Physique : DS6

Physique des ondes et particules associées (CCP – MP – 2016)

I.1 Photon : $\boxed{\vec{p} = \hbar\vec{k} \text{ et } E = \hbar\omega}$

I.2 Soit $E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{visible} \sim 600\,nm \\ \lambda_{RX} \sim 10\,nm \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} E_{visible} = 3{,}3.10^{-19}\,J = 2{,}1\,eV \\ E_{RX} = 2.10^{-15}\,J = 10\,keV \end{array}}$

I.3 On définit : $\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \Rightarrow p = \hbar k$

$= \hbar . \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$ d'où $\boxed{p = \frac{nh}{\lambda_0}}$

I.4 Pour une onde de matière : $\boxed{\vec{k} = \vec{p}/\hbar \text{ et } \omega = E/\hbar}$

I.5 a) Conservation de l'énergie : $\frac{p^2}{2m_e} - eV_F = 0 - eV_i$

$\Leftrightarrow \frac{p^2}{2m_e} = e(V_F - V_i) = eU$

$\Leftrightarrow p = \sqrt{2m_e . eU}$

Or $p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}}}$

b) Soit $\lambda_{RX} = 10\,nm \Rightarrow \boxed{U = \frac{h^2}{2m_e . e\lambda^2}} = \underline{150\,V}$

I.6 Agitation thermique $v = \sqrt{\frac{3k_BT}{m_e}} \Rightarrow p = \sqrt{3k_BTm_e}$

Si $p = \frac{h}{\lambda_{dB}} \Rightarrow \lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{3k_BTm_e}} = \underline{6\,nm}$

Donc $\lambda_{dB} \gg a$ c'est à dire que <u>l'électron doit être considéré comme quantique</u>

I.7 Bohr (1910), Einstein ou Planck (1905), Schrödinger 1920, Heisenberg 1930 Feynmann (1950), Cohen-Tannoudji (1990), Carnat Mlynek (1995)...

1.8 a) D'après De Broglie : $\vec{q} = \hbar \vec{k}$
or $\vec{V} = \omega/k \, \vec{u}$ $\Rightarrow \vec{q} = \frac{\hbar\omega}{V}\vec{u}$

or $\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \boxed{\vec{q} = \frac{h\nu}{V}\vec{u}}$

b) Le p signifie "phonon" d'où $\boxed{e_p = h\nu}$

c) A.N : $\boxed{\begin{cases} q = 4{,}4.10^{-34}\ \text{kg m s}^{-1} \\ e_q = 4{,}1.10^{-12}\ \text{eV} \end{cases}}$

d) Pour un photon t.q $\lambda = 600\,\text{nm}$ on obtient : $p = \frac{h}{\lambda} = \underline{1{,}1.10^{-27}\ \text{kgms}^{-1}}$

d'où : $\begin{cases} p_p \ll p_{photon} \\ e_p \ll e_{photon} \end{cases}$

1.9 Soit le système isolé : $\frac{d\vec{p}_{TOT}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{p}_{TOT} = \vec{cste}}$

de m̂ pour l'energie totale : $\boxed{E_{TOT} = cste}$

1.10 a) Après le choc le phonon a disparu d'où : $h\nu_i + e_p = h\nu_{em}^+$

$\Leftrightarrow \Delta\nu^+ = \frac{e_p}{h}$

or $e_p = h\nu = qV \Rightarrow \Delta\nu^+ = qV/h$

D'après l'énoncé : $q = \frac{2nh}{\lambda_{inc}}\sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow \boxed{\Delta\nu^+ = \frac{2nV}{\lambda_{inc}}\sin(\theta/2)}$

b) i) A.N : $\Delta\nu^+ = \frac{2\times 4{,}3\times 1525}{0{,}53.10^{-6}}\sin(45°) = \underline{5{,}4.10^{9}\,\text{Hz}}$

ii) Soit $\lambda = \frac{c}{\nu}$ d'où $\ln\lambda = \ln c - \ln\nu \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta\nu}{\nu}$

donc $\boxed{\frac{\Delta\lambda^+}{\lambda_{inc}} = -\frac{\Delta\nu^+}{c}.\lambda_{inc}}$ car $\nu_{inc} = \frac{c}{\lambda_{inc}}$

$\Rightarrow \frac{\Delta\lambda^+}{\lambda_{inc}} = \underline{-9{,}5.10^{-6}}$

c) Pour un spectromètre à réseau $\Delta\lambda_{sodium} = 0,6\,mm$ est difficilement séparé

donc $\Delta\lambda^+ = 9,5.10^{-6} \times 0,53.10^{-6}$
$= 5.10^{-12}\,m \sim 0,005\,mm$

Un spectromètre à réseau ne peut déceler ce décalage.

II.1) En incidence normale $\boxed{\Delta L = 2d}$

II.2) Pour obtenir des interférences constructives, les rayons émergents doivent être en phase.

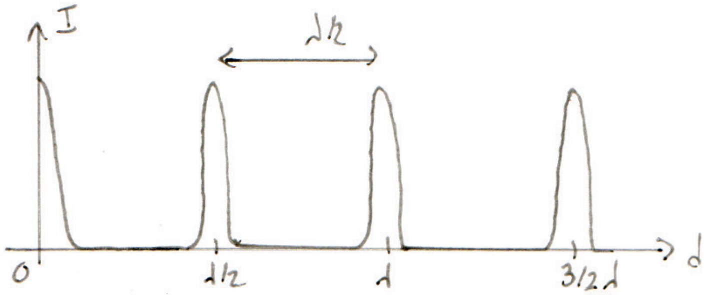
$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}.\Delta L = 2p\pi \text{ où } p \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta L = p\lambda \text{ où } p \in \mathbb{Z}}$$

II.3) Or $\Delta L = 2d \Rightarrow \boxed{p = \frac{2d}{\lambda}}$

II.4) a) D'où $\boxed{d_p = p.\frac{\lambda}{2}}$

On retrouve les intensités typiques des interférences à N ondes comme l'IPF.



b) On a $\boxed{\delta = \frac{\lambda}{2}}$

II.5) On a $\nu = c/\lambda$ d'où : $\boxed{\lambda^- > \lambda_{inc} > \lambda^+ \text{ et } \nu^- < \nu_{inc} < \nu^+}$

II.6) D'après II 3) : $\boxed{p = \frac{2d_0}{\lambda_{inc}}}$

II.7) a) Ordre $p+1$: $d = d_0 + \frac{\lambda_{inc}}{2}$

— $p-1$: $d = d_0 - \frac{\lambda_{inc}}{2}$

b) Soit $\boxed{\begin{cases} d_+ = d_0 - \mathcal{E} = p\lambda^+/2 \\ \text{et} \\ d_- = d_0 + \mathcal{E} = p\,\lambda^-/2 \end{cases}}$ car $\lambda^+ < \lambda^-$

c) Soit $Z = (\Delta r^+) \cdot \frac{\delta}{\mathcal{E}}$

a $\begin{cases} d_0 - \mathcal{E} = p\,d^+/2 \\ d_0 = p\,\frac{d_{inc}}{2} \\ \delta = \frac{d_{inc}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E} = p/2\,(d_{inc} - d^+) \\ \delta = \frac{d_{inc}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\delta}{\mathcal{E}} = \frac{d_{inc}}{p(d_{inc} - d^+)}$

Donc $Z = (\Delta r^+) \cdot \frac{d_{inc}}{p(d_{inc} - d^+)}$ avec $p = \frac{2d_0}{d_{inc}}$.

$\Rightarrow Z = \frac{\Delta r^+ \cdot d_{inc}^2}{2d_0(d_{inc} - d^+)}$

or $\Delta r^+ = r^+ - r_{inc} = \frac{c}{d^+} - \frac{c}{d_{inc}} = c\,\frac{d_{inc} - d^+}{d_{inc} \cdot d^+} \simeq c\,\frac{d_{inc} - d^+}{d_{inc}^2}$

$\Rightarrow \boxed{Z = \frac{c}{2d_0}}$

• Si $\Delta r^+ > Z$ alors $\mathcal{E} > \delta$ il y a donc recouvrement des ordres pour les $\neq$ fréquences.

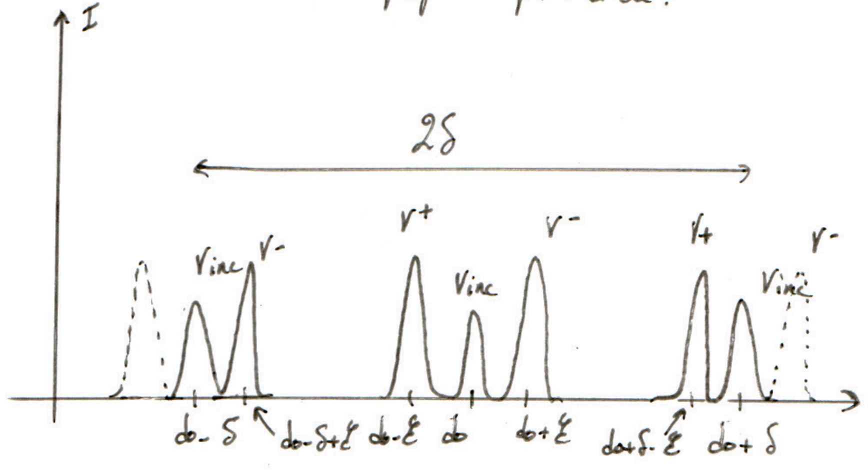
Il faut donc $\underline{\Delta r^+ < Z}$

$\Leftrightarrow \Delta r^+ < c/2d_0$

$\Leftrightarrow d_0 < \frac{c}{2\Delta r^+} = 2{,}8\,cm$

$\boxed{\text{La valeur } d_0 = 1{,}25\,cm \text{ convient}}$

d) Sur un intervalle de 2δ, il y a les ordres p, $p-1$ et $p+1$ d'où :



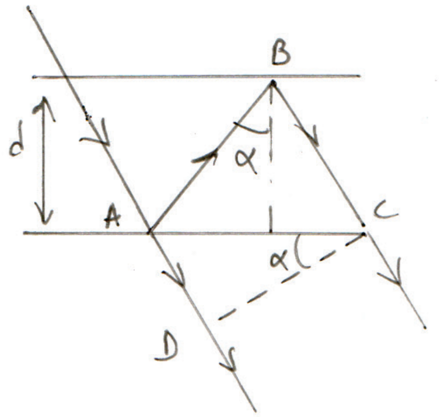
II.8 a) D'après l'énoncé les pics qui correspondent à ν_{inc} ont des intensités plus petites que ceux de ν^+ et ν^- donc les valeurs de $G = 0{,}89$ correspondent à ν_{inc}.

G	0,89	0,99	0,89	0,89	0,99	0,99	0,89
Décalage	0	5,4	9,6	15,0	21,4	25,6	30,0
Ordre	p-1	p-1	p	p	p	p+1	p+1
Fréquence	ν_{inc}	ν^+	ν^+	ν_{inc}	ν^-	ν^+	ν_{inc}

b) Soit $\Delta\nu^+ = \dfrac{2nV}{\lambda_{inc}} \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ avec $\theta = 90°$

$$\Rightarrow V = \frac{\Delta\nu^+ \cdot \lambda_{inc}}{n\sqrt{2}} = \underline{1400\,m\cdot s^{-1}}$$

II.9 a)



On retrouve le δ d'un IM en lame d'air t.q

$$\delta = 2(AB) - (AD)$$

$$= 2\,d/\cos\alpha - (AC)\sin\alpha = 2d/\cos\alpha - 2d\tan\alpha \cdot \sin\alpha$$

$$= \frac{2d}{\cos\alpha}\left(1 - \sin^2\alpha\right) = \boxed{2d\cos\alpha = \delta}$$

b) Entre deux rayons successifs on a 2 réflexions en plus et une différence de marche δ.

$$\Rightarrow a_2 = r^2 a e^{i\phi} = R a e^{i\phi}$$

$$\Rightarrow a_n = r^{2(n-1)} a e^{i(n-1)\phi} \longrightarrow \boxed{a_n = R^{n-1} e^{i(n-1)\phi} a}$$

(c) Or $a_{tot} = \sum_{1=n}^{N} a_n = a \sum_{n=1}^{N} \left(Re^{i\phi}\right)^{n-1}$

$$= a \, \frac{1-\left(Re^{i\phi}\right)^N}{1-Re^{i\phi}} \quad \text{avec } N \to \infty$$

d'où $\boxed{a_{tot} = \dfrac{a}{1-Re^{i\phi}}}$

(d) Cela équivaut à un IM en lame d'air $\Rightarrow$ on observe des anneaux

(e) Soit : $G(\alpha, d) = \left[1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \underbrace{\left(\frac{2\pi d \cos\alpha}{d_0}\right)}_{\gamma = \phi/2}\right]^{-1}$ t.q $\gamma = \frac{\pi\delta}{\lambda} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{\phi}{2}$

$\Rightarrow$ des pics d'intensité sont t.q $\gamma = p\pi$

$\Leftrightarrow \boxed{\phi = 2p\pi}$

(f) Soit $G(0,d) = \left[1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{2\pi d}{d_0}\right]^{-1}$ avec $R = 1-\varrho$ où $\varrho \ll 1$

$$\Rightarrow \boxed{G(0,d) = \frac{1}{1 + \frac{4}{\varrho^2} \sin^2\left(\frac{2\pi d}{d_0}\right)}}$$

II.10 (a) Le calcul de largeur à mi-hauteur a déjà été vu en électronique pour les calculs de bande passante.

(b) On a $d_0 = p\,\frac{\lambda_0}{2}$ et $\lambda_0 = 0{,}53\,\mu m \Rightarrow \boxed{p = \frac{2d_0}{\lambda_0}} = \underline{47604}$

(c) Soit $G(0,d) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{\varrho^2} \sin^2\left(\frac{2\pi d}{d_0}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{2\pi d}{d_0}\right) = \varrho^2/4$

Comme $\varrho \ll 1$ on a : $\left(\frac{2\pi d}{d_0}\right)^2 \simeq \frac{\varrho^2}{4} \Leftrightarrow d^2 = \frac{\varrho^2 d_0^2}{16\pi^2} \Rightarrow d = \pm \frac{d_0 \varrho}{4\pi}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta d = \frac{d_0 \varrho}{2\pi}}$$

d) Ordre p : $\lambda \Leftrightarrow d$ t.q $d = \frac{p}{2}.\lambda_0$

Ordre p : $\lambda+\Delta\lambda \Leftrightarrow d+\Delta d'$ t.q $d+\Delta d' = \frac{p}{2}(\lambda_0 + \Delta\lambda)$ $\Rightarrow \Delta d' = \frac{p}{2}\Delta\lambda$.

On sépare les 2 pics si $\Delta d' > \frac{\Delta d}{2}$ (et non $\frac{\Delta\lambda}{2}$ comme écrit dans l'énoncé)

$$\Rightarrow \frac{p}{2}\Delta\lambda > \frac{\lambda_0 \varepsilon}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\lambda > \frac{\lambda_0 \varepsilon}{2p\pi}}$$

e) D'après II.10.c, $\varepsilon \ll 1$ la largeur à mi-hauteur est très petite devant λ_0. Les pics sont alors très fins et l'intensité reçue chute rapidement en dehors des valeurs où $d = d_p$.

II.11 . Comme $R = 1-\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 0{,}05$ $\Rightarrow$. $\boxed{\Delta d = \frac{\lambda_0\varepsilon}{2\pi}} = \underline{8{,}4.\text{mm}}$

. $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\varepsilon}{2p\pi} = 1{,}6.10^{-7}$

. $G_{min} = \left[1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\right]^{-1} = 6{,}6.10^{-4}$

. On remarque que $\left|\frac{\Delta\lambda^+}{\lambda_{inc}}\right| > \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$ $\Rightarrow$ le décalage peut être observé avec cet interféromètre.

II.12 Soit $s(x,t) = A\cos(\omega t)\sin(kx)$ t.q $s(0,t) = 0$ et $s(d,t) = 0$

$$\Rightarrow \sin(kd) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{2d}{n}$$

On retrouve le résultat de la question II.3

(III.1) Dans un état stationnaire :

$$\boxed{\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + (E - U)\varphi = 0}$$

(III.2) Pour $x < -a$, et $x > a$ $U = +\infty$ $\boxed{\text{d'où } \varphi = 0}$

(III.3) Si $U = 0$ on a $\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} + \dfrac{2mE}{\hbar^2}\varphi = 0$ avec $E > 0$

$$\text{d'où } \varphi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (2) \quad \text{où } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(a) = 0 = Ae^{ika} + Be^{-ika} \\ \varphi(-a) = 0 = Ae^{-ika} + Be^{ika} \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} A = -Be^{-i2ka} \quad (3) \\ A = -Be^{+i2ka} \end{cases} \Leftrightarrow e^{-i2ka} = e^{i2ka}$

$$\Leftrightarrow e^{i2ka} - e^{-i2ka} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(2ka) = 0$$

$$\text{D'où } 2k_n a = n\pi$$

or (1) donne : $E = \dfrac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \Rightarrow E_n = \dfrac{\hbar^2 \cdot (n\pi/2a)^2}{2m}$

$$\Rightarrow \boxed{E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}} \quad \text{Energie quantifiée}$$

(III.4) D'après (2) et (3) :

$$\varphi(x) = B\left(e^{-ikx} - e^{ikx}\cdot e^{-i2ka}\right)$$

$$= e^{-ika}B\left[e^{-ik(x-a)} - e^{ik(x-a)}\right]$$

$$= Be^{-ika} \times (-1)\, 2i \times \sin(k(x-a))$$

$$\boxed{\text{D'où } \varphi(x) = C\sin(k(x-a))}$$

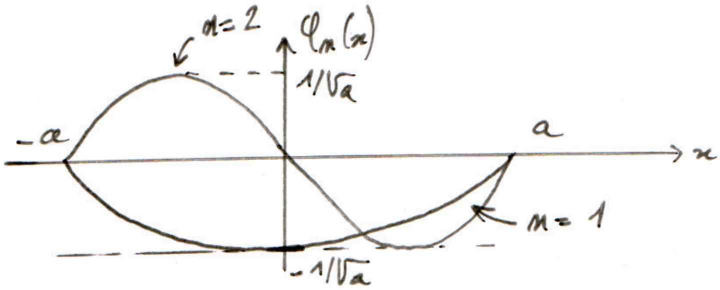
or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 1 \iff \int_{-a}^{a} C^2 \sin^2(k(x-a))\, dx = 1$ avec $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$$\iff C^2 \times \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2(k(x-a))}{4}\right]_{-a}^{a} = 1$$

$$\iff C^2 \times a = 1$$

D'où $\boxed{\varphi_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\dfrac{n\pi}{2a}(x-a)\right)}$ c'est bien une onde stationnaire

III.5



III.6 D'après Heisenberg $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$ avec $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle}$ car $\langle p_x \rangle^2 = 0$

d'où $\langle E_c \rangle = \dfrac{\langle p_x^2 \rangle}{2m} \geq \left(\hbar/2\right)^2 \times \left(\dfrac{1}{\Delta x}\right)^2 \times \dfrac{1}{2m}$.

$$\iff \langle E_c \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} > 0 \quad \text{avec } \Delta x \sim 2a$$

III.7 En mécanique classique toutes les valeurs de $E_c > 0$ sont accessibles alors qu'ici l'énergie cinétique est t.q $\langle E_c \rangle > E_{cmin}$ qui de plus est quantifiée

III.8 Soit $\langle x \rangle = \displaystyle\int_{-a}^{a} \underbrace{x\,|\varphi_1(x)|^2}_{\text{impair}} dx \Rightarrow \boxed{\langle x \rangle = 0}$

III.9 Soit $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \boxed{a/\sqrt{3} = \Delta x}$

III.10 Soit $\Delta x \Delta p_x \simeq \dfrac{\hbar}{2}$ avec $\Delta x = 2a$ d'où $\Delta p_x \sim \hbar/4a \Rightarrow \langle E_c \rangle \simeq \dfrac{(\Delta p_x)^2}{2m}$

$\Rightarrow E_c \sim \dfrac{\hbar^2}{8ma^2}$ avec $E_1 = \dfrac{\hbar \pi^2}{8ma^2}$

L'ordre de grandeur est vérifié avec $\boxed{E_1 > E_{c,min} = \dfrac{\hbar^2}{8ma^2}}$