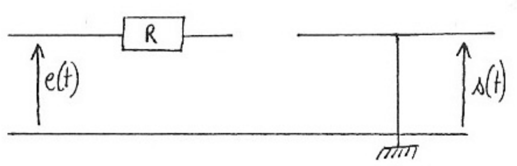
Physique : DM2

Partie 1 - Le facteur de qualité en électrocinétique : étude d'un filtre passif. (Mines 2004)

1°) En HF { un condensateur se comporte comme un court-circuit.
une bobine — " — circuit ouvert.

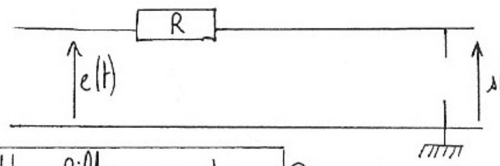
d'où :



$\Rightarrow \lim_{\omega \to \infty} s(t) = 0$

En BF : { — " circuit ouvert
une bobine — court-circuit

d'où :



$\Rightarrow \lim_{\omega \to 0} s(t) = e(t)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Il s'agit d'un filtre passe-bas}}$ 1

2°) a) On a un diviseur de tension d'où : $\underline{H} = \dfrac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \dfrac{1/jC\omega}{R + jL\omega + 1/jC\omega}$

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{1/RC} + \left(j\frac{\omega}{1/\sqrt{LC}}\right)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{où } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } \omega_0 Q = \frac{1}{RC} \Leftrightarrow Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R}} \; 2$$

C'est un filtre passe-bas d'ordre 2.

b) On a donc $\underline{e} = \underline{s}\left(1 + \frac{j}{Q}\omega/\omega_0 + \left(j\,\omega/\omega_0\right)^2\right)$

$$\Rightarrow e(t) = s + \frac{1}{Q\omega_0}\frac{ds}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{car} \quad j\omega \leftrightarrow \frac{d}{dt} \text{ et } (j\omega)^2 \leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 e} \; 3$$

La solution de cette équation différentielle est du type : $s(t) = s_{ssm}(t) + s_{sp}(t)$ où $s_{ssm}(t)$ représente le régime transitoire t.q : $\lim_{t \to \infty} s_{ssm}(t) = 0$ car les coefficients de l'équation différentielle sont tous du même signe.

3°) On a : $\boxed{|\underline{H}(j\omega)| = H(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}}$ 4

4°) Posons $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ d'où $H(x)$ est maximum si $\dfrac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)^2 + x^2/Q^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow -2\times 2x\left(1-x^2\right) + 2x/Q^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (minimum local)} \\ \text{ou} \\ 1 - x^2 = 1/2Q^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 1 - 1/2Q^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{1 - 1/2Q^2}$ qui est réel si $Q > 1/\sqrt{2}$

D'où $\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \text{ existe si } Q > 1/\sqrt{2}}$ 5 à ω_r on a le phénomène de résonance

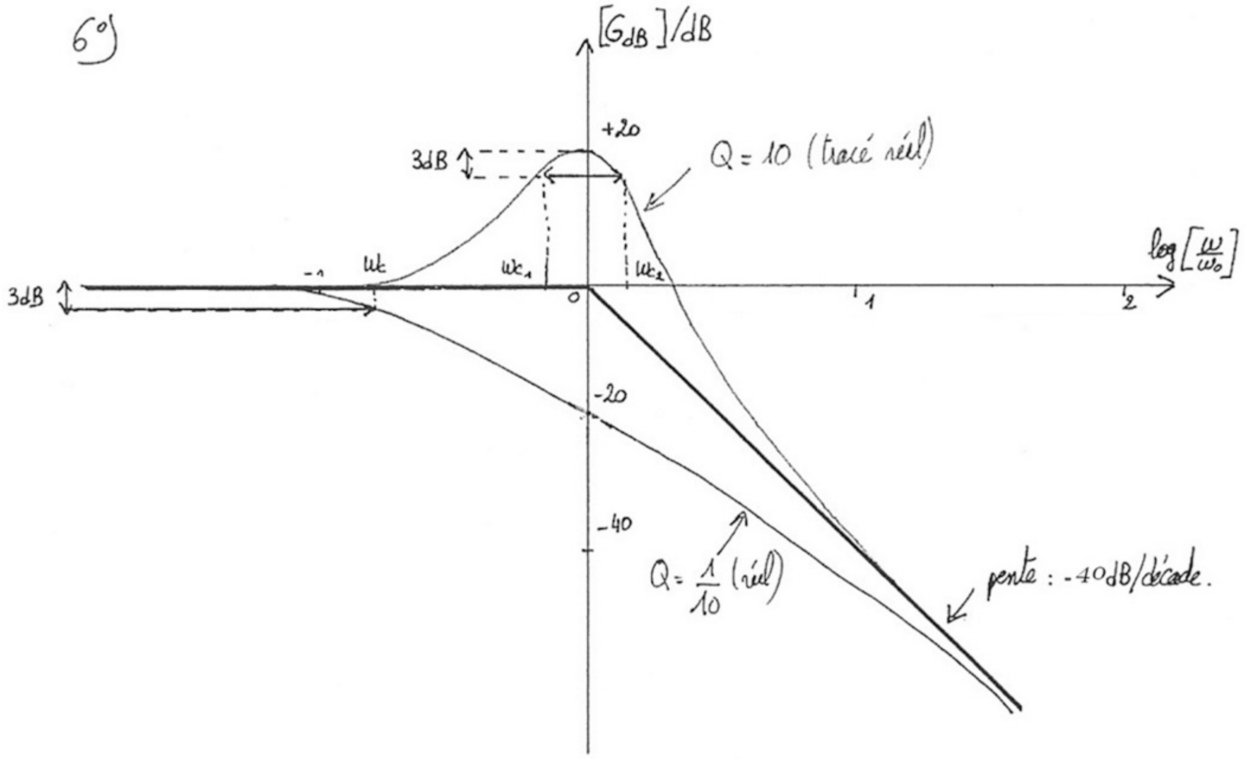
5°) On a $G_{dB} = 20\log H(\omega) = -10\log\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}\right]$

D'où, en BF : $G_{dB}(BF) \simeq 0$ 6

. en $\omega = \omega_0$: $G_{dB}(\omega=\omega_0) = -10\log\left(1/Q^2\right) = 20\log Q = G_{dB}(\omega=\omega_0)$ 7

. en HF : $G_{dB}(HF) \simeq -10\log\dfrac{\omega^4}{\omega_0^4} \simeq -40\log\dfrac{\omega}{\omega_0} = G_{dB}(HF)$ 8

6°)



- ω_c est définie par : $|H| < \dfrac{H_{max}}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \quad G < 20\log H_{max} - 10\overbrace{\log 2}^{\simeq 0{,}3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{G < G_{max} - 3\,dB} \text{ (9)}$$ d'où le nom de pulsation à $-3\,dB$.

- Pour $Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on a bien affaire à un passe bas d'où la BP : $[0 ; \omega_c[$.
- Pour $Q = 10$, on doit considérer le filtre comme un passe bande d'où BP : $[\omega_{c_1}, \omega_{c_2}]$.

7°) On suppose $Q \gg 1$.

a) Pour $\omega = \omega_0$: $\begin{cases} \dfrac{\underline{H}}{et} = \underline{s}/\underline{e} = Q/j \\ \underline{s} = \underline{Z_c}\,\underline{i} = \underline{i}/jC\omega_0 \end{cases}$ $\Rightarrow \underline{i} = jC\omega_0 \underline{s} = jC\omega_0 \dfrac{Q}{j}\underline{e} = \underline{e}/R$.

$$\Rightarrow \quad i(t) = \frac{E_m}{R}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

(10)

Posons $\varphi = 0$, choix des origines pour $e(t)$ d'où $\boxed{\text{à : } \omega = \omega_0 : i(t) = I_{max}\cos(\omega_0 t) \quad \text{avec } I_{max} = \dfrac{E_m}{R} \quad (\underline{Z} = R \text{ à } \omega = \omega_0)}$

b) On a $\underline{s} = \underline{u_c} = \underline{Z_c}\,\underline{i} = (jC\omega_0)^{-1}\underline{i} = e^{-j\pi/2} \times \dfrac{\underline{i}}{C\omega_0}$

$$\text{D'où } \boxed{u_c(t) = \frac{I_{max}}{C\omega_0}\cos(\omega_0 t - \pi/2) = \frac{I_{max}}{C\omega_0}\sin(\omega_0 t)} \text{ (11)}$$

c) On a $\mathcal{P}_J = Ri^2$ d'où $\Delta W = \displaystyle\int_t^{t+T_0} Ri^2 dt = \int_0^{T_0} Ri^2 dt$ où $T_0 = 2\pi/\omega_0$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta W = \int_0^{T_0} R I_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t)\,dt = \frac{R I_{max}^2}{2} \times T_0 = \frac{\pi R I_{max}^2}{\omega_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\Delta W = \frac{\pi R I_{max}^2}{\omega_0}} \text{ (12)}$$

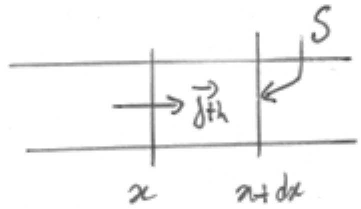
d) Soit $W_C(t) = \dfrac{1}{2}\, q^2(t)/C = \dfrac{1}{2} C u_c^2(t) = \dfrac{1}{2} C \dfrac{I_{max}^2}{C^2\omega_0^2}\sin^2(\omega_0 t) \Rightarrow \boxed{W_m = \dfrac{I_{max}^2}{2C\omega_0^2}}$ (13)

e) D'où $\dfrac{W_{max}}{\Delta W} = \dfrac{\cancel{I_{max}^2}}{2C\omega_0^2} \times \dfrac{\omega_0}{\pi R \cancel{I_{max}^2}} = \dfrac{1}{2\pi R C\omega_0} \overset{(2)}{=} \dfrac{1}{2\pi Q}$ $\Rightarrow \boxed{Q = 2\pi \dfrac{W_{max}}{\Delta W}}$ (14)

Partie 2 : Décongélation d'un aliment (E3A – PC – 2013)

C/ Décongélation « classique »

C1



Soit $dU = \delta Q$ avec $\begin{cases} dU = [u(t+dt) - u(t)]\rho d\tau = \rho \dfrac{\partial u}{\partial t} \cdot dt\, d\tau \\ \delta Q = [j(x) - j(x+dx)] S\, dt = -\dfrac{\partial j}{\partial x} S\, dx\, dt \end{cases}$

d'où $\rho \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial j}{\partial x}$

Or $\begin{cases} du = c\, dT \\ \vec{j} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x \end{cases} \Rightarrow \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\frac{\lambda_{th}}{\rho c_{th}}}_{D_{th}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{d'où } D_{th} = \frac{\lambda_{th}}{\rho c_{th}}} \quad (1)$$

C.2 Comme $T(L,t) = T_{ext} \Rightarrow f(L)g(t) = 0$

$\Rightarrow \sin(\mu L) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\mu = n\pi/L \text{ où } n \in \mathbb{N}}$

C.3 Soit $T(x,t) = T_{ext} + f(x)g(t)$ d'où en injectant dans (1) :

$$g'(t) f(x) = D_{th} \cdot g(t) f''(x)$$

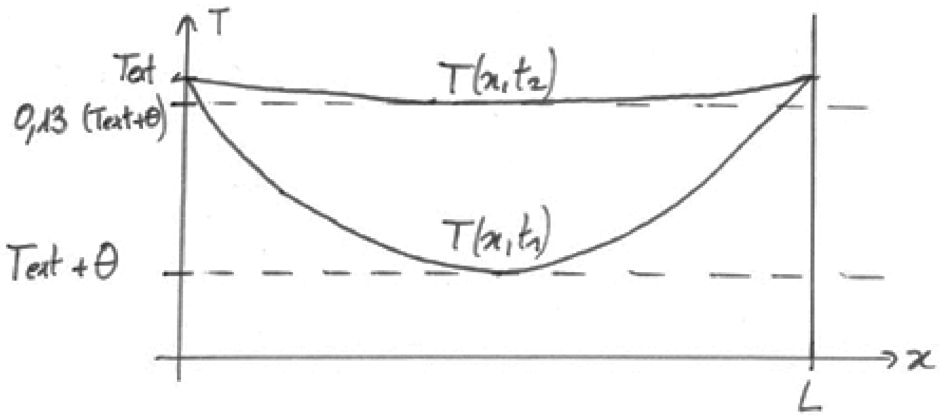
$$\Leftrightarrow g'(t) \cdot \sin(\mu x) = -D_{th}\mu^2 g(t) \sin(\mu x)$$

$$\Leftrightarrow g'(t) + D_{th}\mu^2 g(t) = 0$$

$$\Rightarrow g(t) = \theta \, e^{-D_{th}\mu^2 t}$$

Donc $\boxed{T(x,t) = T_{ext} + \theta \sin(\mu x) e^{vt} \text{ où } v = -D_{th} \cdot \mu^2}$

(C.4) On a $e^{vt_2} = 0{,}13$ d'où :



(C.5) La température tend à s'homogénéiser avec le temps à Text.

- La courbe à t_1 n'est pas satisfaisante car le centre n'est pas décongelé.
- — " à $t_2 = 5h$ montre que l'aliment semble décongelé

(C.6) • Posons : $\tau_m = \dfrac{1}{V_m} = \dfrac{1}{D_{th} \cdot \mu_m^2}$

$$\Leftrightarrow \tau_m = \frac{L^2}{D_{th} \cdot m^2 \cdot \pi^2}$$

Le temps le plus long est $\tau_1 = \dfrac{L^2}{D_{th} \cdot \pi^2} = 2^h30min$

- On peut donc supposer que l'élément sera entièrement décongelé pour un temps $\boxed{\Delta t = 5\tau_1 = 12^h30min}$

(C.7) Par une analyse en ordre de grandeur de (1) : $D_{th} = L^2/\tau'$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tau' = L^2/D_{th} \sim 24^h30min}$$

(D) - Décongélation par micro-ondes

(D.1) Comme le GPM qui voit sa capacité thermique molaire passait de $C_{vm} = 3/2 R$ à $5/2 R$ quand des degrés de liberté se débloquent, le métal voit sa C_{th} augmenter brusquement à T' certainement pour les mêmes raisons.

(D.2) Il faut passer de T_{ini} à T' d'où :

$$Q_1 = m c_{th,A} \Delta T$$

$$\Leftrightarrow Q_1 = c_{th,A} \rho L S (T' - T_{ini})$$

Puis de T' à T_{fin} : $Q_2 = c_{th,B} \rho L S (T_{fin} - T')$

Donc $\boxed{Q = \rho L S \left[c_{th,A}(T' - T_{ini}) + c_{th,B}(T_{fin} - T') \right]}$

(D.3) Il faut fournir une chaleur Q avec une puissance $2P_0$ donc on peut écrire

$$2P_0 \Delta t = Q$$

$$\Leftrightarrow \Delta t = \frac{Q}{2P_0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\rho L S \left[c_{th,A}[T' - T_{ini}] + c_{th,B}(T_{fin} - T') \right]}{2P_0}}$$

$$= 2000\,s \text{ ou } 34\,min$$

Cela n'est qu'une estimation car on suppose que la puissance apportée se répartit correctement dans l'aliment pour que la température soit homogène à la fin, en réalité les bords seront forcément plus chauds.

(D.4) 1ère tranche : D'après l'énoncé en $x = 0$: P_0 ; en $x = L/5$: $P_0 e^{-\alpha L/5}$ $\Rightarrow P_1 = P_0 - P_0 e^{-\alpha L/5}$

Donc $\boxed{\frac{P_1}{P_0} = 1 - e^{\alpha L/5} \sim 0{,}63}$

De proche en proche : $\begin{cases} \dfrac{P_2}{P_0} = e^{-\alpha L/5} - e^{-2\alpha L/5} \simeq \underline{0{,}23} \\ \dfrac{P_3}{P_0} = e^{-2\alpha L/5} - e^{-3\alpha L/5} \simeq \underline{0{,}086} \\ \dfrac{P_4}{P_0} = e^{-3\alpha L/5} - e^{-4\alpha L/5} \simeq \underline{0{,}031} \\ P_5/P_0 = e^{-4\alpha L/5} - e^{-\alpha L} \simeq \underline{0{,}012} \end{cases}$

Le problème étant symétrique : $\dfrac{P_1'}{2P_0} = \dfrac{0{,}63+0{,}012}{2} \simeq \underline{0{,}32}$

c'est la même valeur pour P_5'/P_0

Et : $\begin{cases} \dfrac{P_2'}{2P_0} = \dfrac{P_4'}{2P_0} = \dfrac{0{,}23+0{,}031}{2} = \underline{\underline{0{,}13}} \\ \dfrac{P_3'}{2P_0} = \underline{\underline{0{,}086}} \end{cases}$

• Pour chauffer la tranche de 1 à T' il faut apporter la chaleur :

$$Q_{01} = c_{th,A}\,\rho\,L/5\,S\,(T'-T_{ini})$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t_1 = \frac{c_{th,A}\,\rho L S\,(T'-T_{ini})/5}{2P_0 \times 0{,}32}} = \underline{8\,min}$$

• La tranche 5 est aussi à T' par symétrie. Les autres tranches sont en dessous T'.

t.q : $\begin{cases} T_2' = T_4' = T_{ini} + \dfrac{P_2'\Delta t_1}{c_{th,A}\,\rho L/5 . S} = \boxed{260\,K \text{ ou } -13°C = T_2' = T_4'} \\ T_3' = T_{ini} + \dfrac{P_3'\Delta t_1}{c_{th,A}\,\rho L S/5} = \boxed{258\,K \text{ ou } -15°C = T_3'} \end{cases}$

D.5

On fait les mêmes calculs avec $\alpha_B = 100\,m^{-1}$: • $\dfrac{P_1''}{2P_0} = \dfrac{P_5''}{2P_0} = \dfrac{0{,}98+10^{-7}}{2} = \underline{\underline{0{,}49}}$

• $P_2''/2P_0 = P_4''/2P_0 = \dfrac{0{,}018+6.10^{-6}}{2} = 0{,}0090$

• $P_3''/2P_0 = 0{,}00033.$

Dans l'état B l'énergie pénètre mal dans l'aliment ; 98% est absorbé par les 2 tranches latérales. Il faudra beaucoup de temps pour que la tranche centrale passe à T_{fin}.

D6 Dans une pièce "très" froide les tranches latérales perdent de la chaleur par transfert thermique ce qui permet de contrebalancer l'excès de puissance qu'elles reçoivent et ainsi d'assurer une meilleure homogénéité de la température de l'aliment.