

Physique : DM1

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

I – Thermodynamique du cœur

Le cœur est un organe composé de quatre chambres : deux ventricules et deux oreillettes. Un ensemble oreillette-ventricule fonctionne comme une pompe : une oreillette collecte le sang en provenance d'une partie du corps et l'envoie vers un ventricule à travers une valve d'entrée, puis le ventricule envoie ce sang vers une autre partie du corps à travers une valve de sortie. L'ensemble oreillette-ventricule **droit** reçoit du sang provenant des organes et l'envoie vers les poumons pour se recharger en dioxygène (on parle de circulation **pulmonaire**), alors que l'oreillette-ventricule **gauche** reçoit du sang en provenance des poumons et l'envoie vers les autres organes pour les approvisionner en dioxygène (on parle de circulation **systemique**). Le schéma ci-contre représente cette circulation.

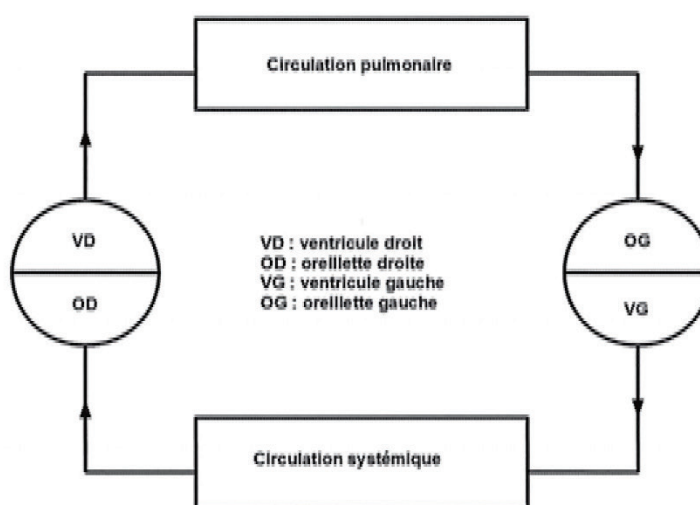


Figure 11

Dans la suite du problème, nous ne considérerons que des valeurs moyennées au cours du temps et les flux sanguins seront donc considérés comme égaux et constants.

On appelle systole une phase de contraction du cœur et diastole une phase de relâchement.

On modélise le cœur comme une machine thermique fonctionnant comme un moteur.

F / Étude du travail fourni par le cœur

Le cœur fournit le travail nécessaire pour pomper le sang à travers le réseau sanguin. Ce travail se décompose en deux parties : le travail fourni par le ventricule droit et le travail fourni par le ventricule gauche (les travaux fournis par les oreillettes sont négligés). On s'intéresse d'abord au travail fourni par le ventricule gauche en se basant sur le diagramme de Clapeyron donné à la question F2. La pression est donnée en mmHg (millimètre de mercure, élément de symbole Hg), unité de pression très utilisée en médecine. On pourra utiliser la conversion approchée suivante : $1 \text{ mmHg} = 133 \text{ Pa}$ et l'annexe 4, pages 23, 24.

Ce cycle n'a pas été obtenu expérimentalement, c'est un cycle modèle (donc simplifié)

composé de deux segments verticaux aux volumes V_d et V_f , d'un segment horizontal à la pression P_{SS} (pression systémique à la systole) et d'un segment de droite affine. Les valeurs numériques sont des valeurs typiques : les valeurs mesurées peuvent nettement varier, notamment d'un individu à l'autre.

Lors d'un cycle on observe quatre phases, données ici dans le désordre

- le ventricule se remplit de sang en provenance de l'oreillette : phase R.
- le ventricule se vide d'une partie du sang, envoyé vers les organes : phase V.
- le ventricule se contracte, valves d'entrée et de sortie fermées : phase C.
- le ventricule se détend, valves d'entrée et de sortie fermées : phase D.

Comme on a tracé le diagramme de Clapeyron du ventricule gauche et non du sang, le travail fourni sur un cycle doit être négatif pour que le cœur soit moteur.

F.1 Quel est donc le sens de parcours du cycle ?

F.2 Attribuer chaque phase à une partie du diagramme de Clapeyron en justifiant succinctement.

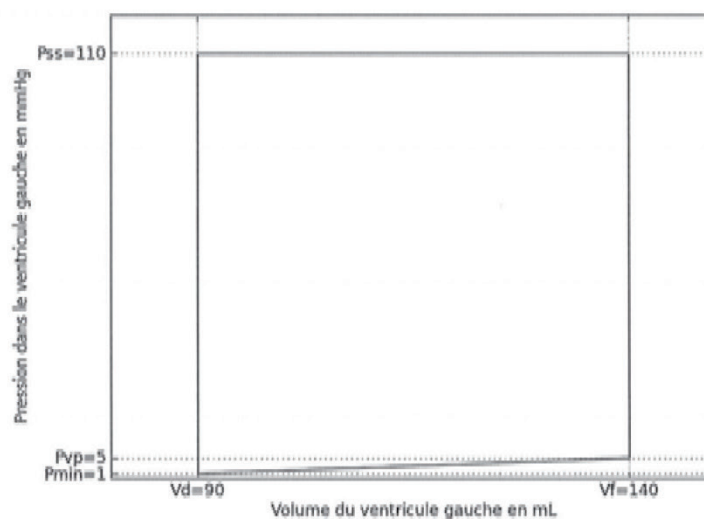


Figure 12

F.3 Déterminer l'expression littérale du travail fourni par le sang au ventricule gauche en fonction de P_{min} , P_{SS} , P_{VP} (pression veineuse pulmonaire) et $S = Vf - Vd$.

F.4 Justifier que l'on puisse approximer le travail fourni par le ventricule gauche au sang par l'expression littérale $W_g = SP_{SS}$. Que représente physiquement S ?

Le cycle du ventricule droit peut se modéliser de la même manière, seules les valeurs de

pression changent : la pression P_{PS} (pression pulmonaire à la systole) nécessaire pour faire circuler le sang vers les poumons est inférieure à P_{SS} , pression nécessaire pour faire circuler le sang vers le reste du corps. On notera donc $P_{PS} = \alpha P_{SS}$ où α est un facteur numérique inférieur à l'unité.

F.5 En déduire l'expression littérale du travail W_d fourni par le ventricule droit au sang en fonction de S , P_{SS} et α , sachant que l'approximation faite en **F.4** reste valable.

F.6 En notant f la fréquence cardiaque, donner l'expression littérale de la puissance mécanique fournie par le cœur en fonction de f , S , P_{SS} et α .

F.7 À l'aide des valeurs numériques proposées dans l'énoncé ou en annexe et de vos connaissances, proposer un ordre de grandeur de la puissance mécanique fournie par le cœur, ainsi qu'un ordre de grandeur de l'énergie mécanique fournie par le cœur en une journée. Commenter ces valeurs.

G / Rendement cardiaque

L'énergie nécessaire au fonctionnement du cœur est essentiellement fournie par des réactions d'oxydation de glucides. La quantité d'énergie produite dépend donc de la quantité de dioxygène consommée ; le cœur ne représente qu'une fraction de l'énergie totale dépensée par le corps et donc du dioxygène consommé. Dans la suite on considérera que le cœur consomme 14% du dioxygène utilisé par le corps.

G.1 Proposer une définition du rendement η du cœur puis en calculer une valeur numérique à l'aide des valeurs numériques proposées dans l'énoncé ou en annexe et de vos connaissances.

On propose de modéliser le cœur comme une machine thermique ditherme en contact avec une source froide (le milieu extérieur, de température $T_f = 20^\circ\text{C}$) et une source chaude de température T_c qui lui fournit l'énergie nécessaire sous forme de transfert thermique.

G.2 Montrer que le rendement d'une telle machine thermique est inférieur à une certaine valeur à exprimer en fonction de T_f et T_c . Dans quelle condition y aura-t-il égalité ?

G.3 Déduire de vos réponses aux questions **G.1** et **G.2** une valeur minimale de T_c . Commenter la pertinence du modèle proposé.

ANNEXE 4 :**Document 1 : Données hémodynamiques au repos et durant un pic d'exercice**

(traduit et adapté de Higginbotham M.B., Morris K.G., Williams R.S.; *Regulation of stroke volume during submaximal and maximal upright exercise in normal man. Circ Res. 58 1986:281-291.*)

Dans cet article de 1986, une étude a été réalisée sur une population de 24 mâles âgés de 20 à 50 ans et ne présentant aucun symptômes de maladie ; de nombreuses grandeurs ont été mesurées, le tableau suivant résume une partie des données sous la forme de la valeur moyenne obtenue \pm l'écart-type.

	Repos, couché sur le dos	Repos, debout	Pic d'exercice
Ω (en L.min ⁻¹)	0,31 \pm 0,06	0,33 \pm 0,06	2,55 \pm 0,31
Fréquence cardiaque (en battements par minute)	64 \pm 12	73 \pm 12	167 \pm 16
P _{SS} (en mmHg)	130 \pm 14	136 \pm 12	220 \pm 24
P _{PS} (en mmHg)	20 \pm 4	15 \pm 4	34 \pm 6

Document 2 : Production d'énergie chimique

(traduit et adapté de <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/biology/metab.html>)

Le métabolisme est un terme générique pour toutes les réactions chimiques qui décomposent ou « brûlent » des aliments pour fournir l'énergie nécessaire au fonctionnement d'un organisme. Le mot « brûler » est utilisé délibérément car l'énergie fournie par un aliment dans le processus métabolique humain est comparable à l'énergie obtenue lors d'une vraie combustion. L'énergie disponible grâce à un aliment est usuellement mesurée en calories diététiques et la contenance en calories d'un aliment peut tout à fait être obtenue en le brûlant dans une atmosphère d'oxygène pur dans un calorimètre pour mesurer l'énergie fournie par cette combustion.

Tout comme une combustion ordinaire, le métabolisme d'un aliment requiert un apport en oxygène et produit du dioxyde de carbone. Pour différents aliments on peut fournir des valeurs de l'énergie typiquement produite, de la quantité d'oxygène requise et de la quantité attendue de dioxyde de carbone relâchée. Voici quelques valeurs tirées de *Nelson, Philip, Biological Physics, W. H. Freeman, 2004.*

Aliment	Énergie produite (en kJ par gramme d'aliment)	Oxygène requis (en litre par gramme d'aliment)	CO ₂ produit (en litre par gramme d'aliment)
Glucide	17	0,81	0,81
Lipide	39	1,96	1,39
Protéine	17	0,94	0,75
Alcool	30	1,46	0,97

Notons que la quantité d'énergie produite par les quatre types d'aliments est globalement proportionnelle à la quantité d'oxygène requise, ainsi le taux métabolique peut être mesuré par le taux de consommation de l'oxygène.

II - Modélisation d'une machine frigorifique

Un des enjeux majeurs de la grande distribution, de l'industrie et du tertiaire dans les années à venir sera de diviser sa consommation d'énergie de moitié. La production frigorifique d'un magasin représente entre 40 et 60 % de la consommation électrique (selon la superficie). La **figure 1** montre une implantation. La production de froid doit être efficace malgré toutes les perturbations d'ouverture et de fermeture des portes des congélateurs.

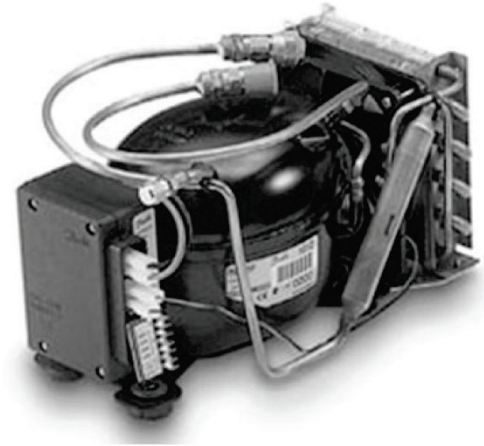


Figure 1 – Photographies d'un magasin de produits surgelés et d'un compresseur

Aujourd'hui, de nouveaux types de machines permettent d'adapter la puissance du compresseur aux besoins de l'installation frigorifique en effectuant un réglage en continu de la vitesse du compresseur. Ce type d'installation permet de gagner jusqu'à 25 % de consommation d'énergie. Le sujet porte sur la modélisation et la justification des modèles de ces nouvelles machines.

Le sujet comporte 4 parties indépendantes avec pour objectif de :

- comprendre un modèle simple du cycle frigorifique et de pointer les paramètres affectant l'efficacité thermodynamique de la machine. Le contrôle en vitesse du compresseur permet de commander la puissance thermique soutirée à la source froide (nommée « puissance frigorifique ») ;
- trouver les fréquences propres de vibration du compresseur afin d'éviter de se placer à une vitesse critique lors de la variation de vitesse. En effet, une vibration trop grande engendrerait du bruit désagréable pour les clients ;
- mettre en évidence expérimentalement les inconvénients d'une utilisation du compresseur sans dispositif de commande de la vitesse de rotation (pic de courant au démarrage et ses conséquences éventuelles, facteur de puissance dépendant de la charge) ;
- modéliser et justifier la commande prédictive de l'asservissement en température. La commande prédictive est comparée à la commande Proportionnelle Intégrale qui s'avère moins performante pour ce type d'utilisation.

Remarque : dans l'énoncé du sujet, une égalité notée $\stackrel{\text{def}}{=}$ représente une définition.

I - Modélisation du cycle frigorifique

L'objectif de cette partie est de s'appropriier un modèle thermodynamique simple du fonctionnement de la machine et de pointer les facteurs affectant son efficacité.

La machine frigorifique est constituée de quatre organes, représentés sur la **figure 2**.

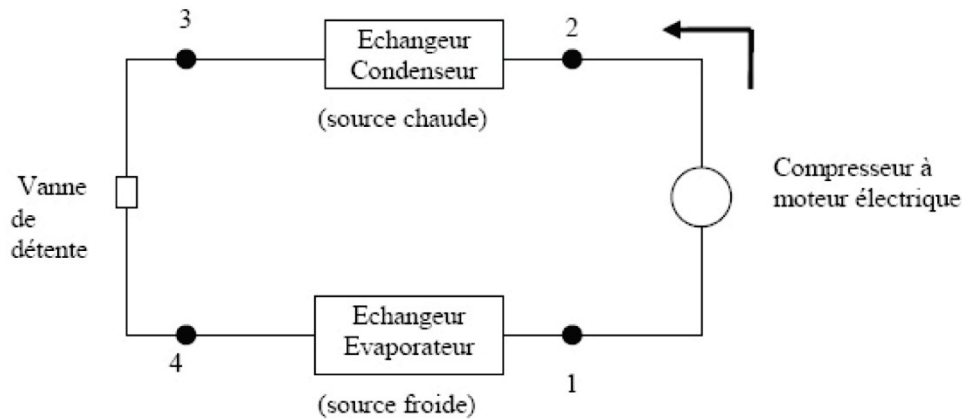


Figure 2 – Les quatre organes de la machine frigorifique

Le fluide frigorigène circulant entre les différents organes est le 1,1,1,2-Tétrafluoroéthane, noté « R134a » par la suite.

La **figure 3** (page suivante) représente en coordonnées (pression P , enthalpie massique h), les transformations subies par ce fluide au cours d'un cycle :

- 1 → 2 : compression isentropique du fluide par le compresseur ;
- 2 → 3 : échange thermique isobare à haute pression P_{hp} dans le condenseur ;
- 3 → 4 : détente adiabatique dans le détendeur ;
- 4 → 1 : échange thermique isobare à basse pression P_{bp} dans l'évaporateur.

En plus du cycle, d'autres courbes apparaissent sur le diagramme :

- la courbe de saturation liquide-vapeur (courbe noire en forme de cloche) ;
- un réseau d'isothermes (courbes en trait plein, tracées à $T = C^{te}$) ;
- un réseau d'isentropiques (courbes en pointillés, tracées à entropie massiques $s = C^{te}$) ;
- un réseau d'iso-titres en vapeur à l'intérieur de la courbe de saturation (courbes en pointillés tracées à l'intérieur de la courbe de saturation, à titre en vapeur $x = C^{te}$).

À l'intérieur de la courbe de saturation, le fluide est diphasé liquide-vapeur. À gauche de la courbe de saturation, le fluide est liquide. À droite, le fluide est gazeux.

Remarque : seul le début des courbes isothermes est représenté dans les domaines situés à gauche et à l'intérieur de la courbe de saturation. Cela permet d'alléger le diagramme, les isothermes étant horizontales à l'intérieur de la courbe de saturation et verticales à sa gauche.

Document - Quelques propriétés du fluide R134a

- Masse volumique aux différents points du cycle (en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$) :

$$\mu_1 = 4,2 \quad \mu_2 = 45,5 \quad \mu_3 = 1,3 \cdot 10^3 \quad \mu_4 = 12,5$$

- Ordre de grandeur de capacités thermiques massiques du R134a : $c_v \sim c_p \sim 1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
(ordres de grandeur valables pour la phase liquide et pour la phase vapeur)

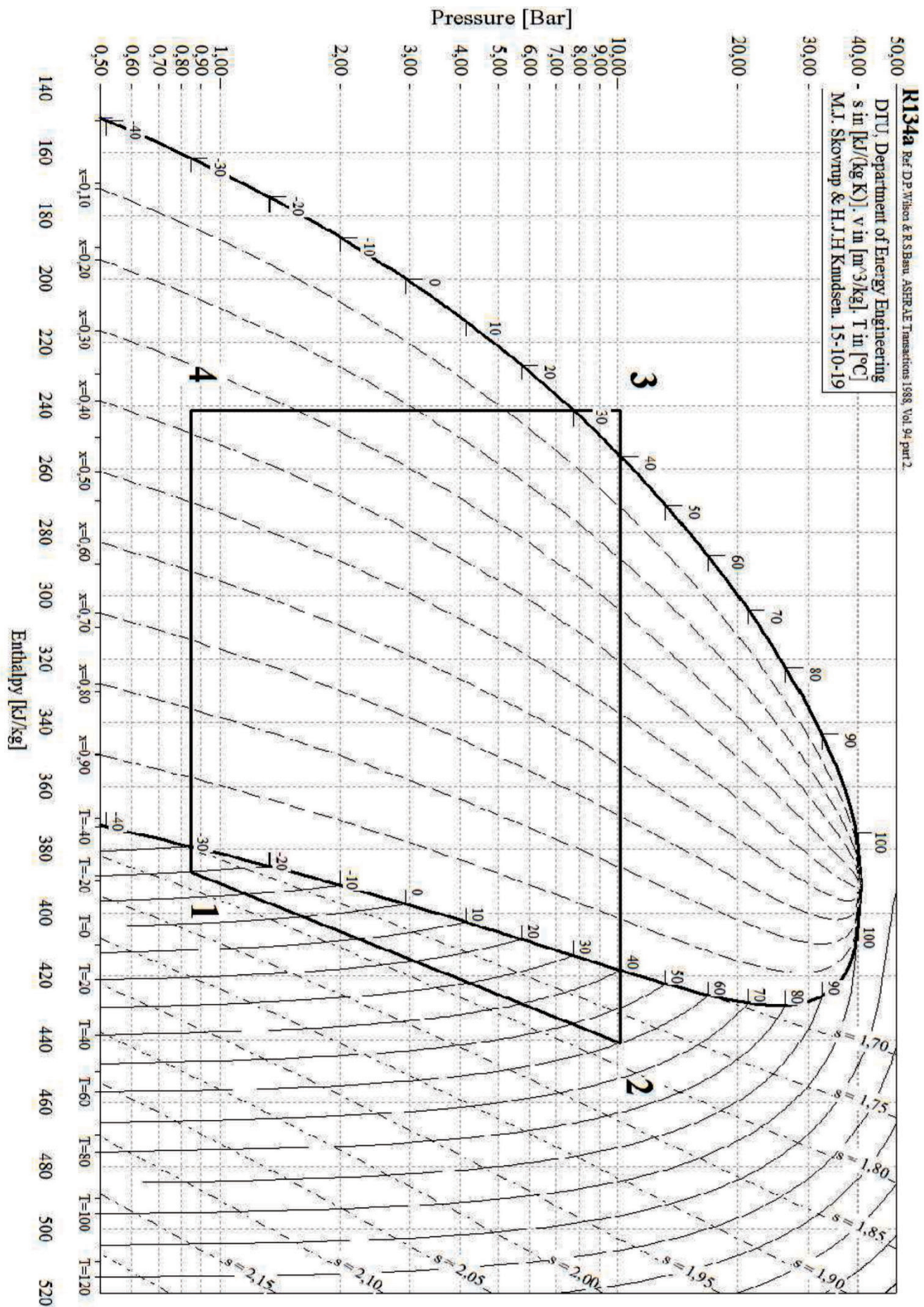


Figure 3 – Cycle subi par le fluide R134a, en coordonnées Pression – Enthalpie massique (tracé avec le logiciel CoolPack)

On rappelle l'expression du premier principe de la thermodynamique en écoulement stationnaire appliqué à un système ouvert

$$\Delta \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) = w + q \quad (1)$$

- $\Delta h \stackrel{\text{def}}{=} h_{\text{sortie}} - h_{\text{entrée}}$ est la variation d'enthalpie massique entre l'entrée et la sortie ;
- $\Delta \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$ est la variation d'énergie cinétique massique du fluide entre l'entrée et la sortie ;
- $\Delta(gz)$ est la variation d'énergie potentielle massique de pesanteur entre l'entrée et la sortie ;
- w est le travail massique utile, apporté au fluide par toute pièce mobile en contact avec lui ;
- q est le transfert thermique massique reçu par le fluide.

On rappelle aussi l'expression du deuxième principe de la thermodynamique en écoulement stationnaire

$$\Delta s = s_e + s_c \quad (2)$$

- $\Delta s \stackrel{\text{def}}{=} s_{\text{sortie}} - s_{\text{entrée}}$ est la variation d'entropie massique entre l'entrée et la sortie ;
- s_e est l'entropie massique échangée et s_c est l'entropie massique créée.

On rappelle enfin la définition du titre en vapeur d'un corps diphasé liquide-vapeur $x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_{\text{vap}}}{m_{\text{liq}} + m_{\text{vap}}}$.

Notations : les grandeurs associées à l'état 1 du cycle sont indicées "1". Les quantités échangées entre le fluide et l'extérieur au cours de la transformation $1 \rightarrow 2$ sont indicées par "12".

Exemples : enthalpie massique h_1 et travail massique utile w_{12} .

On peut en déduire les autres notations.

I.1 - Questions préalables sur le principe de fonctionnement d'une machine frigorifique

Le principe d'une machine frigorifique ditherme est le suivant : « Un fluide frigorigène circule entre les différents organes de la machine. Mis en mouvement par le compresseur, ce fluide refroidit la source froide et réchauffe la source chaude. »

Q1. Donner et justifier les signes des quantités algébriques suivantes : w_{12} , q_{23} et q_{41} .

Q2. Lors de la traversée du condenseur, le fluide frigorigène a-t-il une température supérieure ou inférieure à celle de la source chaude ? Lors de la traversée de l'évaporateur, le fluide a-t-il une température supérieure ou inférieure à celle de la source froide ?

Q3. Si l'on considère le réfrigérateur que l'on possède à la maison, où se situe la source froide ? Et la source chaude ?

I.2 - Questions préalables sur l'expression utile du premier principe

Q4. On considère une section de l'écoulement. En supposant les champs uniformes sur cette section, exprimer le débit de masse en fonction notamment de la vitesse d'écoulement.

Q5. D'après les données, on remarque que la masse volumique du fluide est minimale juste avant compression (état 1). En admettant que la section des canalisations est approximativement uniforme au cours du cycle, en déduire qu'en régime permanent la vitesse du fluide est maximale juste avant compression (état 1).

- Q6.** La vitesse maximale au cours du cycle est de l'ordre de $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. En prenant comme référence la variation d'enthalpie massique au cours de la compression, en déduire que les variations d'énergie cinétique peuvent être négligées dans l'expression du premier principe de la thermodynamique.
- Q7.** De la même façon, justifier que le terme (gz) peut aussi être retiré de l'expression du premier principe de la thermodynamique.

On utilisera par la suite l'expression simplifiée suivante du 1^{er} principe en écoulement stationnaire :

$$\Delta h = w + q . \quad (3)$$

I.3 - Lecture du diagramme et intérêt de la vaporisation

Pour ne pas dégrader le compresseur, il est crucial que le fluide caloporteur soit purement gazeux à l'entrée de cet organe, toute goutte de liquide entraînant son usure prématurée. C'est pourquoi le fluide à la sortie de l'évaporateur est « *surchauffé* » : sa température T_1 dans l'état 1 est supérieure à celle de la vapeur saturante $T_{\text{sat}}(P_{\text{bp}})$. La surchauffe est une marge de sécurité qui permet de garantir que le fluide sera bien gazeux à l'entrée du compresseur, même si le fonctionnement de la machine est perturbé.

- Q8.** Déterminer graphiquement la valeur numérique de la *surchauffe* : $T_1 - T_{\text{sat}}(P_{\text{bp}})$.
- Q9.** Le fluide à la sortie du condenseur (état 3) est dit « sous-refroidi » : sa température de sortie T_3 est plus basse que la température de vapeur saturante $T_{\text{sat}}(P_{\text{hp}})$. Déterminer graphiquement la valeur numérique du *sous-refroidissement* : $T_3 - T_{\text{sat}}(P_{\text{hp}})$.
- Q10.** La transformation $3 \rightarrow 4$ est une détente de Joule-Thomson. Le détendeur peut être assimilé à un simple étranglement local de la conduite. Il n'y a pas de pièce mobile et les parois sont calorifugées. Justifier que cette étape est isenthalpique.

L'enthalpie massique d'un corps pur est définie par :

$$h \stackrel{\text{def}}{=} u(T) + \frac{P}{\mu}$$

où $u(T)$ est l'énergie interne massique, supposée indépendante de la pression.

- Q11.** Dans la zone située à gauche de la courbe de saturation, les isothermes sont verticales, donc confondues avec les isenthalpiques. Le R134a étant liquide dans cette zone, cela correspond à l'approximation usuelle stipulant que $\Delta h \cong c_p \Delta T$ pour une phase condensée. On souhaite ici vérifier la validité de cette approximation sur la première phase de la détente du R134a, avant vaporisation (du point 3 jusqu'à la courbe de saturation). Déterminer numériquement la variation de température sur cette première phase et vérifier qu'une isenthalpique est effectivement assimilable à une isotherme.

Q12. La suite de la détente provoque une vaporisation du R134a.

Etablir qu'au cours de cette vaporisation, la variation d'enthalpie massique peut s'écrire :

$$\Delta h = L_{\text{vap}}(T_4)\Delta x_{\text{vap}} + c_p(T_4 - T_3) \quad (4)$$

$L_{\text{vap}}(T_4) \stackrel{\text{def}}{=} h_{\text{vap}}(T_4) - h_{\text{liq}}(T_4)$ étant la chaleur latente de vaporisation à la température T_4 et Δx_{vap} étant la variation du titre en vapeur au cours de la vaporisation. On justifiera clairement la démarche utilisée.

Q13. Mesurer graphiquement $L_{\text{vap}}(T_4)$. En déduire par le calcul une valeur numérique de la variation de température ($T_4 - T_3$) attendue lors de la transformation $3 \rightarrow 4$. Cette valeur est-elle du même ordre de grandeur que celle lue sur le diagramme ?

Conclusion : la vaporisation, provoquée mécaniquement, génère une chute de température du fluide frigorigène permettant d'orienter le transfert thermique dans le sens souhaité lors de son passage dans l'évaporateur : de la source froide vers le fluide.

I.4 - Hypothèses simplificatrices et efficacité de la machine

Q14. Quel phénomène faut-il négliger pour modéliser les échanges thermiques considérés comme étant isobares ?

Q15. Quelles hypothèses faut-il faire pour modéliser la compression comme étant isentropique ?

On rappelle la définition qualitative de l'efficacité d'une machine thermique :

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{\text{énergie massique utile}}{\text{énergie massique coûteuse}} \right|.$$

Q16. À quoi correspondent ces deux termes énergétiques dans le cas de la machine frigorifique et identifier dans le cycle la transformation associée à chacun. Déterminer leur valeur numérique par lecture graphique sur le diagramme (P, h). En déduire la valeur de l'efficacité.

Q17. En appliquant à 1 kg de fluide frigorigène les deux principes de la thermodynamique sur un cycle réversible, établir l'expression de l'efficacité de Carnot en fonction des températures de la source froide et de la source chaude ($T_{\text{chaud}} = 20 \text{ °C}$ et $T_{\text{froid}} = -15 \text{ °C}$). Faire l'application numérique et comparer cette valeur à l'efficacité calculée dans le cadre du modèle étudié. Le résultat de cette comparaison était-il prévisible ? Quelles sont les sources d'irréversibilité du cycle avec lequel a été modélisée la machine frigorifique ?

Q18. Aucune transformation réelle n'est réversible. La compression réelle qui amène le fluide de P_{bp} à P_{hp} est nécessairement irréversible, contrairement à l'hypothèse simplificatrice de notre modèle. Proposer une modification simple de l'allure de la courbe $1 \rightarrow 2$ du diagramme (P, h) pour tenir compte de l'irréversibilité. En déduire graphiquement une conséquence sur l'efficacité. (L'explication sera faite sur la copie.)

Q19. Expliquer en quoi le sous-refroidissement permet d'augmenter l'efficacité de la machine, tous les autres paramètres étant gardés identiques.