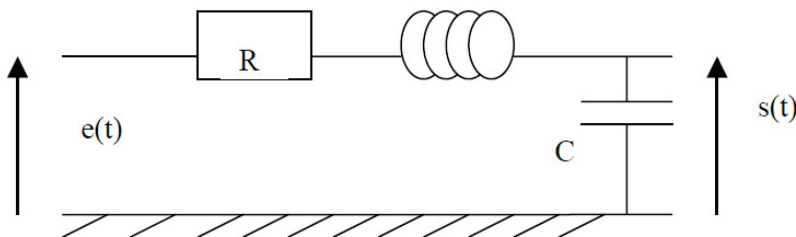


Physique : DM2

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Partie 1 - Le facteur de qualité en électrocinétique : étude d'un filtre passif.

On étudie le circuit linéaire ci-dessous. Il est composé de trois dipôles en série : une résistance R, une inductance parfaite de coefficient d'induction L, et d'un condensateur de capacité C.



Il est soumis à une tension d'entrée sinusoïdale $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi)$. On note $s(t)$ la tension de sortie.

En notation complexe, on notera, pour $e(t)$ par exemple, $\underline{e} = \underline{E}_m e^{j\omega t} = E_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ avec \underline{E}_m , l'amplitude complexe.

1. A l'aide de deux schémas équivalents du circuit, l'un en hautes fréquences, l'autre en basses fréquences, donner la nature de ce filtre.

2. Fonction de transfert

- a. Etablir la fonction de transfert de ce filtre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et } Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

Donner l'ordre de ce filtre.

- b. Si $e(t)$ est une fonction quelconque du temps (non sinusoïdale), quelle est l'équation différentielle entre les fonctions $s(t)$ et $e(t)$?

Pour quelle raison peut-on affirmer la convergence du régime transitoire ?

3. Exprimer le module de la fonction de transfert $|\underline{H}(j\omega)|$, en fonction de ω , ω_0 et Q .
4. Montrer que $|\underline{H}(j\omega)|$ passe par un maximum pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Comment appelle-t-on ce phénomène ? Déterminer, ω_r , la pulsation correspondant à ce phénomène, en fonction de ω_0 et Q .

5. On appelle gain, la fonction G_{dB} , telle que $G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$.
Donner les équations des asymptotes de G_{dB} aux basses fréquences et aux hautes fréquences.
Exprimer $G_{dB}(\omega = \omega_0)$.
6. Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain pour $Q=10$ et $Q=\frac{1}{10}$ sur la feuille de papier semi-logarithmique fournie.
On définit les pulsations de coupures (ω_c) d'un filtre par la relation : $|H(j\omega_c)| < \frac{|H(j\omega)|_{\max}}{\sqrt{2}}$.
Justifier que la bande passante est alors définie à -3dB et placez-la sur les graphes.
7. Interprétation énergétique du facteur de qualité Q.

On suppose $Q \gg 1$.

- Montrer que si $\omega = \omega_0$, alors $i(t) = I_{\max} \cos(\omega_0 t)$.
- Déterminer alors $u_c(t)$, la tension aux bornes du condensateur en fonction de C, ω_0 et I_{\max} .
- On note ΔW , l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance sur une période.

Montrer que $\Delta W = \frac{\pi R I_{\max}^2}{\omega_0}$.

- On note W_m , l'énergie maximale reçue par le condensateur.

Montrer que $W_m = \frac{I_{\max}^2}{2C\omega_0^2}$.

- En déduire que $Q = 2\pi \frac{W_{\max}}{\Delta W}$.

FIN DE LA PARTIE I

Partie 2 : Décongélation d'un aliment

L'étude précédente a abordé les principaux phénomènes ayant lieu lors de la propagation d'une micro-onde dans un aliment congelé. Dans cette troisième partie seront mis en évidence l'intérêt de la décongélation par micro-ondes, puis la manière de procéder afin d'obtenir une décongélation sensiblement uniforme.

L'aliment soumis à la décongélation, de forme parallélépipédique, possède une section $S = 1,0m^2$ et une épaisseur $L = 20cm$. Sa température initiale est uniforme, égale à $T_{ini} = -20\text{ }^\circ\text{C}$, et la température finale désirée est fixée à $T_{fin} = 0\text{ }^\circ\text{C}$.

C/ Décongélation « classique »

La manière la plus simple de procéder à la décongélation consiste à utiliser un fluide plus chaud (air ou eau en pratique).

Jusqu'à la fin du problème, la situation est supposée unidimensionnelle, c'est-à-dire que les grandeurs d'intérêt ne dépendent que de la variable x (figure 5). L'action du fluide entourant l'aliment sera simplifiée, en supposant qu'elle impose la température $T_{ext} = 20\text{ }^\circ\text{C}$ aux bords de l'aliment, c'est-à-dire en $x = 0$ et en $x = L$. Quasi instantanément, es bords de l'aliment acquièrent la température T_{ext} , puis petit à petit, l'intérieur de l'aliment se réchauffe. Pour la simplification du problème, les fuites thermiques latérales seront négligées.

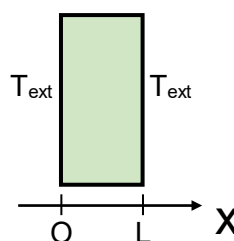


Figure 5

La capacité thermique massique de l'aliment est notée $c_{th} = 2,0 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$, sa conductivité thermique $\lambda_{th} = 1,0 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et sa masse volumique $\rho = 1,1.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; ces grandeurs demeurent uniformes au sein de l'aliment.

C1. En considérant une tranche élémentaire d'aliment comprise entre x et $x+dx$, établir l'équation de diffusion thermique satisfaite par la température de l'aliment :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D_{th} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2},$$

où D_{th} est une constante à expliciter en fonction des caractéristiques de l'aliment.

La température de l'aliment est dans un premier temps, recherchée sous la forme :

$T(x,t) = T_{ext} + f(x)g(t)$. La fonction $f(x)$ est supposée être sinusoïdale, de la forme $f(x) = \sin(\mu x)$, où μ est une constante positive ; la fonction $g(t)$ sera explicitée ultérieurement.

C2. En considérant les conditions aux limites, exprimer les valeurs possibles de μ en faisant intervenir un entier n .

C3. En résolvant l'équation de diffusion thermique, montrer que la température $T(x,t)$ s'écrit alors sous la forme :

$$T(x,t) = T_{ext} + \theta \sin(\mu x) \exp(vt),$$

où θ est une constante (qui ne sera pas déterminée). Exprimer la constante v en fonction de D_{th} , L et n .

C4. Tracer, dans le cas $n = 1$, l'allure de la température de l'aliment $T(x,t)$ au début de la décongélation, pour $t_1 = 0^+$, puis au bout d'un certain temps, pour $t_2 = 5 \text{ h}$ (calculer notamment $\exp(vt_2)$).

C5. Commenter l'évolution de la température au cours du temps. Critiquer les deux courbes obtenues.

Une solution plus générale peut être obtenue en sommant les solutions obtenues précédemment pour les différentes valeurs des entiers n , les constantes étant désormais indicées :

$$T(x,t) = T_{ext} + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \sin(\mu_n x) \exp(v_n t).$$

C6. Estimer numériquement la durée nécessaire pour dégeler l'aliment et commenter le résultat.

C7. Pouvait-on avoir une idée de son ordre de grandeur sans faire les calculs précédents ?

D / Décongélation par micro-ondes

Une autre possibilité pour la décongélation est l'emploi d'ondes électromagnétiques. Une micro-onde est envoyée en incidence normale sur les deux faces de l'aliment (figure 6). Ce dernier possède les mêmes sections $S = 1,0 \text{ m}^2$ et épaisseur $L = 20 \text{ cm}$ que précédemment.

Afin de simplifier la modélisation de l'aliment, il est possible de le partager (par la pensée) en cinq tranches d'égale épaisseur. Dans chaque tranche, les propriétés thermophysiques de l'aliment et la température sont considérées comme uniformes. La température du centre C_j de la tranche j est notée T_j (figure 6).

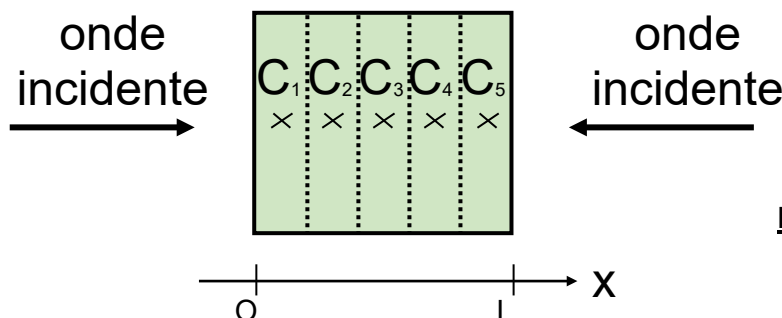


Figure 6

Comme cela a été étudié dans la deuxième partie, l'onde est absorbée dans l'aliment et sa puissance décroît exponentiellement. Par exemple, la puissance P associée à l'onde arrivant en $x = 0$ varie comme $P(x) = P_0 \exp(-\alpha x)$, où α est une constante positive et $P_0 = 5,0 \text{ kW}$. L'onde provenant de l'extrémité $x = L$ est absorbée de la même manière.

Une difficulté pour la modélisation provient du fait que les propriétés physiques du matériau dépendent de sa température. Deux domaines seront distingués :

- domaine **A** : état congelé : $T_{ini} \leq T \leq T'$ (avec $T' = -3 \text{ °C}$)
- domaine **B** : état en cours de décongélation : $T' \leq T \leq T_{fin}$ (avec $T_{fin} = 0 \text{ °C}$).

Sur la figure 7, sont représentées des modélisations simplifiées des variations de la capacité thermique massique c_{th} , de la conductivité thermique λ_{th} ainsi que de la constante d'atténuation α . Ces quantités comporteront donc en indice le domaine de température considéré, comme par exemple $c_{th,A}$. La masse volumique reste, quant à elle, quasiment constante et notée $\rho = 1,1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

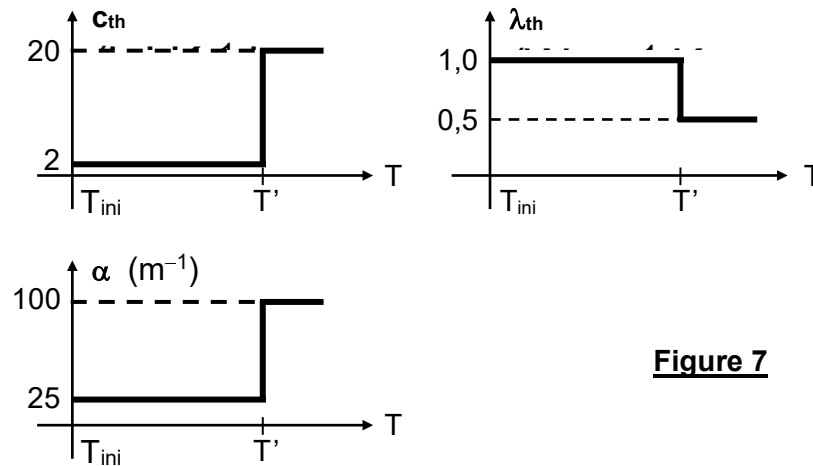


Figure 7

Dans un premier temps, la diffusion thermique n'est pas prise en compte.

- D1.** Comment interpréter qualitativement l'augmentation brusque de la capacité thermique au voisinage de T' ?
- D2.** Calculer le transfert thermique (chaleur) que doit recevoir l'aliment pour passer de T_{ini} à T_{fin} .
- D3.** Sachant que chacune des deux ondes envoyées sur l'aliment possède une puissance P_0 , calculer la durée Δt de la décongélation. Pourquoi n'est-ce qu'une estimation ?
- D4.** Si l'aliment est dans l'état congelé **A**, calculer (numériquement) la fraction de puissance $\frac{P_j}{P_0}$ de l'onde arrivant en $x = 0$, qui est absorbée dans la tranche j ($j = 1, \dots, 5$).
Calculer ensuite la fraction de la puissance provenant des deux ondes $\frac{P_j'}{2P_0}$ absorbée dans la tranche j ($j = 1, \dots, 5$).
Calculer enfin la durée Δt_1 requise pour chauffer la tranche 1 jusqu'à la température T' (toute conduction thermique est négligée à ce stade).
Préciser l'état dans lequel se trouvent alors les autres tranches.
- D5.** L'aliment est ensuite supposé être entièrement dans l'état intermédiaire **B**. Calculer de même la fraction de puissance totale $\frac{P_j''}{2P_0}$ absorbée dans la tranche j ($j = 1, \dots, 5$). Conclure.

En pratique, pour pallier le problème précédent, l'aliment est décongelé par micro-ondes dans une pièce très froide, à une température de l'ordre de 50 °C à 60 °C .

- D6** Expliquer la pertinence de ce procédé.