

Physique : DM5

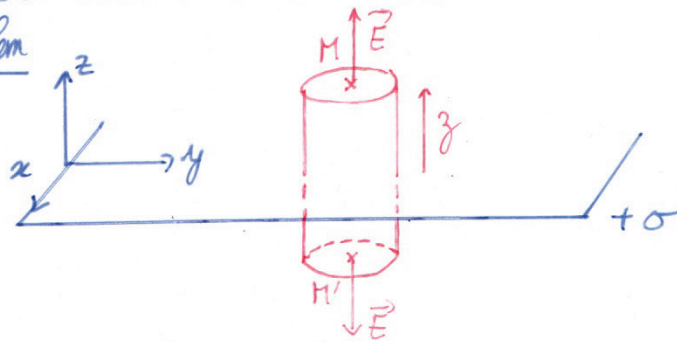
Electrostatique - CCP 2010 PSI

I - Théorème de Gauss

① { Théorème de Gauss : $\phi = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{int}/\epsilon_0$
 Maxwell - Gauss : $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$

II - Condensateur plan

②

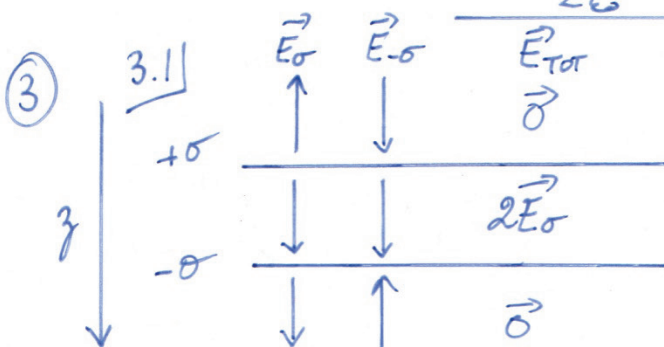


* Les plans (Myz) et (Mxz) sont plans de symétrie $\Rightarrow \vec{E} = E \vec{u}_z$

* Il y a invariance par $T(y)$ et $T(x)$ $\Rightarrow E = E(z)$

* En prenant comme surface de Gauss un cylindre de rayon R , symétrique par rapport au plan on a : $2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$ car $\vec{E} \cdot d\vec{S}_{lat} = 0$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sign}(z) \vec{u}_z$$



A l'aide du théorème de superposition on obtient :

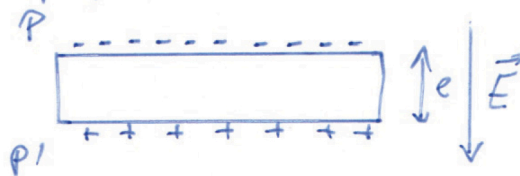
$$\begin{cases} \vec{E}_{int} = \sigma/\epsilon_0 \vec{u}_z \\ \vec{E}_{ext} = \vec{0} \end{cases}$$

3.2) Soit $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ d'où $\underline{U = \sigma/\epsilon_0 d}$

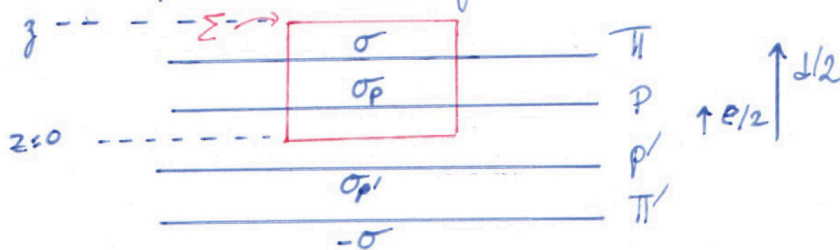
3.3) On a $C = Q/U$

$$\Leftrightarrow C = \frac{\sigma S}{\sigma_d} \cdot \epsilon_0 \quad \Leftrightarrow C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

- ④. Le champ électrostatique qui règne dans le condensateur déplace les électrons de la lame jusqu'à ce que le champ total dans la lame (conducteur) soit nul. Il apparaît des charges surfaciques sur les plans (P) et (P')



- ⑤ Le problème des symétries reste inchangé $\Rightarrow \vec{E} = E(z)\vec{u}_z$



$$\text{Donc } [E(0) + E(z)]S = (\sigma + \sigma_p)S / \epsilon_0$$

$$\alpha \begin{cases} \vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0} \\ \vec{E}(0) = 0 \text{ par symétrie} \end{cases} \quad \text{donc } \underline{\sigma = -\sigma_p}$$

- ⑥ 6.1) En appliquant le théorème de Gauss pour un pt M t.q. $e/2 < z < d/2$ on a:

$$[E(0) + E(z)]S = \frac{\sigma_p S}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E(z) = \sigma_p / \epsilon_0$$

$$\Leftrightarrow \vec{E}(e/2 < z < d/2) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

$$\text{et } \vec{E}(-d/2 < z < -e/2) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow U' = \int_{-d/2}^{d/2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2\sigma/\epsilon_0 \cdot \left(\frac{d-e}{2}\right) + 0 \Rightarrow U' = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d-e)$$

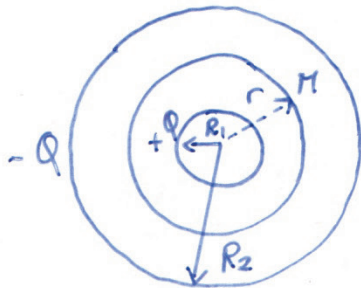
$$6.2) \text{ Soit } Q = \sigma S = C'U'$$

$$\Leftrightarrow C' = \frac{\sigma S}{U'} \quad \Leftrightarrow C' = \frac{\sigma S}{\sigma(d-e)} \cdot \epsilon_0 \quad \Leftrightarrow C' = \frac{\epsilon_0 S}{d-e}$$

Donc $\frac{C'}{S} > \frac{C}{S}$, la plaque a permis d'augmenter la capacité.

III) Condensateur cylindrique

7



On a affaire à un problème à symétrie cylindrique d'où :

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

On applique le théorème de Gauss à un cylindre de rayon r et de hauteur H d'où :

$$2\pi r H E = q_{\text{int}} / \epsilon_0$$

$$\Leftrightarrow 2\pi r H E = \frac{Q}{\epsilon_0} \text{ si intérieur et } 0 \text{ si extérieur.}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(r < R_1) = \vec{0} \\ \vec{E}(r > R_2) = \vec{0} \\ \vec{E}(R_1 < r < R_2) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r H} \vec{u}_r \end{array} \right.$$

8) D'où : $V_{\text{int}}(r) = \frac{-Q}{2\pi \epsilon_0 H} \ln r + \text{cte}$

$$\Leftrightarrow V_{\text{int}}(r) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 H} \ln\left(\frac{R_1}{r}\right) + V_1$$

$$\Rightarrow U = V_2 - V_1 = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 H} \ln(R_1/R_2)$$

$$\textcircled{9} \quad \text{On } Q = C(V_1 - V_2) \Rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0 H}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$\textcircled{10} \quad \text{On a } W_{\text{cond}} = \int_{\text{espace}} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right) dV = \int_{\text{espace}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} r dr d\theta dz$$

$$\Rightarrow W_{\text{cond}} = \frac{Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0 H^2} \cdot \frac{\epsilon_0}{2} \times 2\pi \times H \times \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$\Rightarrow W_{\text{cond}} = \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 H} \cdot \ln(R_2/R_1)$$

$$= \frac{1}{2} Q^2 \times \left(\frac{2\pi \epsilon_0 H}{\ln(R_2/R_1)} \right)^{-1}$$

$$\text{D'où } W_{\text{cond}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$\textcircled{11} \quad \text{On a : } C = \frac{2\pi \epsilon_0 H}{\ln\left(\frac{R_1 + e}{R_1}\right)} = 2\pi \epsilon_0 H / \ln(1 + e/R_1)$$

$$\Rightarrow C \stackrel{\text{d.l.}}{\sim} \frac{2\pi \epsilon_0 H}{e/R_1} \Rightarrow C \sim \frac{2\pi \epsilon_0 H R_1}{e}$$

$$\text{or } S_1 = 2\pi R_1 H \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 S_1}{e}$$

C'est équivalent à un condensateur plan t. q. : $\begin{cases} e = R_2 - R_1 \\ \text{et} \\ S_1 = S_{\text{LATÉRALE}} = 2\pi R_1 H. \end{cases}$