

## Physique : DM4

## Partie I - Aspects de la propulsion spatiale (Mines 2015 - PC)

## ① Généralités

## I.A) Aspect cinétique - lois de vitesse

$$1^{\circ}) \text{ Pour la fusée : } \left. \begin{aligned} \vec{p}_F(t) &= m(t)v(t) \vec{u}_z \\ \vec{p}_F(t+dt) &= (m(t) - Dm dt)(v(t) + dv) \vec{u}_z \end{aligned} \right| \text{①}$$

$$\text{Pour les gaz éjectés : } \vec{p}_g(t+dt) = Dm dt [\vec{u} + \vec{v}] = Dm dt (v - u) \vec{u}_z \text{ ②}$$

2<sup>o</sup>) Soit le système { fusée + gaz } :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{\vec{p}_F(t+dt) + \vec{p}_g(t+dt) - \vec{p}_F(t)}{dt} = m(t) \vec{g} \\ \Leftrightarrow \vec{u}_z \left( \frac{m(t)v + m(t)dv - Dm dt v(t) - Dm dt dv + Dm dt v - Dm dt u - m(t)v}{dt} \right) &= m \vec{g} \\ \Leftrightarrow \vec{u}_z \left( \frac{m(t) dv - Dm dt u}{dt} \right) &= -mg \vec{u}_z \\ \Leftrightarrow m(t) \frac{dv}{dt} &= Dm u - mg \end{aligned} \text{ ③}$$

3<sup>o</sup>) la force de poussée  $\vec{F} = Dm u \vec{u}_z$  ④

↳ Pour que la fusée décèle, il faut que  $Dm u > mg$ .

$$\Rightarrow Dm u > m_0 g \text{ ⑤}$$

4<sup>o</sup>) la définition de  $I_s$  entraîne :  $\begin{cases} I_s = \frac{m}{Dm} \Leftrightarrow Dm = \frac{m}{I_s} \\ \text{et} \\ m = \frac{Dm u}{g} \end{cases}$

$$\Rightarrow Dm I_s = \frac{Dm u}{g} \Rightarrow I_s = \frac{u}{g}$$

$$5^{\circ}) \text{ On résout l'équation (3): } \frac{dv}{dt} = \frac{Dm}{m} u - g$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{m} \frac{u}{dt} - g.$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{d \ln m}{dt} \cdot u - g.$$

$$\Leftrightarrow v = -u \ln m - gt + \text{cte.}$$

$$\text{Or à } t=0, \begin{cases} v(0) = 0 \\ m(0) = m_0 \end{cases} \Rightarrow 0 = -u \ln m_0 + \text{cte}$$

$$\text{Donc : } \underline{v = u \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) - gt} \quad (6)$$

6<sup>o</sup>) En dehors du champ de gravitation terrestre  $\vec{g} = \vec{0}$  d'où :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d \ln m}{dt} \cdot u$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta v = -u \ln \frac{m_f}{m_i}} \quad (7)$$

$$7^{\circ}) \text{ Premier étage : } \Delta v_{21} = -u \ln \left( \frac{34}{134} \right) = 5,49 \text{ km s}^{-1}$$

$$\text{Second étage : } \Delta v_{32} = -u \ln \left( \frac{4}{24} \right) = 7,17 \text{ km s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta v = 12,7 \text{ km s}^{-1}$$

$$\text{Fusée à un seul étage : } \Delta v = -u \ln \left( \frac{14}{134} \right) = 9,04 \text{ km s}^{-1}$$

$$8^{\circ}) \text{ (7) peut s'écrire : } \frac{m_f}{m_i} = e^{-\Delta v / u}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_u}{m_u + m_c} = e^{-\Delta v / u}$$

$$\Leftrightarrow 1 + m_c / m_u = e^{+\Delta v / u}$$

$$\Leftrightarrow \underline{m_c = m_u [e^{\Delta v / u} - 1]} \quad (8)$$

$$\text{Pour } \begin{cases} u_1 = 4,100 \text{ km/s} \\ u_2 = 20,0 \text{ km/s} \end{cases} \Rightarrow m_{c1} = 1250 \text{ kg}$$

$$\Rightarrow m_{c2} = 142 \text{ kg.}$$

## 1. B Aspect énergétique

$$9^{\circ}) \text{ Soit } \delta E_c = \frac{1}{2} Dm (u-v)^2$$

$$\Rightarrow P_{\text{jet}} = \frac{\delta E_c}{dt} = \frac{1}{2} Dm (u-v)^2 \quad | \quad (9)$$

$$\bullet \text{ Et } P_{\text{poussé}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow P_{\text{poussé}} = Dm \cdot uv \quad | \quad (10)$$

$$10^{\circ}) \text{ Soit : } \eta = \frac{P_f}{P_{\text{jet}} + P_f}$$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{Dm uv}{Dm uv + \frac{1}{2} Dm (u-v)^2}$$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{2uv}{2uv + u^2 + v^2 - 2uv}$$

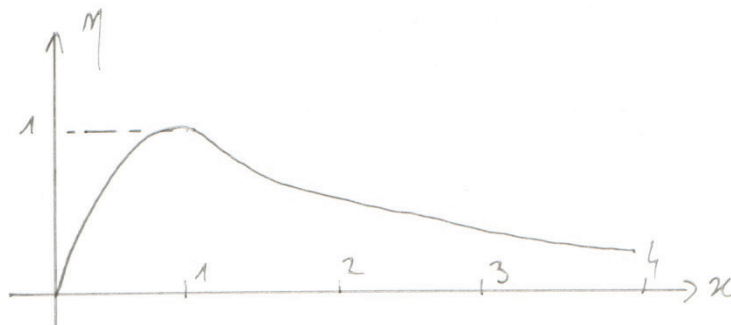
$$\Leftrightarrow \eta = \frac{2uv}{u^2 + v^2}$$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{2u/v}{1 + (u/v)^2}$$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{si } x = u/v \text{ ou } v/u \quad | \quad (11)$$

$$11^{\circ}) \text{ lorsque } \begin{cases} x \rightarrow 0 : \eta \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty : \eta \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\text{Et : } \frac{d\eta}{dx} = \frac{2(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow x_r = 1$$



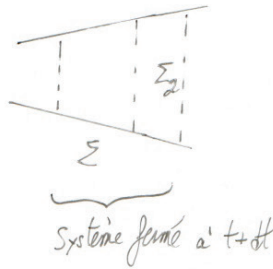
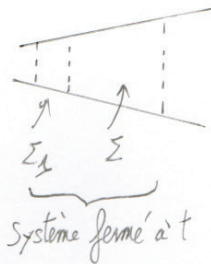
On remarque que  $\eta \rightarrow 0$  :

\* si  $\alpha = 0 \Leftrightarrow u = 0$  : pas de force de poussée

\* si  $\alpha \rightarrow \infty \Leftrightarrow v = 0$  : fusée immobile

II) limites de la propulsion chimique

12°) de 1PP en système fermé s'écrit :  $\Delta(U + E_c + E_{pot}) = W_p + W' + Q$  (1)



D'où (1) s'écrit : 
$$\frac{dm}{dt} \left[ \overbrace{e_{c2} + u_2 + e_{p2}}^{M_2} - \overbrace{e_{c1} - u_1 - e_{p1}}^{M_1} \right] + \Delta U_{\Sigma} = W_p + W' + Q$$

En régime permanent : 
$$\frac{dm}{dt} [u_2 - u_1] = \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} + W' + Q$$

$$\Leftrightarrow \frac{dm}{dt} [h_2 - h_1] = W' + Q$$

$$\Leftrightarrow \frac{dm}{dt} [(h_2 + e_{c2} + e_{p2}) - (h_1 + e_{c1} + e_{p1})] = W' + Q$$
 (12)

↑  
A noter plutôt  $SW'$ ,  $SQ$ .

13°) Ici :  $SW' = 0, SQ = 0 \Rightarrow e_c + e_p + h = cste$

En négligeant les variations d'altitude :  $e_c + h = cste$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} v^2 + c_p T = cste.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)} T = cste$$
 (13)

D'où :  $0 + \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)} T_c = \frac{1}{2} u_{max}^2 + 0$  car on néglige  $T_{out}$  face à  $T_c$ .

$$\Rightarrow u_{max} = \sqrt{\frac{2\gamma R T_c}{(\gamma-1)M}}$$

14°) A.N :  $u_{max} = 3,11 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

$$I_s = \frac{u_{max}}{g} = 317 \text{ s.}$$

## Partie II - Etude de l'éolienne (CCP PSI - 2013)

27) Pour un système fermé on a :

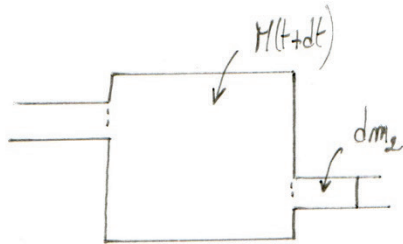
$$\Delta(U + E_c + E_{\text{pert}}) = W_p + W' + Q$$

où  $U$  : énergie interne,  $E_c$  : énergie cinétique macroscopique

$E_{\text{pert}}$  : Énergie potentielle des faces extérieures

$W_p$  : travail des forces de pression,  $W'$  : travail utile et  $Q$  : chaleur échangée.

28) a)



Le système est constitué du fluide :  
 - contenu dans la partie active :  $M(t+dt)$   
 - qui est sorti entre  $t$  et  $t+dt$  :  $dm_2$

b) On est en régime stationnaire donc :

$$M(t) = M(t+dt) \Rightarrow \underline{dm_1 = dm_2} \Rightarrow \underline{Dm = \text{cte}}$$

29) En amont on perd le volume  $dV_1$  d'où  $dW_1 = p_1 dV_1 = p_1 v_1 dm_1 = p_1 v_1 Dm dt$

En aval on gagne le volume  $dV_2$  d'où  $dW_2 = -p_2 dV_2 = -p_2 v_2 dm_2 = -p_2 v_2 Dm dt$

30)

$$\text{Soit } d(U + E_c + E_{\text{pert}}) = \delta W_p + \delta W' + \delta Q$$

$$= p_1 v_1 Dm dt - p_2 v_2 Dm dt + \delta W' + \delta Q$$

↑  
volume massique.

$$\text{En régime stationnaire : } d(U + E_c + E_{\text{pert}}) = dm_2 (u_2 + e_{c2} + e_{p2}) - dm_1 (u_1 + e_{c1} + e_{p1})$$

$$\text{d'où : } Dm dt [(u_2 + p_2 v_2 + e_{c2} + e_{p2}) - (u_1 + p_1 v_1 + e_{c1} + e_{p1})] = \delta W' + \delta Q$$



$$\Leftrightarrow \underline{Dm [(h_2 + e_{c2} + e_{p2}) - (h_1 + e_{c1} + e_{p1})] = P_u + P_{th}}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = h \Rightarrow \text{en J.kg}^{-1} \\ P_u: \text{puissance utile t.q } P_u = SW'/dt \\ P_{th}: \text{puissance thermique t.q } P_{th} = \delta Q/dt \end{array} \right.$$

$$31) \text{ On a } Y_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{R} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Y_m = Dm = \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}}$$

$$\text{ou } [R] = \left[ m \frac{dv}{dt} \right] = \text{MT}^{-1} [v]$$

$$32) \left. \begin{array}{l} \text{En régime permanent } Dm = \text{cste} \\ \text{Or le fluide est incompressible d'où } Dv = \text{cste} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{S_A v_A = S_b v_B = S v} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{vitesse}$$

32) On va appliquer le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant:

Entre  $S_A$  et  $\Sigma_1$ :  $p^0 + \mu \frac{v_A^2}{2} = p_1 + \mu \frac{v^2}{2}$

Entre  $\Sigma_2$  et  $S_B$ :  $p^0 + \mu \frac{v_B^2}{2} = p_2 + \mu \frac{v^2}{2}$

car on néglige l'effet de pesanteur (on prend  $z = \text{cste}$ ).

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_1 = p^0 + \mu/2 (v_A^2 - v^2) \\ p_2 = p^0 + \mu/2 (v_B^2 - v^2) \end{array} \right.$$

34) a) On a:  $R_{12} = + \vec{F} - (\vec{F}_{p1 \Sigma_1} + \vec{F}_{p2 \Sigma_2})_{\text{air} \rightarrow \text{pale}}$

En projection sur  $Ox$ :  $R_{12} = F - (-p_1 S + p_2 S)$

$$\Leftrightarrow \underline{R_{12} = F + p_1 S - p_2 S}$$

b) Entre  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ :  $v_1 = v_2 = v \Rightarrow \underline{R_{12} = 0}$

c) donc  $\underline{F = (p_2 - p_1) S}$

d) de la question (32):  $p_2 - p_1 = \mu/2 (v_B^2 - v_A^2) \Rightarrow F = \frac{\mu}{2} (v_B^2 - v_A^2) S$

$$\text{On } \rho = \mu \Rightarrow F = \frac{\rho}{2} (v_B^2 - v_A^2) S$$

35) D'après (E2) :  $Dm(v_B - v_A) = F + F_p$  or  $F_p = 0$  d'après l'énoncé

$$\text{d'où } F = Dm(v_B - v_A)$$

$$\Leftrightarrow F = \rho S v (v_B - v_A)$$

36) En égalisant les expressions de F :  $v(v_B - v_A) = \frac{1}{2} (v_B^2 - v_A^2)$

$$\Leftrightarrow v = \frac{v_B + v_A}{2}$$

37) • Il n'y a aucun transfert thermique du fluide vers l'extérieur donc  $P_{th} = 0$  car l'écoulement est parfait.

• On a affaire à un gaz parfait dont les forces d'interaction sont nulles. Ces forces ne travaillent pas. Il n'y a pas de fluctuation de température  $\Rightarrow \Delta h = c_p \Delta T = 0$

38) D'après E.1 :  $Dm[(h_2 - h_1) + (e_{c2} - e_{c1}) + \underbrace{(e_{p2} - e_{p1})}_{=0}] = P_u + P_{th}$

$$\Leftrightarrow Dm(e_{c2} - e_{c1}) = P_u$$

$$\Leftrightarrow \frac{Dm}{2} (v_B^2 - v_A^2) = -P_{eol} \text{ ou } P_u = -P_{eol}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu S v}{2} (v_B^2 - v_A^2) = -P_{eol}$$

$$\Leftrightarrow \rho S \frac{(v_B + v_A)(v_B^2 - v_A^2)}{4} = -P_{eol}$$

39) D'où  $P_{eol} = -\rho \frac{S v_A^3}{4} (1+x)(x^2-1) \Leftrightarrow P_{eol} = \frac{\rho S v_A^3}{4} (1-x^2)(1+x)$

$$\text{or } \frac{dP_{eol}}{dx} = (1+x)(-2x) + (1-x^2) = 1 - x^2 - 2x^2 - 2x = 1 - 2x - 3x^2 = -3(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3})$$

$$\text{t.g. : } x = \frac{-2/3 \pm \sqrt{4/9 + 4/3}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{1}{3} \text{ ou } -\frac{1}{3}$$

$$\text{D'où } P_{max} = \rho S v_A^3 / 4 \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{8}{9}\right) \Rightarrow P_{max} = \frac{8}{27} \rho S v_A^3$$

(40) a)

$$\text{Soit } P_{\max} = \frac{8}{27} \rho \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot N_A^3$$
$$= \underline{\underline{1,49 \text{ MW}}}$$

b)

$$\text{Soit } N = \frac{P_{\text{nu}}}{P_{\text{réel}}} \approx \underline{\underline{1000 \text{ éoliennes}}}$$