

# Physique : DM3

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

## Partie I – Ariane V

VULCAIN est le nom du moteur qui assure la propulsion de l'étage principal des lanceurs européens ARIANE 5<sup>1</sup>. La réaction exothermique du dihydrogène et du dioxygène<sup>2</sup>, dans une chambre de combustion, produit de la vapeur d'eau à haute température et pression qui s'évacue à grande vitesse à travers une tuyère. C'est l'éjection de ce gaz de combustion qui génère la poussée participant à la propulsion de la fusée.

Une tuyère est un conduit qui permet de convertir, dans les meilleures conditions, l'énergie produite par la combustion en force propulsive. La figure (1) représente trois types de tuyères : divergente ; convergente ; convergente-divergente, connue sous le nom de tuyère de LAVAL.

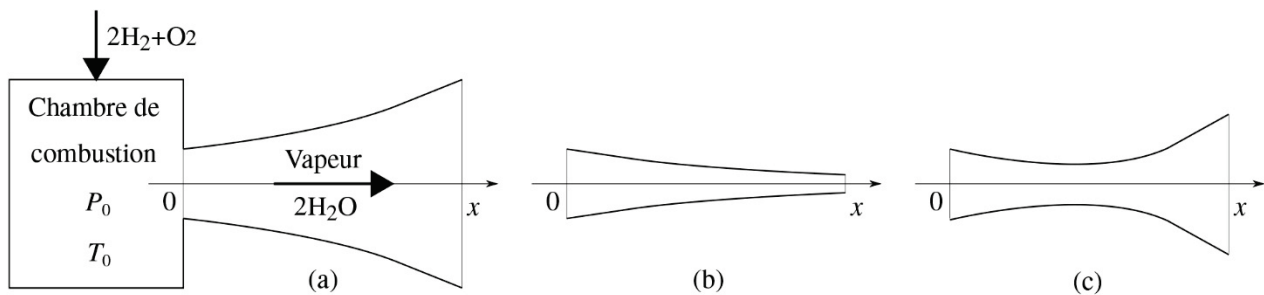


FIGURE 1 – Chambre de combustion débouchant sur une tuyère pouvant présenter trois géométries : (a) divergente ; (b) convergente ; (c) convergente-divergente (tuyère de LAVAL).

Pour la première phase de vol, le propulseur VULCAIN est assisté de deux puissants réacteurs à poudre qui fournissent la majeure partie de la poussée nécessaire au décollage.

- Cadre (très simplifié) de l'étude du système de propulsion du moteur VULCAIN :
  - Tous les gaz sont parfaits.
  - Dans la tuyère, l'écoulement du gaz est unidirectionnel (selon l'axe  $Ox$ ) et unidimensionnel (les grandeurs sont uniformes sur toute section droite).
  - L'évolution du gaz le long de la tuyère est adiabatique et réversible. L'écoulement est stationnaire.
  - La gravité est négligée dans l'étude de la tuyère.

1. Ces lanceurs sont utilisés pour le transport et la mise sur orbite de satellites.

2. Ces carburant et comburant sont stockés, sous leur état liquide, chacun dans un réservoir.

○ Grandeurs, définitions, notations et données utilisées dans cette étude :

- La variable  $x$  représente l'abscisse le long de la tuyère. L'origine est choisie en sortie de la chambre de combustion, ce qui correspond également à l'entrée de la tuyère.
- 20 • Les grandeurs physiques, à l'abscisse  $x$  : la pression  $P(x)$  ; la température  $T(x)$  ; la masse volumique  $\rho(x)$  ; la vitesse  $v(x)$  ; la célérité du son  $c(x)$  ; le nombre de MACH  $M(x) \equiv v(x)/c(x)$  ; l'aire  $A(x)$  de la section de la tuyère.
- Pour  $x = 0$ , ces grandeurs portent l'indice "0".
- Les pression et température dans la chambre de combustion :  $P_0 = 110 \times 10^5$  Pa,  $T_0 = 3\,500$  K.
- 25 • La constante spécifique de la vapeur d'eau :  $r \equiv R/M_{\text{H}_2\text{O}} = 462 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ , où  $R$  est la constante des gaz parfaits et  $M_{\text{H}_2\text{O}}$  est la masse molaire de l'eau.
- Le rapport des capacités calorifiques ( $C_P/C_V$ ) pour la vapeur d'eau :  $\gamma = 1,3$  (supposé constant).
- Les diamètre et section d'entrée de la tuyère :  $d_0 = 0,5$  m,  $A_0 \simeq 0,196$  m<sup>2</sup>.
- La masse de gaz de combustion produit par unité de temps :  $D = 250$  kg · s<sup>-1</sup>. Ce débit est supposé constant.
- 30 • La masse initiale de l'ensemble de la fusée (avec carburants et comburants) :  $m_{\text{F0}} = 800 \times 10^3$  kg.
- La différentielle  $df$  désigne l'accroissement infinitésimal de la fonction  $f$  entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ .
- Nous appelons différentielle logarithmique d'une fonction  $f$ , la grandeur :

$$\frac{df}{f} = d(\ln(f/f_0)) \quad (f/f_0 \in \mathbb{R}_+^*) \quad (1)$$

En particulier, appliquée à un produit de deux fonctions de la forme  $P = f^\alpha g^\beta$ , elle s'écrit :

$$\frac{dP}{P} = \alpha \frac{df}{f} + \beta \frac{dg}{g} \quad (2)$$

- Le symbole "≡" spécifie une égalité introduisant et définissant une grandeur.

## 1 Analyse préliminaire.

1. Nous notons  $\vec{v}_s = v_s \vec{e}_x$  la vitesse du gaz en sortie de tuyère, par rapport à la fusée. La force  $\vec{F}$ , dite de poussée, ressentie par la fusée, s'exprime :

$$\vec{F} = -D v_s \vec{e}_x \quad (3)$$

Proposer une brève argumentation en faveur de cette expression.

- 35 2. En précisant les éventuelles hypothèses introduites, exprimer la vitesse quadratique moyenne  $\langle \vec{v}^2 \rangle$  de la vapeur d'eau dans la chambre de combustion. On fera apparaître la constante spécifique  $r$ .
3. Exprimer la poussée (notée  $F_{\text{th}}$ ) qui serait fournie, directement en sortie de chambre (en absence de tuyère), si elle était la conséquence de la conversion idéalisée de l'énergie produite par la combustion. On considérera alors que le gaz, à la température  $T_0$ , traverse la section  $A_0$  à la vitesse  $v_{\text{th}} \equiv \langle \vec{v}^2 \rangle^{1/2}$ . On exprimera ce
- 40 résultat en fonction de  $P_0$  et  $A_0$ .
4. Calculer sa valeur. Commenter ce résultat.
5. Exprimer, en fonction de  $\gamma$ ,  $r$  et  $T$ , le rapport  $dP/d\rho$  que nous noterons  $c^2$ . La grandeur  $c$  est identifiée à la célérité des ondes sonores (en évolution adiabatique réversible) dans le gaz. Dans la suite, nous appellerons nombre de MACH le rapport  $M \equiv v/c$ .
- 45 6. Nous considérons dorénavant le mode de fonctionnement non idéalisé du propulseur. Exprimer la vitesse  $v_0$  du gaz à l'entrée de la tuyère en fonction de  $P_0$ ,  $T_0$ ,  $D$ ,  $A_0$  et  $r$ . Calculer sa valeur.
7. Calculer la valeur du nombre de MACH  $M_0$  à l'entrée de la tuyère. En déduire la nature subsonique ( $M_0 < 1$ ) ou supersonique ( $M_0 > 1$ ) de l'écoulement gazeux. Le calcul donne  $c_0 \simeq 1\,450$  m · s<sup>-1</sup>.

## 2 Relation de HUGONIOT.

50 En vue d'étudier les performances de la tuyère, nous allons tout d'abord établir une relation entre les différentielles  $dA$  et  $dv$ , paramétrée par le nombre de MACH  $M$ .

Nous admettons que les différentielles de la vitesse et de la pression sont reliées par l'égalité, issue du principe fondamental de la dynamique :

$$\rho v dv = -dP \quad (4)$$

8. Justifier que le produit  $\rho v A$  est uniforme le long de la tuyère.

9. Exprimer la différentielle logarithmique du produit  $\rho v A$ . En y faisant apparaître  $c^2$  et intervenir la relation (4), établir l'égalité, connue sous le nom de relation de HUGONIOT :

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dv}{v} \quad (5)$$

10. L'expression de la poussée donnée par la relation (3) révèle que, pour un débit  $D$  fixé, cette force est d'autant plus grande que la vitesse d'éjection des gaz est élevée. En considérant que  $M_0 < 1$ , indiquer quelle(s) tuyère(s) représentée(s) figure (1) ne présente(nt) pas la géométrie adaptée.

11. Dans le cas d'une tuyère convergente-divergente (et toujours pour  $M_0 < 1$ ), donner l'allure des deux évolutions envisageables de la vitesse le long de la tuyère. On raisonnera à partir de l'évolution du signe de  $dA$  le long d'une telle tuyère. En déduire la condition assurant la croissance monotone de la vitesse depuis son entrée jusqu'à sa sortie. La tuyère est alors dite amorcée. C'est dans cette situation que nous chercherons à la faire fonctionner.

12. Une tuyère divergente équipe pourtant certains propulseurs d'avions de chasse. Préciser leur condition de fonctionnement.

## 3 Dépendance des grandeurs avec le nombre de MACH.

La relation de HUGONIOT n'est pas immédiatement exploitable car le nombre de MACH dépend de la vitesse  $v(x)$  mais également de la température  $T(x)$ , à travers la célérité du son  $c(x)$ . Nous allons d'abord établir une relation différentielle liant les seules variables  $A$  et  $M$ .

13. Exprimer  $dM/M$  en fonction de  $dv/v$  et  $dT/T$ .

14. En traduisant la propriété d'adiabaticité et de réversibilité de l'évolution, et en utilisant la relation (4), exprimer  $dv/v$  en fonction de  $dT/T$ ,  $M$  et  $\gamma$ .

15. Enfin, en faisant disparaître  $v$  au profit de  $M$  dans l'équation (5), établir la relation cherchée :

$$\frac{dA}{A} = \frac{M^2 - 1}{1 + \alpha M^2} \frac{dM}{M} \quad (6)$$

où  $\alpha$  est une constante positive que l'on explicitera.

• En vue d'intégrer cette équation différentielle à variables séparées, décomposons d'abord la fonction  $g$  définie par  $g(M) = \frac{1}{A} \frac{dA}{dM}$  en éléments simples. Écrivons-là :

$$g(M) = \frac{M^2 - 1}{M(1 + \alpha M^2)} = \frac{C_1}{M} + \frac{C_2 + C_3 M}{1 + \alpha M^2} \quad (7)$$

16. Déterminer les constantes  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ .

17. Intégrer l'équation différentielle (6). Nous écrirons sa solution sous la forme  $Af(M) = \text{Cste}$  en choisissant  $f$  telle que  $\frac{f(M)}{M} \xrightarrow{M \rightarrow 0} 1$ . Nous poserons  $\beta = (1 + \alpha)/(2\alpha)$ .

- 75 **18.** Justifier que la fonction  $f$  admet un extremum. Le situer sur l'axe des abscisses. Ces résultats peuvent s'obtenir avec un minimum de calculs.
- 19.** En déduire l'allure graphique de la fonction  $A = A(M)$ . On marquera d'une étoile le point  $(M_0, A_0)$ .
- 20.** Pour des conditions d'entrée fixées  $(P_0, T_0, A_0, D)$  (avec toujours  $M_0 < 1$ ), décrire les parcours possibles du point  $(M, A)$  sur ce tracé lorsque le gaz progresse de l'entrée à la sortie de la tuyère (convergente-divergente),  
80 selon l'importance de la restriction de sa section au col.
- 21.** En déduire l'allure de la dépendance de  $M$  avec l'abscisse  $x$ , pour une tuyère amorcée ( $M = 1$  au col).
- 22.** Sur le même graphe, donner l'allure de cette dépendance pour un nombre de MACH  $M'_0$ , à l'entrée de la même tuyère, légèrement inférieur ( $M'_0 < M_0 < 1$ ).

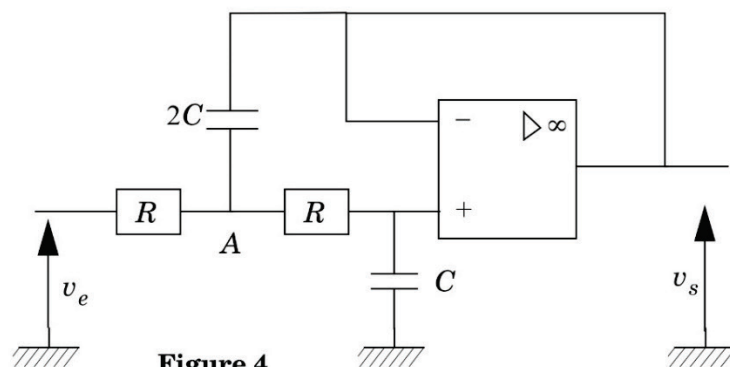
## Partie II – Electronique

### Étude d'un filtre

On considère tout d'abord le filtre suivant (figure 4) où l'amplificateur opérationnel est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire quelque soit la fréquence.

La tension d'entrée est fournie par un générateur et s'écrit

$$v_e(t) = V_{em} \cos(\omega t + \varphi_e)$$



où  $V_{em}$  est la valeur maximale et  $\omega$  la pulsation de la tension d'entrée. La tension de sortie sera notée  $v_s(t) = V_{sm} \cos(\omega t + \varphi_s)$ . L'étude mathématique du filtre sera effectuée en utilisant la notation complexe  $\underline{v_e}$  et  $\underline{v_s}$  pour ces deux tensions :

$$\underline{v_e}(t) = V_{em} e^{j(\omega t + \varphi_e)} \quad \text{et} \quad \underline{v_s}(t) = V_{sm} e^{j(\omega t + \varphi_s)} \quad (\text{avec } j^2 = -1).$$

### III.A - Analyse qualitative

III.A.1) Rappeler ce qu'est un amplificateur idéal fonctionnant en régime linéaire.

III.A.2)

a) Comment se comporte un condensateur en basse fréquence  $\omega \rightarrow 0^+$  ? Représenter le circuit en basse fréquence. Établir à partir de ce circuit la limite de  $v_s$  en basse fréquence.

b) Comment se comporte un condensateur en haute fréquence  $\omega \rightarrow +\infty$  ? Représenter le circuit en haute fréquence. Établir à partir de ce circuit la limite de  $v_s$  en haute fréquence.

c) Déduire de ce qui précède la nature du filtre.

### III.B - Analyse quantitative

III.B.1) Montrer que la fonction de transfert complexe  $\underline{H} = \underline{v_s}/\underline{v_e}$  s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\lambda \frac{\omega}{\omega_0}}$$

On précisera les expressions de  $H_0$ ,  $\lambda$  et  $\omega_0$  en fonction de  $R$  et  $C$ . Vérifier la concordance des résultats du III.A avec cette expression de  $\underline{H}$ .

## III.B.2)

a) Comment s'exprime l'amplitude  $V_{sm}$  du signal de sortie  $v_s$  en fonction de  $|\underline{H}|$  et de l'amplitude  $V_{em}$  du signal d'entrée  $v_e$  ? Quelles grandeurs électriques faut-il donc relever expérimentalement pour déterminer  $|\underline{H}|$  ? Quel(s) appareil(s) peut-on utiliser ?

b) Comment s'exprime la phase  $\varphi_s$  du signal de sortie  $v_s$  en fonction de la phase  $\varphi$  de  $\underline{H}$  et de la phase du signal d'entrée  $\varphi_e$  ? Quel(s) appareil(s) peut-on utiliser pour mesurer  $\varphi$  ?

## III.B.3) Diagramme de Bode

a) Montrer que  $|\underline{H}| = 1 / \sqrt{1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}}$ .

b) Tracer le diagramme de Bode en gain du filtre directement sur votre feuille en précisant les grandeurs portées sur les axes ainsi que les valeurs remarquables de ces grandeurs. On précisera les asymptotes en basse et haute fréquence ainsi que la pulsation de coupure à  $-3\text{dB}$ .

c) Tracer le diagramme de Bode en phase du filtre. On précisera les asymptotes en basse et haute fréquence. Que vaut la phase  $\varphi$  de  $\underline{H}$  pour  $\omega = \omega_0$  ?

## ***Modulation et démodulation d'amplitude***

### ***Application du filtre***

Il est fréquent qu'un signal se présente sous une forme inadaptée à sa transmission ou à son traitement. La modulation est le procédé permettant de transposer les caractéristiques de ce signal dans des domaines de fréquences où la propagation et le traitement sont possibles. La démodulation est l'opération inverse.

#### **IV.A - De la nécessité de moduler...**

On s'intéresse aux signaux hertziens audio qui s'étalent sur la plage de fréquence  $f_{m1} = 300 \text{ Hz} \leq f_m \leq f_{m2} = 4,50 \text{ kHz}$ . Cette plage est parfaitement audible à notre oreille qui peut percevoir ordinairement des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz.

D'autre part, on peut montrer que la réception d'une onde électromagnétique nécessite une antenne dont la dimension caractéristique est une demi longueur d'onde.

Quelle devrait être la taille d'une antenne permettant la réception des signaux audio considérés ? Cela vous semble-t-il réalisable ? Pourquoi est-il alors intéressant d'utiliser une autre fréquence ? Commenter l'intérêt de l'utilisation d'une autre fréquence si l'on veut émettre plusieurs ondes radios émanant de plusieurs stations.

## IV.B - Modulation

Le signal audio à transporter est maintenant appelé signal modulant. Les méthodes de modulation sont élaborées à partir d'une onde sinusoïdale pure, appelée porteuse ou signal porteur. Le résultat de la combinaison de ces deux signaux s'appelle signal modulé. Le signal modulant est noté  $e(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$  et le signal porteur  $p(t) = A_p \cos(2\pi f_{\text{port}} t)$  où  $f_{\text{port}}$  est la fréquence du signal porteur (ou porteuse) et  $f_m (\ll f_{\text{port}})$  la fréquence du signal modulant. Le signal modulé en amplitude est un signal de la forme :

$$s(t) = A_p [1 + m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_{\text{port}} t) \text{ où } m \text{ est un réel strictement positif.}$$

Ce signal modulé a été obtenu en réalisant les opérations représentées dans le schéma bloc de la figure 5.

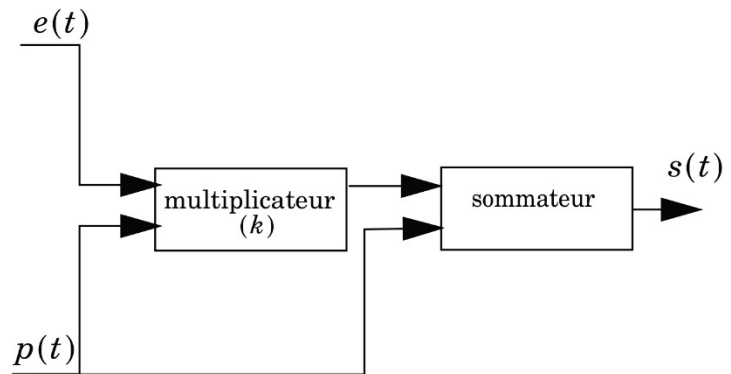


Figure 5

IV.B.1) Montrer que le schéma de la figure 5 permet effectivement d'obtenir le signal  $s(t)$  si l'on pose  $m = k A_m$ . Dans toute la suite du sujet, on prendra l'indice de modulation  $m < 1$ . On rappelle que le spectre d'un signal désigne la

représentation de l'amplitude des signaux sinusoïdaux qu'il contient en fonction de leur fréquence respective. Exemple : le spectre de

$$v(t) = X_{1m} \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + X_{2m} \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2) \text{ avec } X_{1m} > X_{2m} \text{ et } f_1 < f_2$$

est donné figure 6.

IV.B.2) On a réalisé en laboratoire l'enregistrement d'un signal modulé. Le résultat est donné figure 7 en annexe. Expliquer en quoi ce signal représente correctement un signal modulé  $s(t)$  dans le cas où  $m < 1$ . On précisera sur la figure 7 (à rendre avec la copie) les valeurs des fréquences  $f_{\text{port}}$  et  $f_m$ , les expressions et valeurs particulières de  $s(t)$  marquées d'un point d'interrogation et on déterminera la valeur de  $m$ .

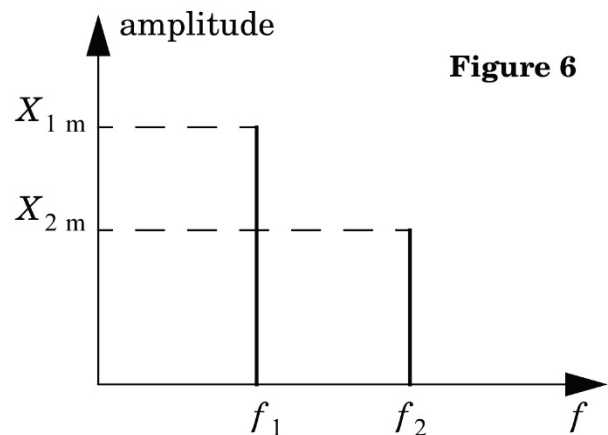


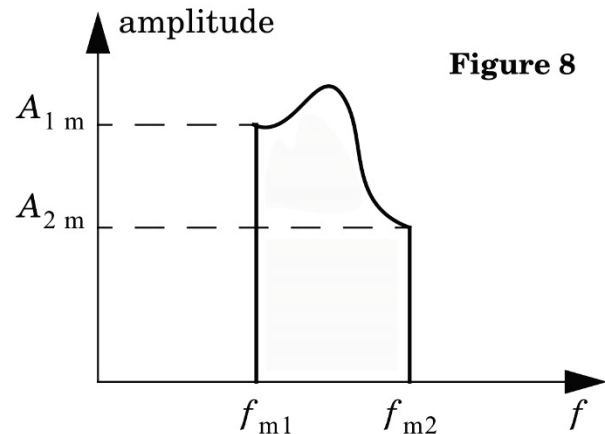
Figure 6

IV.B.3) Réécrire le signal  $s(t)$  en le linéarisant (c'est-à-dire en le mettant sous la forme d'une somme de cosinus). Quelles fréquences contient ce signal ? Représenter l'allure du spectre de  $s(t)$ .

IV.B.4) On envoie dans la pratique un signal modulant audio, somme de signaux sinusoïdaux qui encombrant la plage de fréquence

$$f_{m1} = 300 \text{ Hz} \leq f_m \leq f_{m2} = 4,50 \text{ kHz} .$$

La porteuse utilisée est celle émise par la station Europe 1 soit  $f_{\text{port}} = 185 \text{ kHz}$ . Le spectre du signal audio modulant est représenté figure 8.



a) Représenter le spectre du signal modulé  $s(t)$ .

b) Quelle est la bande passante d'un filtre nécessaire à la transmission intégrale du signal  $s(t)$  au niveau d'une antenne ? Quelle est la nature de ce filtre ?

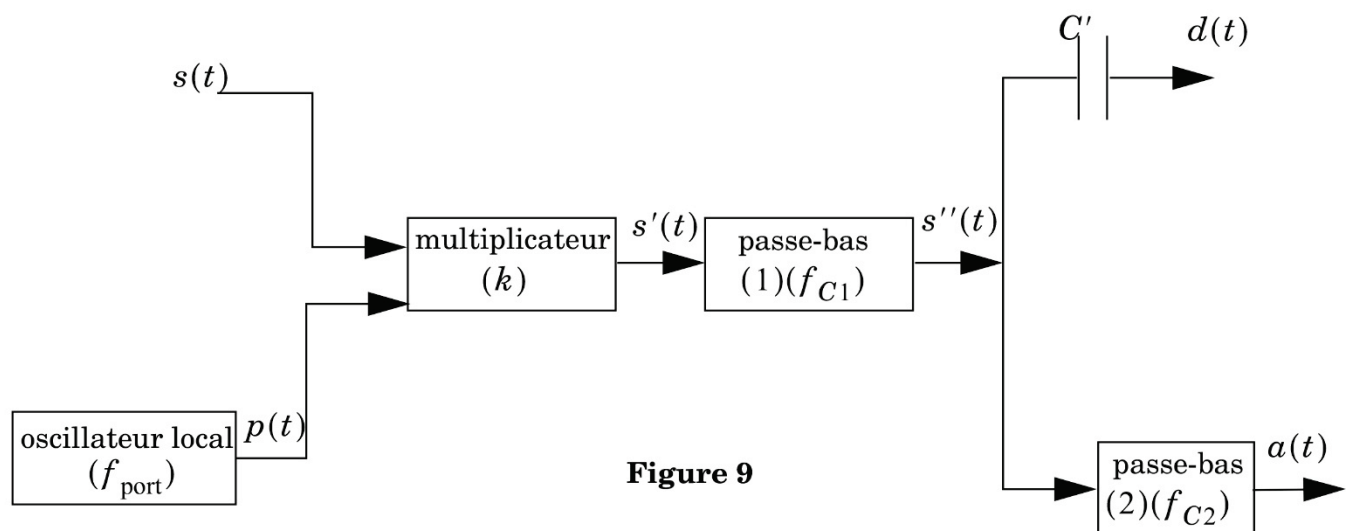
c) Compte tenu de la Partie IV.A, montrer l'intérêt de la modulation ainsi réalisée.

### IV.C - Démodulation synchrone

On considère à nouveau un signal modulé noté

$$s(t) = A_p [1 + k A_m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_{\text{port}} t) .$$

On admet que l'on dispose à la réception du signal modulé d'un oscillateur local synchrone délivrant le signal  $p(t) = A_p \cos(2\pi f_{\text{port}} t)$  identique au signal porteur utilisé à l'émission. La figure 9 ci-dessous représente le principe de fonctionnement du circuit de démodulation situé après l'antenne réceptrice.



IV.C.1) Donner l'expression du signal  $s'(t)$  obtenu à la sortie du multiplicateur. Le linéariser et représenter le spectre de ce signal.

IV.C.2) Le filtre passe-bas (1) a une fréquence de coupure  $f_{C1}$  telle que  $f_m < f_{C1} < f_{\text{port}}$  et le filtre passe-bas (2) une fréquence de coupure  $f_{C2} < f_m$ . On considérera dans un premier temps que les filtres sont parfaits. C'est-à-dire que chaque filtre admet un gain  $|\underline{H}| = 1$  pour des fréquences inférieures à sa fréquence de coupure et un gain nul pour toute fréquence supérieure à sa fréquence de coupure.

- Exprimer le signal  $s''(t)$  et donner son spectre.
- On souhaite, uniquement pour cette question, utiliser le filtre étudié dans la Partie III pour réaliser le filtre (1). Le cahier des charges impose une atténuation de 80 dB pour les signaux de fréquences  $2f_{\text{port}}$  par rapport aux signaux continus.  
Justifier cette contrainte et calculer  $\omega_0$  et  $R$  lorsque  $C = 1,00 \text{ nF}$  et  $f_{\text{port}} = 185 \text{ kHz}$ .
- À quoi sert le condensateur de capacité  $C'$  représenté sur le schéma bloc ? Donner alors l'expression du signal  $d(t)$  et son spectre.
- Exprimer le signal  $a(t)$  obtenu à la sortie du filtre (2).
- Montrer finalement que l'analyse des signaux  $a(t)$  et  $d(t)$  permet de reconstituer le signal modulant  $e(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ .

*Données :*

- vitesse de la lumière dans le vide  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$  ;
- Perméabilité du vide  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

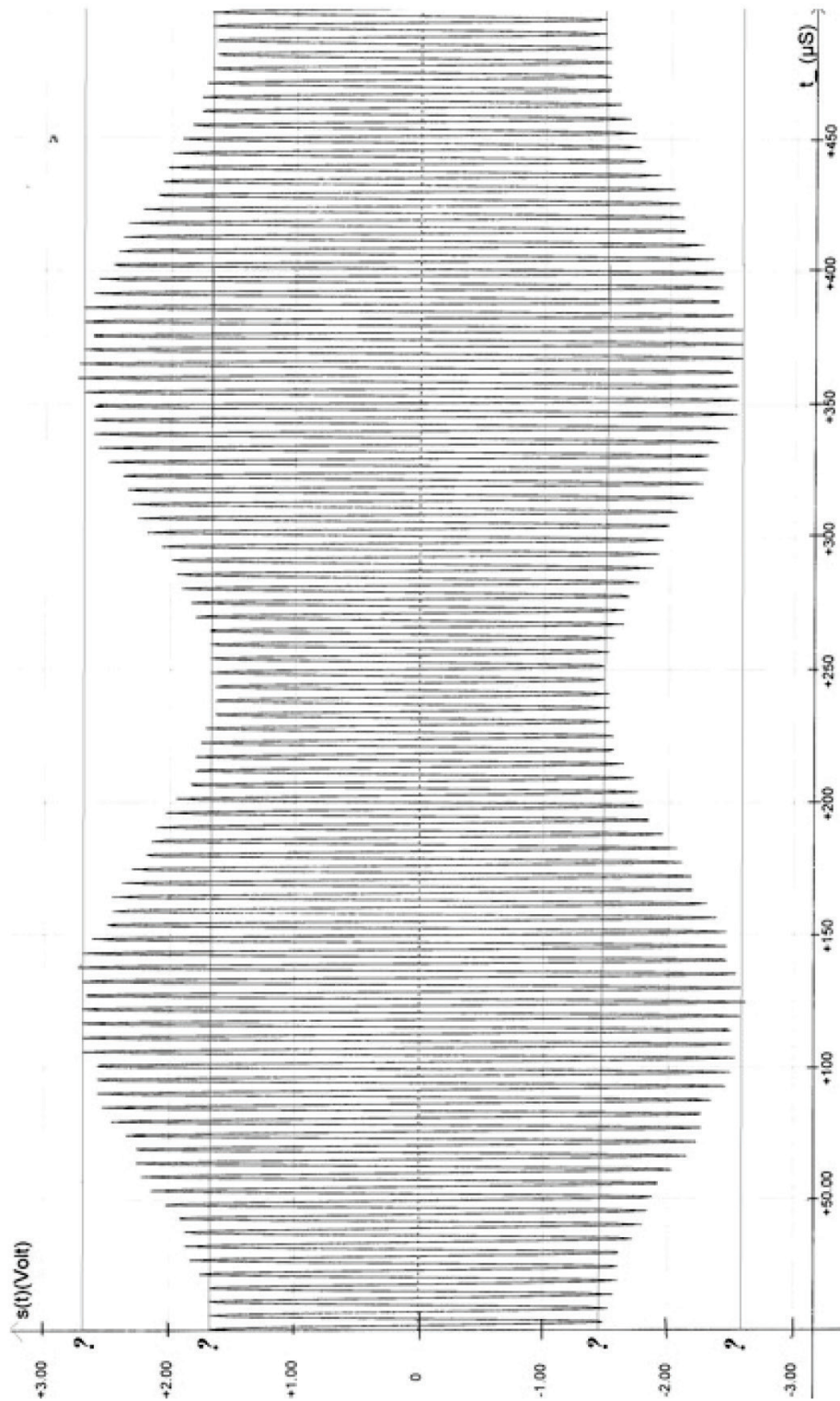
*Formulaire :*

- $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = -\Delta\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A})$
- $\cos a \times \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$



## Annexe de la partie II

Cette annexe doit être rendue avec les autres copies. Il ne pourra pas être délivré d'autres exemplaires de ce document.



**Figure 7**

