

Physique : DS2

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

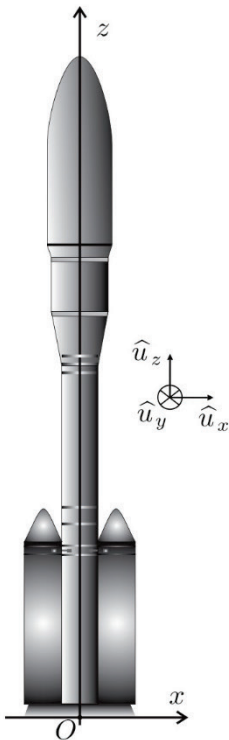
Partie I – Aspects de la propulsion spatiale

Pour les applications numériques on utilisera 3 chiffres significatifs. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires \hat{u}_x ou d'une flèche dans le cas général \vec{v} . A l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les grandeurs complexes sont soulignées : $\underline{z} \in \mathbb{C}$.

Données valables dans tout le problème

- Masse de l'électron, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;
- Charge élémentaire, $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
- Constante de Newton de la gravitation universelle, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^2$;
- Permittivité diélectrique du vide, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$;
- Constante d'Avogadro, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$;
- Rayon de la Terre, $R_t = 6,37 \cdot 10^3 \text{ km}$;
- Masse de la Terre, $M_t = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$;
- Intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre, $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- Constante de Boltzmann, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$;
- Constante de Planck, $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$;
- Constante des gaz parfaits, $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$;

Ce problème s'intéresse à la propulsion d'engins spatiaux et plus particulièrement au moteur ionique, dans lequel le carburant n'est pas brûlé mais ionisé. Les ions alors libérés passent par deux grilles fortement chargées électriquement et subissent ainsi une accélération. La force d'accélération des ions cause une force de réaction de sens opposé : c'est la force de propulsion du moteur à ions. Les différentes parties du problème sont très largement indépendantes.



I. — Généralités

I.A. — Aspect cinétique - Lois de vitesse

À l'instant $t = 0$, une fusée de masse totale m_0 décolle verticalement dans le référentiel terrestre (voir figure 1). On définit le débit de masse $D_m > 0$ des gaz brûlés, par $D_m = -\frac{dm}{dt}$, $m(t)$ désignant la masse de la fusée à un instant $t > 0$ quelconque. On note $\vec{u} = -u\hat{u}_z$ avec $u > 0$, la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée. On note $\vec{v} = v(t)\hat{u}_z$ la vitesse de la fusée dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose que D_m et u restent constants et que le champ de pesanteur g reste uniforme lors du lancement.

▣ 1 — En prenant pour système la fusée à l'instant t , exprimer sa quantité de mouvement \vec{p}_f aux instants t et $t + dt$. Déterminer de même la quantité de mouvement \vec{p}_g à l'instant $t + dt$ du gaz éjecté pendant dt .

▣ 2 — On rappelle que la dérivée temporelle d'un vecteur $\vec{w}(t)$ est définie par la relation $\frac{d\vec{w}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{w}(t+dt) - \vec{w}(t)}{dt}$. En utilisant le principe fondamental de la dynamique pour l'ensemble {fusée + gaz}, établir l'équation différentielle

$$m \frac{dv}{dt} = D_m u - mg \quad (1)$$

FIGURE 1 – Fusée

▣ 3 — Identifier, dans le second membre de l'équation (1), l'intensité F de la force de poussée. À quelle condition la fusée décolle-t-elle ?

▣ 4 — On nomme impulsion spécifique I_s d'un ergol (gaz propulseur) le temps pendant lequel une masse m de cet ergol peut fournir une poussée équivalente au poids ressenti par m à la surface de la terre. Exprimer I_s en fonction de u et g .

▣ 5 — Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ de la fusée à l'instant t , en fonction de t , $m(t)$, g , u et de la masse de la fusée à l'instant $t = 0$ notée m_0 .

▣ 6 — On suppose le vaisseau extrait de l'attraction terrestre (mission interplanétaire), sa masse totale est alors m_i et sa vitesse $\vec{v} = v_i\hat{u}_z$. On allume à nouveau un moteur pendant une durée Δt conduisant à une variation de masse $\Delta m = m_i - m_f$. Adapter l'expression précédente pour obtenir la relation de Tsiolkovski donnant l'accroissement de vitesse correspondant, noté $\Delta V = v_f - v_i$, en fonction de u , m_i et m_f .

L'exemple qui suit a pour objet de montrer l'intérêt des fusées à plusieurs étages. Soit une fusée de masse totale $m_t = 134$ tonnes constituée de deux étages. La masse totale du premier étage est $m_{t_1} = 110$ tonnes dont 100 tonnes d'ergols, et celle du second est $m_{t_2} = 24,0$ tonnes dont 20,0 tonnes d'ergols.

▣ 7 — En considérant que la vitesse d'éjection des gaz $u = 4,00 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ est la même lors de la poussée de chaque étage, calculer les accroissements de vitesse apportés successivement par chacun des étages de la fusée. Comparer avec le cas d'une fusée ne possédant qu'un seul étage et la même répartition de masses, c'est-à-dire 14,0 tonnes de structure et 120 tonnes d'ergols. Les calculs seront effectués dans l'hypothèse d'une absence de pesanteur.

Une autre manière de minimiser les dépenses en carburant est d'augmenter la vitesse d'éjection, limitée à quelques kilomètres par seconde dans le cas d'une propulsion chimique comme nous le verrons dans la suite de ce problème.

□ **8** — Pour une charge utile de masse $m_u = 500$ kg, calculer les masses m_{c_1} et m_{c_2} de carburant (la masse initiale du vaisseau est $m_0 = m_u + m_c$) à prévoir pour obtenir une variation de vitesse $\Delta V = 5,00 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, dans le cas d'une propulsion chimique ($u = 4,00 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$) et d'une propulsion ionique ($u = 20,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$).

I.B. — Aspect énergétique - Rendement propulsif du moteur fusée

□ **9** — Le vaisseau se déplace à une vitesse de norme v dans le référentiel d'étude galiléen. Exprimer l'énergie cinétique dans ce référentiel de la masse dm du gaz éjectée pendant dt , en déduire la puissance cinétique P_{jet} contenue dans le jet de gaz issu du moteur. Exprimer de même la puissance reçue par le vaisseau de la part de la force de poussée. On exprimera ces deux termes en fonction de D_m , u et v .

□ **10** — On définit le rendement propulsif comme le rapport de la puissance cinétique gagnée par le vaisseau sur la puissance totale dépensée. En admettant une conversion parfaite de l'énergie stockée dans le vaisseau en énergie cinétique du jet et du vaisseau, montrer que le rendement propulsif peut se mettre sous la forme

$$\eta(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

où l'on précisera l'expression de x en fonction des données du problème.

□ **11** — Tracer la courbe $\eta(x)$, pour quelle valeur de x le rendement propulsif est-il maximal ? Pour quelles valeurs de x le rendement est-il nul ? Montrer que l'on pouvait prévoir ces résultats sans calcul.

En fait, bien que des moteurs à vitesse d'éjection variable soient étudiés et quelquefois exploités, le rendement énergétique de la propulsion est souvent considéré comme secondaire : l'énergie fournie par une pile nucléaire ou des panneaux solaires est presque illimitée, ce qui n'est pas le cas des réserves de gaz propulsif.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Limites de la propulsion chimique

Considérons l'écoulement d'une tranche de fluide, comprise entre les sections S_1 et S_2 à l'instant t et entre S'_1 et S'_2 à l'instant $t + dt$. Durant le laps de temps dt cette tranche échange un certain travail W et une certaine quantité de chaleur Q avec l'extérieur. On note par ailleurs W' le travail échangé sans mettre en jeu les forces de pression.

□ **12** — Appliquer le premier principe de la thermodynamique à cette tranche, écrire, en régime permanent, la relation entre W' , Q et les variations d'énergie massique de la tranche considérée.

On se place dans la tuyère d'un moteur fusée, lorsque l'écoulement est permanent et s'effectue à altitude constante sans travail autre que celui des forces de pression. Le gaz éjecté est considéré comme parfait, de masse molaire M , d'indice adiabatique $\gamma = 1,4$. Il provient d'une chambre de combustion, où ses température et pression sont notées T_c et P_c . Le gaz est initialement au repos, $v_c = 0$. Par ailleurs, on considère que le transit du gaz dans la tuyère est suffisamment rapide et les échanges suffisamment lents pour que l'on puisse négliger les transferts thermiques.

□ **13** — Exprimer la vitesse maximale atteinte par le gaz en sortie de la tuyère en fonction de γ , R , T_c et M . On négligera la température de sortie devant T_c .

□ 14 — Les ergols utilisés pour la propulsion sont du dihydrogène et du dioxygène, leur réaction stœchiométrique permet d’obtenir une température de combustion de l’ordre de $T_c = 3,0 \cdot 10^3$ K. Calculer la vitesse maximale d’éjection des gaz issus de la tuyère et l’impulsion spécifique correspondante.

Partie III :

Une étude dynamique de la couche limite

Ce problème met en jeu la notion de couche limite qui intervient lorsqu’on étudie les écoulements laminares, à nombres de Reynolds néanmoins importants, autour d’un solide. Cette couche assure le raccordement entre la solution d’écoulement parfait qui prévaut loin du corps et la condition de vitesse nulle sur les parois. L’étude simplifiée proposée repose sur les travaux de deux physiciens allemands spécialistes en mécanique des fluides.

- Ludwig Prandtl (1875-1953) qui introduisit en 1904 la notion de couche limite dans l’écoulement d’un fluide autour d’un obstacle. Ses travaux le conduisirent également à établir la théorie hydrodynamique de l’aile portante d’envergure infinie dans un fluide parfait.
- Heinrich Blasius (1883-1970) qui publia de nombreux mémoires sur les écoulement de fluides visqueux autour d’obstacles et dans les tuyaux cylindriques.

Formulaire : équation de Navier-Stokes d’un fluide newtonien visqueux incompressible

$$\mu \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right] = \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v}$$

I Préliminaire

On s’intéresse à un régime variable d’écoulement au sein d’un fluide visqueux et incompressible dont le champ des vitesses s’écrit $\vec{v} = v_x(y, t) \vec{u}_x$. L’axe Ox est horizontal et la pression ne dépend pas de x . Cela peut, par exemple, concerner le régime transitoire d’accès à un écoulement stationnaire de cisaillement simple.

I.A – Rappeler, en introduisant la viscosité dynamique η dont on indiquera l’unité S.I., l’expression de la force de viscosité exercée, au niveau de la surface élémentaire d’aire dS et de normale \vec{u}_y , par la portion de fluide d’abscisses supérieures à y sur la portion de fluide d’abscisses inférieures à y .

On dit que cette force traduit un transfert diffusif de quantité de mouvement. Préciser cette notion en soulignant en quoi cela diffère d’un transfert convectif. Quel phénomène simple explique le brassage moléculaire qui est à l’origine de cette diffusion ?

I.B – Établir l’expression $d\vec{F}_{\text{visc}}$ de la résultante des forces de viscosité agissant sur l’élément de volume $d\tau$ défini par les intervalles $(x, x + dx)$, $(y, y + dy)$, $(z, z + dz)$.

I.C –

I.C.1) Écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule de fluide de volume $d\tau$ et constater que l’on retrouve l’équation de Navier-Stokes dans le cas particulier d’écoulement envisagé.

En cas d’échec à cette question (en particulier si l’on n’a pas répondu à la **question I.B**) on poursuivra en utilisant l’équation de Navier-Stokes proposée dans le formulaire dont on donnera toutefois la signification des différents termes.

I.C.2) En projetant cette équation sur \vec{u}_x , obtenir l’équation aux dérivées partielles vérifiée par $v_x(y, t)$ appelée équation de diffusion. Lui donner une forme remarquable commune à toutes les équations de diffusion en introduisant la diffusivité de quantité de mouvement ou viscosité cinématique ν que l’on exprimera à l’aide de η et de la masse volumique μ . Quelle est l’unité S.I. de ν ?

I.D – En quoi le phénomène de diffusion est-il irréversible et comment cela est-il pris en compte dans l’équation de diffusion ? Donner une autre forme d’équations aux dérivées partielles régissant des phénomènes réversibles que l’on nommera.

I.E – Grâce à l’équation de diffusion, établir un lien très simple entre la viscosité cinématique ν , la distance caractéristique selon Oy : L_y , et la durée caractéristique τ du phénomène de diffusion. (On pourra exploiter un raisonnement en ordre de grandeur ou une analyse dimensionnelle.)

II Ordre de grandeur de l'épaisseur d'une couche limite

On se propose d'évaluer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite (affectée par la viscosité) au voisinage d'une plaque plane sur laquelle arrive un écoulement laminaire uniforme de vitesse $\vec{U} = U\vec{x}$ parallèle à la plaque.

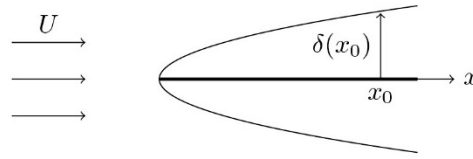


Figure 1

Cette zone qui assure le raccordement entre la condition de vitesse nulle contre la plaque et l'écoulement uniforme, s'établit par diffusion perpendiculairement à la plaque à partir du moment où le fluide aborde l'extrémité de celle-ci.

Estimer l'ordre de grandeur $\delta(x_0)$ de l'épaisseur de la couche limite en exploitant le résultat de la **question I.E** et en tenant compte du fait que lorsque le fluide atteint l'abscisse x_0 (à partir de l'extrémité de la plaque), le phénomène diffusif perpendiculairement à la plaque, s'est déjà produit pendant la durée x_0/U .

Rappeler l'expression du nombre de Reynolds si l'on prend x_0 comme dimension caractéristique d'écoulement : Re_{x_0} .

Exprimer $\delta(x_0)/x_0$ à l'aide de Re_{x_0} .

Proposer alors un critère de pertinence pour l'utilisation de la notion de couche limite.

III Cas d'un écoulement de Poiseuille plan

On considère maintenant l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux plans horizontaux d'abscisses $y = -d/2$ et $y = +d/2$. L'axe horizontal Ox définit la direction et le sens de l'écoulement tandis que l'axe Oy est vertical ascendant : $\vec{g} = -g\vec{y}$.

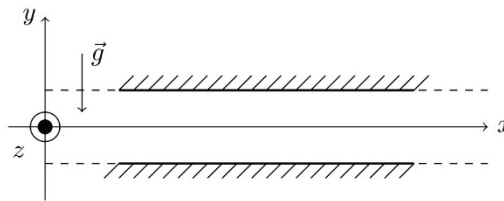


Figure 2

III.A – On considère une zone suffisamment éloignée de l'extrémité par laquelle le fluide aborde le dispositif pour ignorer tout phénomène d'entrée et faire comme si les parois étaient illimitées. On étudie alors un écoulement stationnaire caractérisé par le champ des vitesses $\vec{v} = v_x(y)\vec{u}_x$ et un champ de pression $p(x, y)$.

III.A.1)

a) Écrire l'équation locale du mouvement en mettant à profit le résultat de la **question I.B** (ou en exploitant l'équation donnée dans le formulaire). La projeter sur \vec{u}_x et \vec{u}_y .

b) En déduire que $\partial p / \partial x = K$ (constante).

c) Donner la loi $v_x(y)$ en fonction de K , η , y et d . Montrer que le profil des vitesses est parabolique.

III.A.2) On note $\Delta p = p(x, y) - p(x + L, y)$ la différence de pression qui doit exister entre deux points de même altitude et distants de L selon Ox pour maintenir cet écoulement.

Établir l'expression du débit volumique D_V à travers une section de largeur h selon Oz en fonction de Δp , L , h , d et η .

Avec quelle loi électrique la relation entre Δp et D_V suggère-t-elle une analogie? Introduire une résistance hydraulique.

III.A.3) Si, en maintenant Δp , on divise d par 2, que devient le débit?

Quel débit total circule alors à travers deux dispositifs identiques d'épaisseur $d/2$, chacun étant soumis à la différence de pression Δp sur une longueur L ?

En déduire une différence importante avec la notion de résistance électrique.

III.B – On examine maintenant le phénomène d'entrée dans le dispositif précédent. Un fluide en écoulement laminaire uniforme de vitesse $\vec{U} = U\vec{u}_x$ pénètre dans l'intervalle situé entre deux plaques planes parallèles au plan xOz , distantes de d .

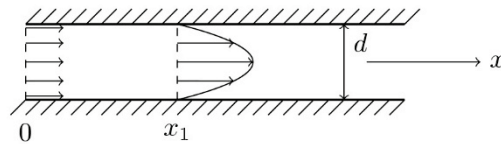


Figure 3

En exploitant le phénomène de croissance de couche limite à partir de l'arête de chaque plaque (cf. partie II), évaluer en fonction de U , d et ν , la distance x_1 parcourue par le fluide depuis son entrée dans le dispositif avant que s'établisse le profil parabolique de vitesse.

Montrer qu'on peut exprimer le rapport x_1/d à l'aide du nombre de Reynolds si l'on choisit judicieusement la dimension caractéristique de l'écoulement.

IV Équation du mouvement dans la couche limite

On considère un écoulement laminaire stationnaire et incompressible, près d'une plaque plane horizontale $y = 0$, à nombre de Reynolds grand devant 1, de façon que la notion de couche limite ait un sens. On se limite au cas d'un écoulement uniforme hors de la couche limite : $\vec{v}_{\text{ext}} = U\vec{u}_x$. Le fluide a la masse volumique μ et la viscosité dynamique η . On adopte le modèle d'un écoulement bidimensionnel dans la couche limite, caractérisé par le champ des vitesses $\vec{v} = v_x(x, y)\vec{u}_x + v_y(x, y)\vec{u}_y$ et le champ de pression $p(x, y)$.

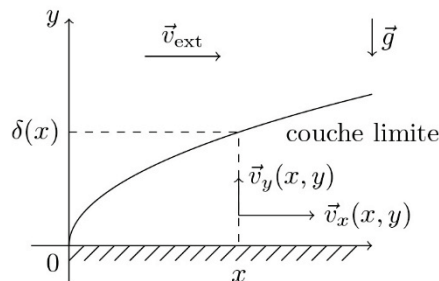


Figure 4

On admettra que, dans ce cas, la résultante des forces de viscosité agissant sur un élément de volume $d\tau$ s'écrit $d\vec{F}_{\text{visc}} = \eta(\Delta v_x \vec{u}_x + \Delta v_y \vec{u}_y) d\tau$.

IV.A – Écrire l'équation traduisant l'incompressibilité.

IV.B – Écrire les projections sur \vec{u}_x et \vec{u}_y de l'équation fondamentale de la dynamique en utilisant les constantes μ , ν et g .

IV.C – *Raisonnement sur les ordres de grandeur*

Pour évaluer (dans la couche limite) l'ordre de grandeur de la dérivée d'une grandeur par rapport à x , on considère le quotient de cette grandeur par x_0 (valeur « typique » de x) et pour la dérivée d'une grandeur par rapport à y , on considère le quotient de cette grandeur par $\delta(x_0)$ (épaisseur de couche limite en x_0).

Exemples : $\partial v_x / \partial x$ de l'ordre de v_x / x_0 , $\partial v_x / \partial y$ de l'ordre de $v_x / \delta(x_0)$.

IV.C.1) En utilisant l'équation obtenue au **IV.A**, relier les ordres de grandeur de v_x et v_y au nombre de Reynolds Re_{x_0} . En déduire que $v_y \ll v_x$.

IV.C.2) Montrer également que

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

IV.C.3) Montrer que

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad \text{et} \quad v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

sont du même ordre de grandeur.

Montrer, en se plaçant au bord extérieur de la couche limite, où v_x est de l'ordre de U que

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

est du même ordre que les deux termes précédents.

IV.C.4) Réécrire les équations du **IV.B** en les simplifiant grâce à **IV.C.2**. On admettra que la faiblesse de v_y (en comparaison à v_x) conduit à ignorer toutes les dérivées partielles de v_y lors de la projection sur \vec{u}_y . En déduire que

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx -\mu g$$

IV.D – Puisque la couche limite est très étroite en altitude, et compte tenu de la relation précédente, la pression p , à x donné, a quasiment la même valeur qu'à l'extérieur immédiat de cette couche. Hors de la couche limite (on rappelle que l'écoulement y est parfait) la pression dépend-elle de x ?

Que dire alors de $\frac{\partial p}{\partial x}$ dans la couche limite ?

En déduire l'équation :

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

V Autosimilitude des profils de vitesse dans la couche limite dans le cas d'une vitesse extérieure uniforme

On se sert

- des 2 échelles de longueur :
 - x_0 parallèlement à la plaque (direction des x)
 - $\delta(x_0) = x_0 / \sqrt{Re_{x_0}}$ dans la direction des y
- des 2 échelles de vitesse :
 - U dans la direction des x
 - $U / \sqrt{Re_{x_0}}$ dans la direction des y

On définit ainsi des variables sans dimension :

$$x' = \frac{x}{x_0}, \quad y' = \frac{y}{\delta(x_0)} = \sqrt{Re_{x_0}} \frac{y}{x_0}, \quad v'_x = \frac{v_x}{U}, \quad v'_y = \sqrt{Re_{x_0}} \frac{v_y}{U}$$

Écrire alors les équations **IV.A** et **IV.D** à l'aide de v'_x , v'_y et de dérivées par rapport à x' et y' . Ces nouvelles équations seront notées **V1** et **V2**. Leurs solutions sont de la forme $v'_x = f_1(x', y')$, $v'_y = g_1(x', y')$ donc $v_x = U f_1(x', y')$ et

$$v_y = \frac{U}{\sqrt{Re_{x_0}}} g_1(x', y') = \sqrt{\frac{\nu U}{x_0}} g_1(x', y') = \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \sqrt{x'} g_1(x', y') = \sqrt{\frac{\nu U}{x}} h_1(x', y')$$

Or v_x et v_y ne sauraient dépendre de l'échelle arbitraire x_0 , par conséquent les expressions $f_1(x', y')$ et $h_1(x', y')$ ne peuvent faire intervenir séparément x' et y' mais seulement une combinaison de ces variables indépendante de x_0 , soit $\theta = y' / \sqrt{x'}$. Ainsi

$$\theta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U}}}, \quad v_x = U f(\theta) \quad \text{et} \quad v_y = \sqrt{\frac{\nu U}{x}} h(\theta)$$

Ainsi la variation de la composante v_x de la vitesse avec la distance y à la plaque est toujours la même à un facteur d'échelle

$$\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

près, lorsque la distance x à l'arête change. De ce point de vue le profil de vitesse dans la couche limite est dit autosimilaire.

Avertissement : on peut poursuivre le problème en exploitant les résultats ci-dessus même si l'on n'a pas traité le **V**. De même l'équation de la question **IV.D** a été donnée. Il suffira d'avoir obtenu l'équation très simple de la question **IV.A** pour aborder la suite du problème.

VI Équation de Blasius pour un écoulement uniforme le long d'une plaque plane

VI.A – Grâce à l'équation **IV.A**, relier $h'(\theta)$ à θ et $f'(\theta)$.

VI.B – En déduire que

$$h(\theta) - h(0) = \frac{1}{2} \left(\theta f(\theta) - \int_0^\theta f(\xi) d\xi \right)$$

VI.C – Compte tenu des conditions aux limites montrer que $h(0) = 0$.

VI.D – À partir de la formule de la question **IV.D**, montrer que

$$f''(\theta) = -\frac{1}{2} f'(\theta) \int_0^\theta f(\xi) d\xi \quad (\text{équation de Blasius})$$

VII Résolution approchée de l'équation de Blasius

Avertissement : dans cette partie, les dérivées successives de la fonction f seront notées, à partir de la dérivée seconde, avec des exposants : $f^{(2)}(\theta)$, $f^{(3)}(\theta)$, $f^{(4)}(\theta)$.

Question préliminaire : les parties **VII.A** et **VII.B** proposent d'envisager les comportements à faible θ ou à grand θ . Que signifient physiquement $\theta \ll 1$ et $\theta \gg 1$?

VII.A – *Comportement de $f(\theta)$ à « faible » θ*

VII.A.1) Compte tenu des conditions aux limites montrer que $f(0) = 0$.

VII.A.2) En examinant l'équation de Blasius, préciser $f^{(2)}(0)$.

VII.A.3) En dérivant l'équation de Blasius et en exploitant les résultats des questions **VII.A.1** et **VII.A.2**, préciser $f^{(3)}(0)$.

VII.A.4) En déduire que pour les « faibles » valeurs de θ : $f(\theta) \approx \theta f'(0) + b\theta^4$ (à des termes en θ^5 près).

VII.A.5) En dérivant une nouvelle fois l'équation de Blasius, relier $f^{(4)}(0)$ à $f'(0)$ et exprimer b en fonction de $f'(0)$.

VII.B – *Comportement de $f(\theta)$ à « grand » θ*

VII.B.1) Sachant que, hors de la couche limite, $\vec{v} = U\vec{e}_x$, calculer

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} f(\theta)$$

et montrer que

$$\int_0^\theta f(\xi) d\xi$$

se comporte comme θ , aux grandes valeurs de θ .

VII.B.2) En déduire une forme approchée de l'équation de Blasius pour les « grandes » valeurs de θ .

VII.B.3) Déduire la forme de $f'(\theta)$ à « grand » θ .

VII.B.4) Sans chercher de primitive de $f'(\theta)$, conclure sur la façon dont $f(\theta)$ « rejoint » sa valeur asymptotique quand $\theta \rightarrow \infty$.

VII.C – *Graphes de $f(\theta)$*

Le comportement quasi linéaire prolongé de $f(\theta)$ suivi d'un comportement asymptotique atteint de façon abrupte nous conduit à modéliser le graphe de $f(\theta)$ par sa tangente à l'origine jusqu'à l'intersection avec l'asymptote. Calculer θ_i à cette intersection sachant qu'une intégration numérique de l'équation de Blasius conduit à $f'(0) = 1/3$.

Tracer alors sommairement la courbe avec un coude réduit au voisinage de l'intersection. On rappellera, sur l'axe des abscisses, la signification de θ et, sur l'axe des ordonnées, la signification de $f(\theta)$.

VIII Force de frottement subie par la plaque plane dans l'écoulement uniforme

Le fluide situé du côté $y > 0$ exerce sur la portion $(x, x + dx)(z, z + dz)$ de la face supérieure de la plaque :

$$d^2 \vec{F}_{\text{visc}} = \eta \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right]_{y=0} dx dz \vec{u}_x$$

N.B. : le terme en $\partial v_y / \partial x$ s'explique par le fait que l'écoulement bidimensionnel dans la couche limite n'est pas un écoulement de cisaillement simple.

VIII.A – Exprimer

$$\frac{d^2 \vec{F}_{\text{visc}}}{dx dz}$$

à l'aide de μ , U , $f'(0)$, ν et \vec{u}_x (on rappelle que $h(0) = 0$).

VIII.B – En déduire la force de frottement par unité de longueur selon Oz , subie par une plaque de longueur L selon Ox , en tenant compte de ses deux faces. On exprimera le résultat en admettant $f'(0) = 1/3$. Commenter l'exposant de U .

On pourra également exprimer cette force à l'aide de μ , U , L et du nombre de Reynolds Re_L construit à partir de la longueur caractéristique L .

☞ Le sujet possède une dernière partie sur la force de traînée que j'ai supprimé dans le sujet.