}}_1 \\ MA : & i\vec{k}\wedge\vec{\underline{B}}_1 = \mu_0\vec{\underline{j}} - i\omega\mu_0\varepsilon_0\vec{\underline{E}}_1 \end{cases}$$

or $\begin{cases} \vec{j} = \gamma(\vec{e}_z\wedge\vec{E}_1) \\ \vec{k} = k\vec{e}_z \end{cases}$ d'où MA : $i\vec{k}\wedge\vec{\underline{B}}_1 = \mu_0\left[\gamma(\vec{e}_z\wedge\vec{\underline{E}}_1) - i\omega\varepsilon_0\vec{\underline{E}}_1\right]$

$$\Rightarrow \underbrace{(i\vec{k}\wedge\vec{\underline{B}}_1)}_{\perp \text{ à } \vec{k}}\cdot\vec{k} = \mu_0\vec{k}\cdot\left[\gamma\underbrace{(\vec{e}_z\wedge\vec{\underline{E}}_1)}_{\perp\vec{e}_z} - i\omega\varepsilon_0\vec{\underline{E}}_1\right]$$

$$\Rightarrow 0 = i\omega\mu_0\varepsilon_0\vec{k}\cdot\vec{\underline{E}}_1$$

$$\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{\underline{E}}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\rho} = 0 \text{ d'après MG}}$$

D'où $\vec{k}\cdot\vec{E}_1$ et $\vec{k}\cdot\vec{B}_1$ sont nul l'onde est donc $\boxed{\text{une onde TEM}}$

Q12) MF donne : $\vec{\underline{B}}_1 = \dfrac{k}{\omega}(\vec{e}_z\wedge\vec{\underline{E}}_1)$

donc MA s'écrit : $ik\vec{e}_z\wedge\overbrace{\left(\dfrac{k}{\omega}\vec{e}_z\wedge\vec{\underline{E}}_1\right)}^{\perp\vec{e}_z} = \mu_0\vec{\underline{j}} - i\omega\varepsilon_0\mu_0\vec{\underline{E}}_1$

or $\vec{j} = \gamma(\vec{e}_z\wedge\vec{\underline{E}}_1) = \varepsilon_0\dfrac{\omega_p^2}{\Omega_c}(\vec{e}_z\wedge\vec{\underline{E}}_1)$

$$\Rightarrow -i\frac{k^2}{\omega}\vec{\underline{E}}_1 = \mu_0\varepsilon_0\frac{\omega_p^2}{\Omega_c}(\vec{e}_z\wedge\vec{\underline{E}}_1) - i\omega\varepsilon_0\mu_0\vec{\underline{E}}_1$$

$$\Rightarrow -i\frac{k^2c^2}{\omega}\vec{\underline{E}}_1 = \frac{\omega_p^2}{\Omega_c}(\vec{e}_z\wedge\vec{\underline{E}}_1) - i\omega\vec{\underline{E}}_1$$

Comparons le poids relatif des 2 termes de droite :

$$\left\| \frac{\omega_p^2}{\Omega_c}\left(\vec{e_z} \wedge \vec{\underline{E_1}}\right)\right\| \sim \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c} E_1 \quad \text{et} \quad \left\| i\omega \vec{\underline{E_1}} \right\| \sim \omega E_1$$

or $\dfrac{\omega_p^2}{\Omega_c} \gg \omega$ (Q9)

$$\Rightarrow \boxed{-i \frac{k^2 c^2}{\omega} \vec{\underline{E_1}} = \frac{\omega_p^2}{\Omega_c}\left(\vec{e_z} \wedge \vec{\underline{E_1}}\right)} \quad (11)$$

Supposons $\vec{\underline{E_1}}$ polarisé rectilignement alors il faudrait $\vec{E_1}$ suivant $\vec{u}$ mais aussi suivant $\vec{e_z} \wedge \vec{u}$ qui est orthogonal à $\vec{u}$. C'est impossible sauf si $\vec{\underline{E_1}} = \vec{0}$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\underline{E_1}} \text{ n'est pas polarisé rectilignement}}$

$$(11) \Rightarrow k^2 c^2 \vec{\underline{E_1}} = i\omega\, \omega_p^2/\Omega_c \left(\vec{e_z} \wedge \vec{\underline{E_1}}\right) \quad \text{où } \vec{\underline{E_1}} = \underline{E_x}\, \vec{u_x} + \underline{E_y}\, \vec{u_y}$$

$$\Rightarrow k^2 c^2 \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{vmatrix} = i\omega\, \omega_p^2/\Omega_c \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow k^2 c^2 \begin{vmatrix} \underline{E_x} \\ \underline{E_y} \end{vmatrix} = i\omega\, \omega_p^2/\Omega_c \begin{vmatrix} -\underline{E_y} \\ \underline{E_x} \end{vmatrix}$$

Donc $\begin{cases} k^2 c^2 \underline{E_x} = -i\omega\omega_p^2/\Omega_c\, \underline{E_y} \\ k^2 c^2 \underline{E_y} = i\omega\omega_p^2/\Omega_c\, \underline{E_x} \end{cases}$ $\Rightarrow k^2 c^2 \underline{E_x} = -\left(\dfrac{i\omega\omega_p^2}{\Omega_c}\right)^2 \times \dfrac{1}{k^2c^2}$

$$\Rightarrow \left(k^2 c^2\right)^2 = \left(\omega\omega_p^2/\Omega_c\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{c^2 k^2 = \frac{\omega_p^2 \omega}{\Omega_c^2} \quad \text{CQFD}}$$

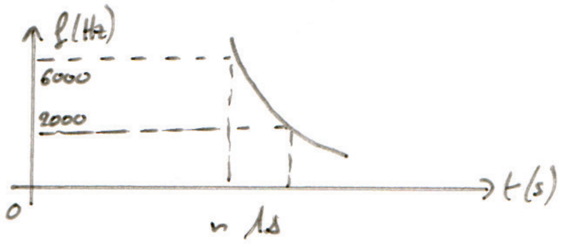
Donc $\begin{cases} k \text{ est réel} \Rightarrow \text{milieu transparent} \\ k \text{ n'est pas proportionnel à } \omega \Rightarrow \text{milieu dispersif} \end{cases}$

Q13) Question ouverte :

• On a $v_\varphi = \dfrac{\omega}{Re(k)} = \dfrac{c}{\omega_p}\sqrt{\omega \Omega_c}$

donc dans un paquet d'ondes les ondes de BF voyagent plus lentement que celles de HF. Le son produit évoquera un sifflement de tonalité descendante (aigü puis grave).

• A l'aide du spectrogramme :



on constate que $t_1 - t_2 = d/v_{\varphi_1} - d/v_{\varphi_2} = 1s$

$$\Leftrightarrow \quad d = (t_1 - t_2)\left(1/v_{\varphi_1} - 1/v_{\varphi_2}\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad d = \frac{t_1 - t_2}{\dfrac{\omega_p}{c\sqrt{\Omega_c}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\omega_1}} - \dfrac{1}{\sqrt{\omega_2}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{d = \frac{(t_1 - t_2)}{\omega_p}\, c\, \frac{\sqrt{\Omega_c}\,.\,\sqrt{2\pi f_1 f_2}}{\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2}}} \sim \underline{4.10^7 m}$$

On a supposé que le récepteur était aussi situé dans l'ionosphère. De toute façon les autres couches de l'atmosphère ~ 60 km << 40000 km.

II) Ondes acoustiques sous-marines

Q14) Il manque l'équation de conservation de la masse : $\boxed{\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0}$

Q15) . A partir de Navier-Stokes : $\rho\left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p + \rho \vec{g} + \eta \vec{\Delta} \vec{v}$

. Ecoulement parfait $\Rightarrow \eta \vec{\Delta} \vec{v} = \vec{0}$

. $(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} \ll \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ car ordre 2 en $\vec{v}$.

. $-\overrightarrow{\text{grad}}\, p_s = -\rho \vec{g}$ (hydrostatique) $\Rightarrow -\overrightarrow{\text{grad}}\, p + \rho \vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_a$

d'où $\rho\left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_a$

$\Rightarrow$ A l'ordre 1 : $\boxed{\rho_0 \left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_a}$ (1)

. Eq de conservation de la masse : $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$

$\Rightarrow \rho_0\, \text{div}\left[\rho_0 (1 + \chi p_a) \vec{v}\right] + \rho_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\left(1 + \chi p_a\right) = 0$

$\Rightarrow \rho_0\, \text{div}\, \vec{v} + \rho_0 \chi \dfrac{\partial p_a}{\partial t} = 0$ si on se limite à l'ordre 1.

$\Rightarrow \boxed{\text{div}\, \vec{v} = -\chi \dfrac{\partial p_a}{\partial t}}$ (2)

Q16) (1) s'écrit : $\rho_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\text{div}\, \vec{v}\right) = -\Delta p_a$.

$\Rightarrow \rho_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\chi \dfrac{\partial p_a}{\partial t}\right) = -\Delta p_a \quad \Rightarrow \Delta p_a = \rho_0 \chi \dfrac{\partial^2 p_a}{\partial t^2}$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = c_a^2 \Delta p_a \text{ où } c_a^2 = \dfrac{1}{\rho_0 \chi}}$

Q17) Pour onde sinusoïdale de pulsation ω on obtient l'équation de dispersion : $\boxed{\omega = k c_a}$

Q18) Soit $p_a(x,t) = P_{a0}\cos(kx-\omega t)$ avec $k = \dfrac{\omega}{c_a}$

or $\rho_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_a \Rightarrow \rho_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = P_{a0}\, k\,(+1)\sin(kx-\omega t)$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{u}_x \dfrac{P_{a0}.k}{\rho_0\omega}\cos(kx-\omega t) + \underbrace{\vec{C}_1}_{=\vec{0}\text{, on conserve une solution harmonique.}}$

$\Rightarrow \vec{v} = \dfrac{P_{a0}}{\rho_0 c_a}\cos(kx-\omega t)\,\vec{u}_x$

D'où $\underline{\vec{v} = Z_a p_a \vec{u}_x}$ $\boxed{\text{où } Z_a = \dfrac{1}{\rho_0 c}}$

<u>Rque</u>: La définition proposée est impropre car $p_a = Z_a v_a$ analogue à $\underline{u} = \underline{Z}.\underline{i}$

Q19) Soit $p_a = \dfrac{A}{r}\cos(kr-\omega t)$ d'où $\rho_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \left[\dfrac{A}{r^2}\cos(kr-\omega t) + \dfrac{kA}{r}\sin(kr-\omega t)\right]\vec{u}_r$

$\Leftrightarrow \vec{v} = \dfrac{1}{\rho_0\omega}\left[-\dfrac{A}{r^2}\sin(kr-\omega t) + \dfrac{kA}{r}\cos(kr-\omega t)\right]\vec{u}_r$

Pour avoir $\vec{v} = Z_a p_a \vec{u}_r$ il faut donc $\dfrac{kA}{r} \gg \dfrac{A}{r^2} \Leftrightarrow k \gg \dfrac{1}{r} \Leftrightarrow kr \gg 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{r}{\lambda} \gg 1 \Leftrightarrow \boxed{r \gg \lambda}$

Approximation dite de champ lointain : <u>"L'onde est localement plane"</u>

Q20) Par définition : $dP_i = p_a\, dS\, \vec{n}.\vec{v}$ où dP_i : puissance instantanée reçue par dS.

$= Z_a p_a^2\, dS\, \vec{n}.\vec{e_r}$

$\Rightarrow dP = \langle dP_i \rangle = \dfrac{Z_a |p_a|^2}{2}\, dS\, \vec{n}.\vec{e_r}$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{dP}{dS} = I_a.\vec{n}.\vec{e_r} \text{ où } I_a = \dfrac{1}{2\rho_0 c}|p_a|^2}$

Q21) Soit $|p_a|^2 = \left|\frac{A}{r} e^{i(kr-\omega t)}\right|^2 = \frac{A^2}{r^2}\left|e^{i(k'r-\omega t)} e^{-k''r}\right|^2$

$$= \frac{A^2}{r^2} e^{-2k''r}$$

Donc $\frac{I_a(r_0)}{I_a(r)} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 e^{-2k''(r_0-r)}$

$$\Rightarrow P = 10 \log \frac{I_a(r_0)}{I_a(r)} = 20 \log\left(\frac{r}{r_0}\right) + \frac{20\, k''(r-r_0)}{\ln 10}$$

$$= 20 \log\left(\frac{r}{r_0}\right) + \alpha(r-r_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{20 k''}{\ln 10}}$$

Q22) Une erreur s'est glissée dans le sujet car sinon on aurait pas d'atténuation :

$$k'' = \frac{k'^2 \eta}{2\rho_0 c_a}$$

or $\delta = \left|\frac{1}{k''}\right| \Rightarrow \delta = \frac{2\rho_0 c_a}{k'^2 \eta} = \frac{2\rho_0 c_a^3}{\omega^2 \eta} = \frac{2\rho_0 c_a^3}{4\pi^2 f^2 \eta} = \frac{\rho_0 c_a^3}{2\pi^2 \eta} \cdot \frac{1}{f^2}$

Donc pour $\begin{cases} f = 3\,\text{kHz} : k'' = 7{,}8.10^{-8}\,m^{-1},\ \delta = 1{,}3.10^7\,m \\ f = 30\,\text{kHz} : k'' = 7{,}8.10^{-6}\,m^{-1},\ \delta = 1{,}3.10^5\,m \end{cases}$

Q23) . La quantité $k_0 L(\vec{r})$ est sans dimension $\Rightarrow$ $L(\vec{r})$ = longueur

. Son équivalent est le chemin optique

Q24) Notons d une distance caractéristique alors $\|(\overrightarrow{\text{grad}}\, L)^2\| \sim \frac{L^2}{d^2}$ et $\left|\frac{i}{k_0}\Delta L\right| \sim \frac{L}{k_0 d^2}$

Donc $\|(\overrightarrow{\text{grad}}\, L)^2\| \gg \left|\frac{i\,\Delta L}{k_0}\right|$ ssi $L \gg \frac{1}{k_0} \Leftrightarrow L \gg \frac{\lambda_0}{2\pi} \Leftrightarrow \boxed{L \gg \lambda_0}$

Avec cette condition : $\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, L = n(r)\,\vec{u}}$. Cette hypothèse consiste à négliger la diffraction.

Q25) Pour une surface d'égal chemin acoustique : $dL = 0$

$$\Leftrightarrow \vec{\text{grad}}\, L \cdot \vec{dr} = 0$$

$$\Leftrightarrow n(r)\,\vec{u} \cdot \vec{dr} = 0$$

Donc le vecteur rayon acoustique est orthogonal localement aux surfaces iso-acoustiques.

Cette loi rappelle le théorème de Malus (cf cours d'optique)

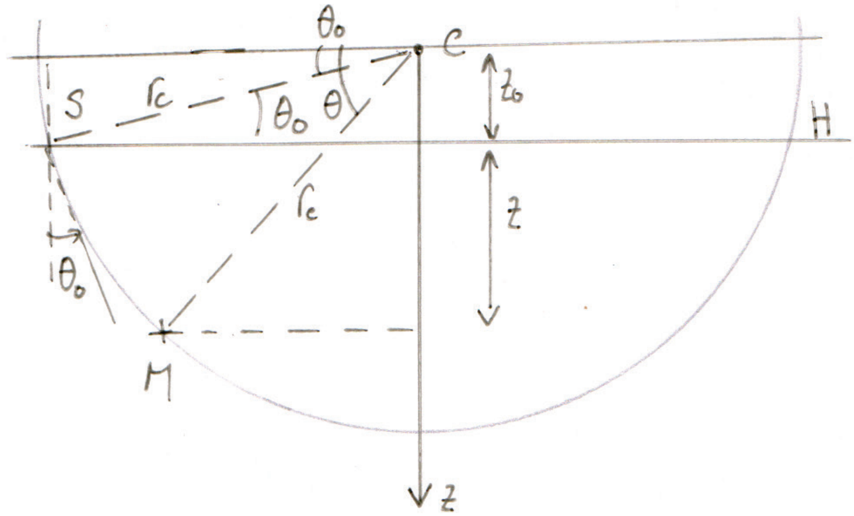
Q26). Par définition $c_a = \frac{c_{a0}}{n(\vec{r})} = c_{a0}(1+\Omega z) \Rightarrow n(\vec{r}) = \frac{1}{1+\Omega z}$

or $n_0 \sin\theta_0 = n_1 \sin\theta_1$ avec $\theta_1 > \theta_0 \rightarrow n_1 < n_0$

d'où $\Omega > 0$ vu que $z_1 > z_0$

. Le rayon remonte grâce au phénomène de réflexion totale.

Q27)



Soit $n(z)\sin\theta(z) = n(z)\sin(\theta(z+dz)) = cste = n_0 \sin\theta_0$

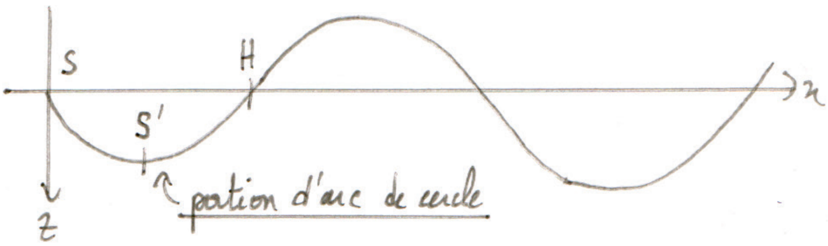
$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{n_0}{n}\sin\theta_0 = (1+\Omega z)\sin\theta_0 \quad (1)$$

or $\begin{cases} z + z_0 = r_c \sin\theta \\ z_0 = r_c \sin\theta_0 \end{cases} \Rightarrow z = r_c(\sin\theta - \sin\theta_0)$ donc $\sin\theta = (1+\Omega r_c(\sin\theta - \sin\theta_0))\sin\theta_0$

$$\Leftrightarrow (1 - \Omega r_c \sin\theta_0)\sin\theta_0 = \sin\theta(1 - \Omega r_c \sin\theta_0)$$

Ce qui est vérifiée ssi : $\Omega r_c \sin\theta_0 = 1$ d'où $r_c|\Omega \sin\theta_0| = 1$ CQFD

Q28) En Q26, on a montré que le rayon acoustique est dévié vers des zones d'indice acoustique fort et donc de célérité faible. Le rayon va donc être attiré par la côte $z=0$.



Q29) Soit $dt = \frac{dl}{c_a(z)}$ où $dl = r_c\,d\theta$ $\Rightarrow dt = \frac{dl}{c_{a0}(1+\Omega_0 z)}$

Or $\sin\theta = (1+\Omega_0 z)\sin\theta_0$ $\Rightarrow dt = \frac{dl}{c_{a0}\sin\theta}\sin\theta_0$

Q27)

$$\Rightarrow dt = \frac{r_c\sin\theta_0}{c_{a0}\sin\theta}\,d\theta$$

Or $r_c\sin\theta_0 = \frac{1}{\Omega_0}$ $\Rightarrow dt = \frac{d\theta}{c_{a0}\Omega_0\sin\theta}$

a $dt_0 = \int_S^H \frac{d\theta}{c_{a0}\Omega_0\sin\theta} = 2\int_S^{S'}\frac{d\theta}{c_{a0}\Omega_0\sin\theta} = \frac{2}{c_{a0}\Omega_0}\int_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sin\theta}$

$$\Leftrightarrow dt_0 = \frac{2}{c_{a0}\Omega_0}\left[\underbrace{\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=0} - \ln\tan\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{dt_0 = \frac{-2}{c_{a0}\Omega_0}\ln\tan\left(\theta_0/2\right)}$$

Q30) Soit $\begin{cases}\Delta x = SH = 2r_c\cos\theta_0 \\ \Delta t = dt_0\end{cases}$ (schéma Q27)

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\delta t_0}{SH}\cdot\Delta x = \frac{-2/c_{a0}\Omega_0\cdot\ln|\tan(\theta_0/2)|}{2r_c\cos\theta_0}\,\Delta x$$

or $r_c = \frac{1}{\Omega_0\sin\theta_0}$ $\Rightarrow \Delta t = -\frac{\tan\theta_0\cdot\ln|\tan(\theta_0/2)|}{c_{a0}}\cdot\Delta x$ $\Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\Delta x}{c_{a0}}f(\theta_0)}$

Q31) Qd $\theta_0 = \pi/2$, le rayon se propage en ligne droite suivant Ox. Comme z ne varie pas la célérité de l'onde acoustique est constante et égale à c_{a0}.

$$\Rightarrow \Delta t(\theta_0 = \pi/2) = \frac{\Delta x}{c_{a0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(\theta_0 = \pi/2) = 1} \text{ cf figure 5}$$

Q32) On a $f(\theta_0) - 1 \leq 0 \Rightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta x}{c_{a0}}$. Le temps de parcours le plus long est celui en ligne droite.

Q33) . Une baleine émet des sons autour de 1kHz et supposons qu'elle émette selon un cône d'ouverture de 60°.

. D'après l'annexe une baleine produit une unité de une à qqs secondes. Prenons $t_u = 5s$.

. Le signal se propageant en ligne droite arrive après le signal se propageant en arcs de cercle. Le signal sera brouillé si : $t_u < |\Delta t(\pi/2) - \Delta t(60°)|$

$$\text{d'où } t_u = \frac{\Delta x_m}{c_{a0}}\left[f(\pi/2) - f(60°)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta x_m = \frac{c_{a0}\, t_u}{f(\pi/2) - f(60°)}} \sim 100 km$$