Physique : DS2

Partie I – Aspects de la propulsion spatiale (Mines 2015 – PC)

I) Généralités

I.A) Aspect cinétique - lois de vitesse

1°) Pour la fusée :
$$\begin{cases} \vec{p_F}(t) = m(t)v(t)\,\vec{u_z} \\ \vec{p_F}(t+dt) = (m(t) - D_m\,dt)(v(t)+dv)\,\vec{u_z} \end{cases} \quad (1)$$

Pour les gaz éjectés : $\vec{p_g}(t+dt) = D_m\,dt\,[\vec{u}+\vec{v}] = D_m\,dt\,(v-u)\,\vec{u_z}$ (2)

2°) Soit le système {fusée + gaz} :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = \frac{\vec{p_F}(t+dt) + \vec{p_g}(t+dt) - \vec{p_F}(t)}{dt} = m(t)\,\vec{g}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u_z}\left(\frac{\cancel{m(t)v} + m(t)\,dv - \cancel{D_m\,dt\,v(t)} - \overbrace{D_m\,dt\,dv}^{\text{ordre 2 négligé}} + \cancel{D_m\,dt\,v} - D_m\,dt\,u - \cancel{m(t)v}}{dt}\right) = m\vec{g}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u_z}\left(\frac{m(t)\,dv - D_m\,dt\,u}{dt}\right) = -mg\,\vec{u_z}$$

$$\Leftrightarrow m(t)\frac{dv}{dt} = D_m u - mg \quad (3)$$

3°) • La force de poussée $\vec{F} = D_m u\,\vec{u_z}$ (4)

• Pour que la fusée décolle, il faut que $D_m u > mg$.

$$\Rightarrow D_m u > m_0 g \quad (5)$$

4°) La définition de I_s entraîne :
$$\begin{cases} I_s = \dfrac{m}{D_m} \Leftrightarrow D_m = \dfrac{m}{I_s} \\ \text{et} \\ m = \dfrac{D_m u}{g} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_m I_s = D_m \frac{u}{g} \Rightarrow I_s = \frac{u}{g}$$

5°) On résout l'équation (3) : $\frac{dv}{dt} = \frac{Dm}{m} u - g$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{m}\frac{u}{dt} - g.$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{d\ln m}{dt} \cdot u - g.$$

$$\Leftrightarrow v = -u \ln m - gt + cste.$$

Or à $t=0$, $\begin{cases} v(0) = 0 \\ m(0) = m_0 \end{cases} \Rightarrow 0 = -u \ln m_0 + cste$

Donc : $\boxed{v = u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - gt}$ (6)

6°) En dehors du champ de gravitation terrestre $\vec{g} = \vec{0}$ d'où :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\ln m}{dt} \cdot u$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta v = -u \ln \frac{m_f}{m_i}}$$ (7)

7°) Premier étage : $\Delta v_{21} = -u \ln\left(\frac{34}{134}\right) = 5{,}49\,km\,s^{-1}$

Second étage : $\Delta v_{32} = -u \ln\left(\frac{4}{24}\right) = 7{,}17\,km\,s^{-1}$

$\Rightarrow \Delta v = 12{,}7\,km\,s^{-1}$

Fusée à un seul étage : $\Delta v = -u \ln\left(\frac{14}{134}\right) = 9{,}04\,km\,s^{-1}$

8°) (7) peut s'écrire : $\frac{m_f}{m_i} = e^{-\Delta v/u} \Leftrightarrow \frac{m_u}{m_u + m_c} = e^{-\Delta v/u}$

$$\Leftrightarrow 1 + m_c/m_u = e^{+\Delta v/u}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m_c = m_u\left[e^{\Delta v/u} - 1\right]}$$ (8)

Pour $\begin{cases} u_1 = 4{,}00\,km/s \Rightarrow m_{c1} = 1250\,kg \\ u_2 = 20{,}0\,km/s \Rightarrow m_{c2} = 142\,kg. \end{cases}$

I.B) Aspect énergétique

9°) • Soit $\delta E_c = \frac{1}{2}\delta m\,(u-v)^2$

$$\Rightarrow \boxed{P_{jet} = \frac{\delta E_c}{dt} = \frac{1}{2} D_m (u-v)^2} \quad (9)$$

• Et $P_{poussée} = \vec{F}.\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \boxed{P_{poussée} = D_m \,.\, uv} \quad (10)$$

10°) Soit : $\eta = \dfrac{P_F}{P_{jet} + P_F}$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{D_m uv}{D_m uv + \frac{1}{2} D_m (u-v)^2}$$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{2uv}{2uv + u^2 + v^2 - 2uv}$$

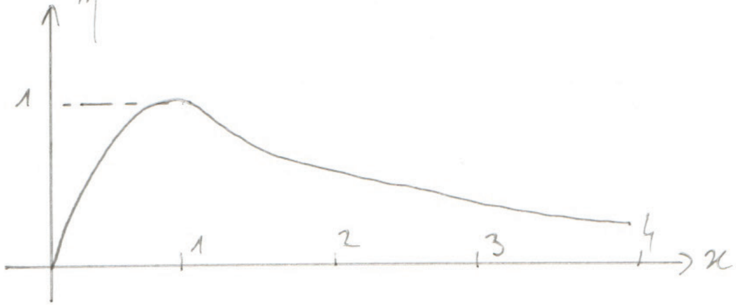
$$\Leftrightarrow \eta = \frac{2uv}{u^2+v^2}$$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{2u/v}{1 + (u/v)^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\eta = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{si } x = u/v \text{ ou } v/u} \quad (11)$$

11°) lorsque $\begin{cases} x \to 0 : \eta \to 0 \\ x \to \infty : \eta \to 0 \end{cases}$

Et : $\dfrac{d\eta}{dx} = \dfrac{2(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2 + 2x^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \underline{x_r = 1}$

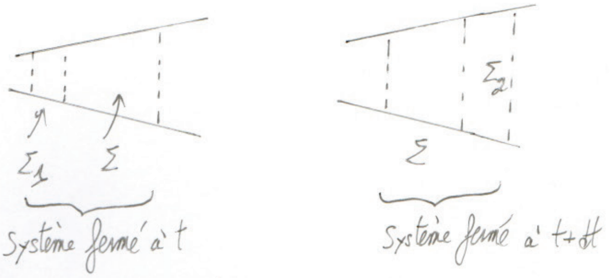


On remarque que $\eta \to 0$:

* si $x = 0 \Leftrightarrow u = 0$: pas de force de poussée
* si $x \to \infty \Leftrightarrow v = 0$: fusée immobile

II) Limites de la propulsion chimique

12°) Le 1PP en système fermé s'écrit : $\Delta(U + E_c + E_{pext}) = W_p + W' + Q$ (1)



D'où (1) s'écrit : $D_m\,dt\,[\overbrace{e_{c2} + u_2 + e_{p2}}^{\mu_2} - \overbrace{e_{c1} - u_1 - e_{p1}}^{\mu_1}] + \Delta U_\Sigma = W_p + W' + Q$

En régime permanent : $D_m\,dt\,[u_2 - u_1] = \frac{P_1}{\mu_1} - \frac{P_2}{\mu_2} + W' + Q$

$\Leftrightarrow D_m\,dt\,[h_2 - h_1] = W' + Q$

$\Leftrightarrow \boxed{D_m\,dt\,[(h_2 + e_{c2} + e_{p2}) - (h_1 + e_{c1} + e_{p1})] = W' + Q}$ (12)

A noter plutôt $\delta W'$, δQ.

13°) Ici : $\delta W' = 0$, $\delta Q = 0 \Rightarrow e_c + e_p + h = cste$

En négligeant les variations d'altitude : $e_c + h = cste$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}v^2 + c_p T = cste$.

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{2}v^2 + \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)} T + cste}$ (13)

D'où : $0 + \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)} T_c = \frac{1}{2} u_{max}^2 + 0$ car on néglige T_{sortie} face à T_c.

$$\Rightarrow \boxed{u_{max} = \sqrt{\frac{2\gamma R T_c}{(\gamma-1) M}}}$$

14°) A.N : • $u_{max} = 3{,}11\ km.s^{-1}$

• $I_s = \frac{u_{max}}{g} = 317 s$.

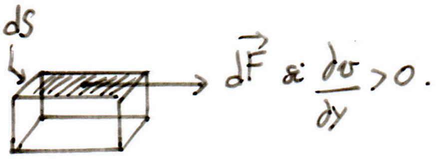
Partie II : Etude dynamique de la couche limite (Centrale PC 2011)

I) Préliminaires

I.A) . On suppose que $\vec{v} = v_x(y,t)\vec{u}_x$ d'où la force :

$$\boxed{\vec{dF} = \eta \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_y dS\,\vec{u}_x}$$

en Pl ou Pa.s



. Les particules situées en $y+dy$ passent en y et amènent leur quantité de mouvement transverse : $mv_x(y+dy)\vec{u}_x$ d'où le transport convectif.

. Le brassage moléculaire est dû à l'agitation thermique.

I.B) Sur un élément de volume $d\tau$:

$$\vec{dF} = \vec{dF}_{y+dy} + \vec{dF}_y$$

$$= \eta\, dS \left(\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y+dy} - \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_y \right) \vec{u}_x$$

$$= \eta\, dS\, dy \cdot \left.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_y \vec{u}_x$$

$$= \eta \left.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_y d\tau\, \vec{u}_x$$

Si on considère les axes (Ox) et (Oz) : $\boxed{\vec{dF} = \eta\left(\vec{\Delta}\vec{v}\right) d\tau}$ pour un fluide newtonien

I.C.1) En appliquant le PFD : $\frac{D\vec{p}}{Dt} = \sum \vec{dF}$

$$\Leftrightarrow \mu\, d\tau \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}})\vec{v} \right) = \mu \vec{g}\, d\tau + \eta \vec{\Delta}\vec{v}\, d\tau - \vec{\text{grad}}\, p\, d\tau$$

si l'écoulement est incompressible.

D'où pour un fluide newtonien écoulement incompressible :

$$\boxed{\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right)=-\overrightarrow{\text{grad}}\,p+\mu\vec{g}+\eta\vec{\Delta}\vec{v}}$$

I.C.2) Sur $\vec{u}_x$: $\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}v_x(y,t)}_{=0}\right)=-\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{=0\ p\text{ ne dépend pas de }x}+0+\eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$.

D'où : $\boxed{\frac{\partial v}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\text{ où }\nu=\frac{\eta}{\mu}}$ en $m^2.s^{-1}$

I.D . La diffusion augmente le désordre du système isolé (en le rendant plus homogène), le manque d'information augmente donc son entropie $\Rightarrow$ <u>évolution irréversible</u>

. Exemples d'équations "réversibles" : * D'Alembert $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$

* OH : $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\omega_0^2 x=0$

. On reconnait une évolution réversible si remplaçant t par "$-t$" celle-ci reste inchangée.

I.E <u>Etude en ODG</u> : $\frac{\partial v}{\partial t}\sim\frac{v}{\tau}$; $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\sim\frac{v}{L_y^2}$ d'où : $\frac{v}{\tau}\sim\nu\frac{v}{L_y^2}$

$\Leftrightarrow\ \boxed{L_y\sim\sqrt{\nu\tau}}$

II <u>ODG de δ</u>

D'après la formule précédente : $\delta\sim\sqrt{\nu\tau}$

$\sim\sqrt{\nu.\frac{x_0}{U}}$

Or $Re=\frac{\mu U x_0}{\eta}=\frac{Ux_0}{\nu}$ d'où $\delta=\sqrt{\frac{x_0}{Re}.x_0}\Rightarrow\boxed{\frac{\delta}{x_0}=\sqrt{\frac{1}{Re_{x_0}}}}$

* D'où $\delta/x_0\ll 10^{-2}\Leftrightarrow\boxed{Re_{x_0}\gg 10^4}$

III) Poiseuille plan

III.A.1)

a) Cette fois le champ de pression dépend de x, y d'où en régime stationnaire :

$$\begin{cases} 0 = +\eta \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial y} - g \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = +\eta \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = -g \end{cases}}$$

b) On a $\dfrac{\partial p}{\partial x} = \eta \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Leftrightarrow F(x) = G(y)$ par conséquent les 2 fonctions sont égales à une constante d'où : $\boxed{\dfrac{\partial p}{\partial x} = k}$

c) Donc $\eta \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = k \Leftrightarrow v = \dfrac{k}{\eta}\dfrac{y^2}{2} + \alpha y + \beta$.

or $v\left(-\frac{d}{2}\right) = v\left(\frac{d}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{k}{\eta}\dfrac{d^2}{8} + \alpha \dfrac{d}{2} + \beta = 0 \\ \dfrac{k}{\eta}\dfrac{d^2}{8} - \alpha\dfrac{d}{2} + \beta = 0 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \dfrac{k}{\eta} d^2/8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v_x}(y) = \dfrac{kd^2}{8\eta}\left(1 - \dfrac{4y^2}{d^2}\right)\vec{u_x}}$ profil parabolique.

III.A.2)

Soit $\Delta p = -kL$ d'où : $D_v = \iint_{section} \vec{v} \cdot \vec{dS}$

$\Leftrightarrow D_v = -\dfrac{\Delta p}{L} \cdot \dfrac{d^2}{8\eta} \displaystyle\int_{-d/2}^{d/2}\int_0^h \left(1 - \dfrac{4y^2}{d^2}\right) dy\,dz$

$\Leftrightarrow D_v = -\dfrac{\Delta p}{L} \cdot \dfrac{d^2}{8\eta} \cdot h \cdot \left[y - \dfrac{4}{3}\dfrac{y^3}{d^2}\right]_{-d/2}^{d/2} = -\dfrac{\Delta p \cdot d^2 h}{8\eta L}\left[d - \dfrac{4}{3d^2}\dfrac{d^3}{4}\right]$

$\Leftrightarrow \boxed{D_v = -\dfrac{\Delta p}{L}\dfrac{d^3 h}{12\eta}}$ Cette loi rappelle la loi d'Ohm $i = \dfrac{U}{R}$ d'où $\boxed{R_h = \dfrac{12 L \eta}{d^3 h}}$

III.A.3) . Si $\Delta p_2 = \frac{\Delta p_1}{2}$ alors $D_{V_2} = \frac{D_{V_1}}{8}$

. Pour deux tubes identiques d'épaisseur $d/2$ alors $D_V = \frac{D_{V_1}}{4}$

. Alors que pour une résistance électrique : $R_e = \frac{\ell}{\gamma h d} \Rightarrow D_V = D_{V_1}$.

. Conclusion : Pour un écoulement les diminutions de section réduisent considérablement le débit.

III.B) On atteint le régime parabolique lorsque $\delta = d/2$ d'où en utilisant le résultat de la question II :

$$\frac{\delta}{x_1} = \sqrt{\frac{1}{R_e}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{d/2} = \sqrt{R_e} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{x_1}{d} = \frac{1}{2}\sqrt{R_e}}$$

IV Equation du mouvement dans la couche limite

IV.A) L'écoulement est incompressible d'où $\frac{D\mu}{Dt} = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{v} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0}$$

IV.B) On est en régime stationnaire d'où :

$$\boxed{\begin{cases} \mu\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta v_x. \\ \mu\left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \mu g + \eta \Delta v_y \end{cases}}$$

IV.C.1) En OdG : $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ s'écrit : $\frac{v_x}{x_0} + \frac{v_y}{\delta} \sim 0$

donc : $\frac{v_y}{v_x} + \frac{\delta}{x_0} \sim 0$ d'où : $\boxed{\frac{v_y}{v_x} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_{x_0}}}}$ or $Re_{x_0} \gg 1 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{v_y}{v_x} \ll 1}}$

IV.C.2 Toujours en ODG :

- $\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \dfrac{v_x}{\delta^2}$, $\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \dfrac{v_x}{x_0^2}$ $\Rightarrow \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \Big/ \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \dfrac{x_0^2}{\delta^2} = Re_{x_0} \gg 1$

$$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \gg \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}} \quad 1$$

- De même : $\boxed{\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \gg \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}}$

IV.C.3 • Soit $v_y . \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \sim v_y . \dfrac{v_x}{\delta}$ or $\dfrac{\delta}{x_0} \sim \dfrac{v_y}{v_x}$ (IV.C.1)

d'où : $v_y . \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \sim \dfrac{v_x^2}{x_0}$

$$\Rightarrow \boxed{v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \simeq v_x . \dfrac{\partial v_x}{\partial x}}$$

- Et, $v_x . \dfrac{\partial v_x}{\partial x} \sim \dfrac{v_x^2}{x_0}$

- Et : $\nu . \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \nu \dfrac{v_x}{\delta^2} \sim \nu . \dfrac{Re_{x_0}}{x_0^2} . v_x .$

or $Re_{x_0} = \dfrac{v_x . x_0}{\nu}$ $\Rightarrow \nu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \dfrac{v_x^2}{x_0}$

$$\text{D'où : } \boxed{v_y . \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \simeq v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} \simeq \nu . \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$$

IV.C.4 D'où les équations
$$\begin{cases} \mu\left(v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right) \overset{1}{=} -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \eta . \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = -\mu g \text{ car on néglige les dérivées partielles de } v_y. \end{cases}$$

IV.D Hors de la couche limite on retrouve l'équation d'Euler stationnaire avec

$\nu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$ d'où $v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} \simeq v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \simeq 0$ (IV.C.4)

$\Rightarrow \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$ en dehors de la couche limite.

D'après l'énoncé on a donc $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ dans la couche limite d'où :

$$\boxed{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad \text{où } \nu = \eta/\mu}$$

V) Autosimilitude

Equation IV.A : $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ où $\begin{cases} x' = \frac{x}{x_0}, \; v_x' = \frac{v_x}{U} \\ y' = \sqrt{Re_{x_0}}\; y/x_0 \text{ et } v_y' = \sqrt{Re_{x_0}}\, \frac{v_y}{U} \end{cases}$

d'où : $\frac{U \partial v_x'}{x_0 \partial x'} + \frac{U}{\cancel{\sqrt{Re}}} \cdot \frac{\partial v_y'}{\frac{x_0}{\cancel{\sqrt{Re}}} \cdot \partial y'} = 0 \iff \boxed{\frac{\partial v_x'}{\partial x'} + \frac{\partial v_y'}{\partial y'} = 0}$

Equation IV.D :

Elle s'écrit : $v_x' \frac{\partial v_x'}{\partial x'} \times \frac{U^2}{x_0} + \frac{U^2}{x_0} v_y' \cdot \frac{\partial v_y'}{\partial y'} = \frac{\nu . U .}{x_0^2 / Re_{x_0}} \frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2}$

or $Re_{x_0} = \frac{U x_0}{\nu}$ d'où $\frac{\nu U}{x_0^2} \times Re_{x_0} = \frac{U^2}{x_0}$

d'où : $\boxed{v_x' \frac{\partial v_x'}{\partial x'} + v_y' \frac{\partial v_y'}{\partial y'} = \frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2}}$

VI) Equation de Blasius

On a $\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ \theta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U}}}, \; v_x = U f(\theta) \text{ et } v_y = \sqrt{\frac{\nu U}{x}}\, h(\theta). \end{cases}$

D'où $\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} = U \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = U \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{U}{\nu}} \cdot x^{-3/2} y = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{U}{x}\right)^{3/2} \frac{y}{\sqrt{\nu}} \cdot f'(\theta). \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} = \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \cdot \frac{\partial h}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \cdot h'(\theta) \cdot \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = \frac{U}{x} h'(\theta) \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} = U f(\theta) \cdot \dfrac{\partial v_x}{\partial \theta} \cdot \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = U^2 f f' \left(-\dfrac{1}{2}\right) \sqrt{\dfrac{U}{\nu}}\, x^{-3/2} y = -\dfrac{U^{5/2}}{2} \nu^{-1/2} x^{-3/2} y\, f(\theta) f'(\theta) \\ v_y \cdot \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = \sqrt{\dfrac{\nu U}{x}}\, h(\theta) \cdot U f'(\theta) \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \sqrt{\dfrac{\nu U}{x}}\, h(\theta)\, U f'(\theta) \cdot \dfrac{\sqrt{U}}{\sqrt{\nu x}} = \dfrac{U^2}{x} f'(\theta) h(\theta) \\ \nu \cdot \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \nu \dfrac{\partial}{\partial y}\left[U f'(\theta) \sqrt{\dfrac{U}{\nu x}}\right] = \nu \cdot \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left[U f'(\theta) \cdot \sqrt{\dfrac{U}{\nu x}}\right] \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \nu \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left[\ldots\right] \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\nu x / U}} \end{cases}$

$$= \frac{U^2}{x} f''(\theta).$$

Donc : $-\dfrac{U^{5/2}}{2} \nu^{-1/2} x^{-3/2} y\, f(\theta) f'(\theta) + \dfrac{U^2}{x} f'(\theta) h(\theta) = \dfrac{U^2}{x} f''(\theta).$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U}{\nu}} \cdot x^{-1/2} y\, f f' + f' h = f''.$$

or $y = \theta \sqrt{\dfrac{\nu x}{U}}$ d'où : $-\dfrac{1}{2} \theta f f' + f' h = f''$

or $h(\theta) = \dfrac{1}{2}\left[\theta f(\theta) - \displaystyle\int_0^\theta f(\xi)\, d\xi\right]$ (IV.C)

D'où : $\cancel{-\dfrac{1}{2}\theta f f'} + \dfrac{f'}{2}\left[\cancel{\theta f} - \displaystyle\int_0^\theta f(\xi)\, d\xi\right] = f''$

$$\Leftrightarrow \boxed{f''(\theta) = -\frac{1}{2} f'(\theta) \cdot \int_0^\theta f(\xi)\, d\xi}$$

VII Résolution approchée

VII.A.1) Pour un écoulement réel : $v_x(0) = 0$ d'où $\boxed{f(0) = 0}$

VII.A.2) On suppose que $f'(\theta)$ reste bornée, $f(\theta)$ est supposé continuement dérivable d'où

$\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \int_0^\theta f(\xi)\, d\xi = 0 \Rightarrow$ d'après Blasius : $\boxed{f''(0) = 0 \text{ ou } f^2(0) = 0}$

VII.A.3) On dérive Blasius : $f'''(\theta) = -\frac{1}{2} f'' \int_0^\theta f(\xi)d\xi - \frac{1}{2} f'(\theta) f(\theta)$.

d'où $\boxed{f'''(\theta) = 0 \text{ ou } f^3(0) = 0}$

VII.A.4) A l'aide d'un D.L de Taylor autour de 0 on a :

$$f(\theta) = \theta f'(0) + \frac{\theta^4}{24} f^4(0) + o(\theta^4)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(\theta) = \theta f'(0) + b\theta^4 \text{ où } b = f^4(0)/24}$$

VII.A.5) On dérive une nouvelle fois :

$$f^4(\theta) = -\frac{1}{2} f^3 \int_0^\theta f(\xi)d\xi - \frac{1}{2} f^2 f - \frac{1}{2} f^2 f - \frac{1}{2} f' \cdot f'$$

d'où en $\theta = 0$:

$$f^4(0) = -\frac{1}{2} f'(0)^2 \quad \text{d'où } \boxed{b = -\frac{1}{48} f'(0)^2}$$

VII.B.1) Lorsqu'on se place en dehors de la couche limite $v_x \to U$ d'où :

$$U f(\theta) \to U$$

$$\text{donc } \boxed{\lim_{\theta \to \infty} f(\theta) = 1}$$

Par conséquent $\lim_{\theta \to \infty} F(\theta) = 0$ avec $F(\theta) = \int_0^\theta f(\xi) d\xi$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^\theta f(\xi) d\xi \sim \theta \text{ si } \theta \to \infty}$$

VII.B.2 Pour θ grand, Blasius devient :

$$\boxed{f''(\theta) \simeq -\frac{1}{2} f'(\theta).\theta}$$

VII.B.3 D'où $\frac{\partial f'}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} f'.\theta$

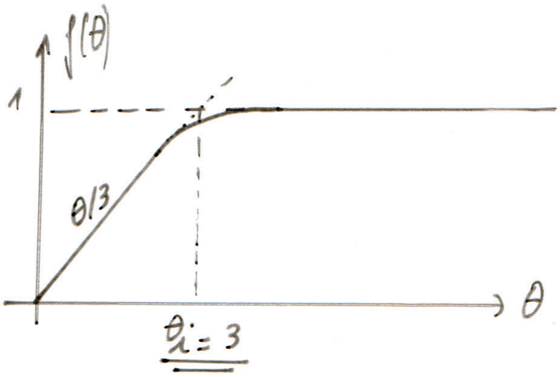
$$\Leftrightarrow \frac{df'}{f'} = -\frac{1}{2}\theta . d\theta$$

$$\Leftrightarrow \ln f' = -\frac{\theta^2}{4} + cste \quad \text{d'où } \boxed{f' = Ae^{-\theta^2/4}} \text{ où } A = 1.$$

VII.B.4 La dérivée tend exponentiellement vers 0 donc f rejoint rapidement son asymptote

VII.C . Pour θ petit on a donc $f'(\theta) \simeq \frac{1}{3}\theta$.

. Pour θ grand on a donc $f(\theta) \simeq 1$



VIII Force de frottement

VIII.A On $\frac{d^2F}{dxdz} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_{y=0}$ avec $\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{U^{3/2}}{\sqrt{\nu x}} f'(\theta) \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} = \sqrt{\frac{\nu U}{x}}\, \underbrace{h'(\theta)}_{=0 \text{ en } \theta=0} . \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{d^2F}{dxdz} = \eta . \frac{U^{3/2}}{\sqrt{\nu x}} f'(0)$$

or $\nu = \eta/\mu \Rightarrow \boxed{\dfrac{d^2F}{dx\,dz} = \sqrt{\dfrac{\nu\mu^2 . U^3}{x}}\, f'(0)}$

VII.B Donc $\dfrac{dF}{dz} = \displaystyle\int_0^L \sqrt{\nu U^3 \mu^2}\, f'(0) \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$= \dfrac{1}{3}\sqrt{\nu U^3 \mu^2}\,\left[2\sqrt{x}\right]_0^L$

$= \dfrac{2}{3}\sqrt{\nu U^3 \mu^2 L}$

D'où si on tient compte des 2 faces :

$$\boxed{\frac{dF}{dz} = \frac{4}{3}\sqrt{\nu U^3 \mu^2 L}}$$

or $Re_L = \dfrac{UL}{\nu} \Leftrightarrow \nu = \dfrac{UL}{Re_L}$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dz} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{U^4 L^2 \mu^2}{Re_L}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dF}{dz} = \frac{4}{3}\,\frac{U^2 L \mu}{\sqrt{Re_L}}}$$