

Physique : DS1

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Partie A – Isolation thermique

A / Étude du mur simple

Considérons un mur de bâtiment (chalet de montagne en plein hiver par exemple) constitué d'un matériau homogène, isotrope, de masse volumique ρ , de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ , supposées constantes.

Le mur est limité par deux plans (Oyz) parallèles, distants de e_B (figure 1). Les températures constantes T_{int} et T_{ext} (avec $T_{int} > T_{ext}$) sur les deux faces correspondent respectivement aux températures de l'air à l'intérieur et à l'extérieur du bâtiment. L'étude est unidirectionnelle, la chaleur se propageant uniquement dans la direction Ox normale à ces plans.

En un point M du mur d'abscisse x , la température est notée $T(x)$. Les dimensions de la surface S du mur dans le plan (Oyz) sont supposées grandes par rapport à son épaisseur et aucune ouverture n'est sensée venir perturber les transferts thermiques dans le mur.

L'étude est réalisée en régime permanent ; pour débiter, seuls les phénomènes conductifs sont pris en compte.

- A1.** Établir, en justifiant chaque étape de votre raisonnement, l'équation différentielle de la chaleur à laquelle obéit la température $T(x)$.
- A2.** En déduire la loi de répartition de la température $T(x)$. Commenter.
- A3.** Exprimer le flux surfacique (ou densité de courant thermique) \vec{J}_{th} dans le mur. Justifier son orientation.
- A4.** Déterminer le flux thermique total Φ traversant le mur.
- A5.** Rappeler les grandeurs analogues de Φ et de $T_{int} - T_{ext}$ en électrocinétique ; en déduire l'expression de la résistance thermique **surfacique** définie par le rapport $R_{th} = \Delta T / J_{th}$ et préciser son unité.

Les caractéristiques d'un mur en béton armé (épaisseur e_B et conductivité thermique λ) sont mentionnées sur le tableau relatif aux matériaux sous les figures 1 et 2. Les températures sur les faces intérieure et extérieure du mur s'élèvent respectivement à $T_{int} = 19^\circ\text{C}$ et $T_{ext} = -15^\circ\text{C}$.

Le coefficient de transmission surfacique ou coefficient de déperdition thermique noté U évalue la facilité avec laquelle le transfert thermique s'effectue à travers la surface d'échange ; il représente le flux de chaleur par unité de surface pour une différence de température d'un degré entre les deux milieux extrêmes.

- A6.** Calculer le flux surfacique J_{th} et le coefficient de transmission surfacique U du mur.
- A7.** Représenter, sur le document-réponse A, le profil de température dans le mur en béton armé.

A8. Déterminer numériquement la profondeur e_{HG} du mur demeurant « hors gel ».

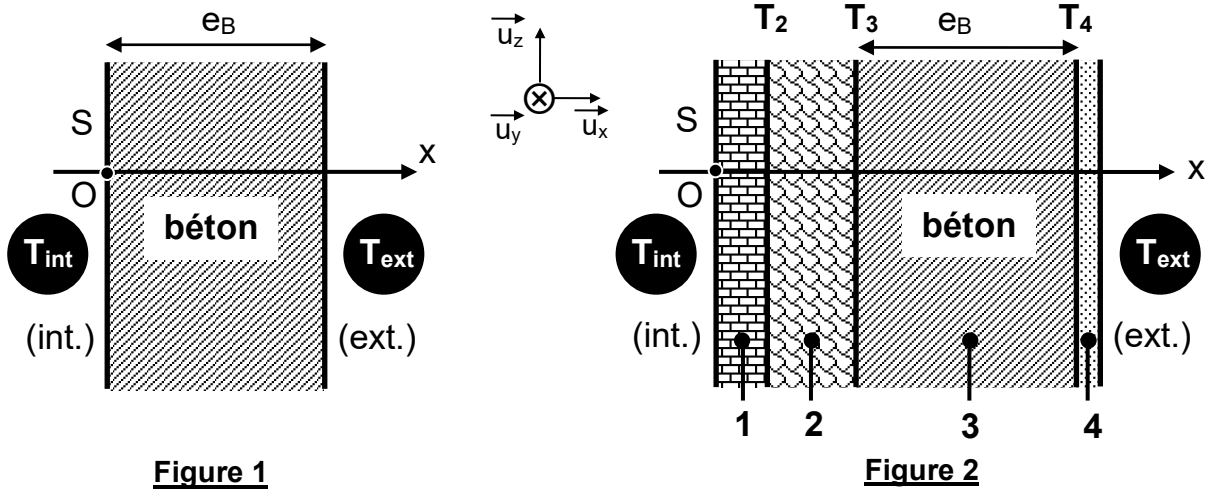


Figure 1

Figure 2

Couche j	1	2	3	4
Matériau	carreaux de plâtre	laine de verre	béton armé	crépis
Épaisseur e_j (cm)	5	8	20 (e_B)	2
Conductivité thermique λ_j ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)	0,30	0,04	1,75	0,90

Tableau récapitulatif des matériaux constitutifs du mur composite

B / Étude du mur composite

Le mur a maintenant une structure composite : il comporte quatre matériaux différents (de l'intérieur vers l'extérieur du bâtiment : carreaux de plâtre, laine de verre, béton armé, crépis extérieur), homogènes et isotropes, référencés $j = 1, 2, 3, 4$, d'épaisseur e_j , de conductivités thermiques λ_j , en contact parfait et possédant des surfaces limites isothermes (figure 2). Les températures des faces extrêmes sont toujours notées T_{int} et T_{ext} (avec $T_{int} > T_{ext}$). Le régime est permanent et aucune source interne de chaleur n'est présente dans le mur.

- B1.** Justifier puis traduire la conservation du flux surfacique J_{Cth} à travers ce mur composite.
- B2.** Déterminer la résistance thermique surfacique R_{Cth} du mur composite (figure 2) en fonction des e_j et λ_j . Calculer R_{Cth} en utilisant les données relatives aux matériaux constitutifs.
- B3.** Exprimer le coefficient de transmission surfacique U_C en fonction de R_{Cth} , puis calculer J_{Cth} et U_C , sachant que les milieux extrêmes sont aux températures $T_{int} = 19^\circ C$ et $T_{ext} = -15^\circ C$. Comparer les coefficients U du mur simple et U_C du mur composite.
- B4.** Calculer les températures intermédiaires T_2 , T_3 et T_4 aux interfaces entre les couches, puis représenter, sur le document-réponse A, le profil de température dans le mur composite. Analyser son évolution par rapport à celui tracé en A7.

Afin de simplifier l'approche thermique de ce mur, introduisons la notion de conductivité thermique équivalente λ_{MCeq} : c'est celle d'un mur simple et homogène possédant une épaisseur et une résistance thermique respectivement égales à l'épaisseur et à la résistance thermique du mur composite.

B5. Déterminer puis calculer la conductivité thermique équivalente $\lambda_{MC\acute{e}q}$ du mur composite.

C / Mur composite avec transferts convectifs et radiatifs

Le mur composite précédent est au contact, de part et d'autre, avec l'air intérieur et l'air extérieur. Ce fluide est aux températures respectives $T_{FL,int}$ et $T_{FL,ext}$ (avec $T_{FL,int} > T_{FL,ext}$). Deux types de transferts thermiques superficiels interviennent alors : les échanges convectifs liés au déplacement de l'air et les échanges radiatifs dus au rayonnement thermique.

Ces deux modes de transfert entre les parois du mur et l'atmosphère environnante sont régis, pour un transfert de chaleur algébrique de la paroi (d'aire S) au fluide, par la loi globalisée :

$$\Phi_{RCC} = h_{RCC} [T_{paroi} - T_{fluide}] S, \text{ avec } h_{RCC} \text{ positif.}$$

Le coefficient surfacique d'échange h_{RCC} tient en compte à la fois des transferts thermiques conducto-convectifs et des transferts par rayonnement aux interfaces air-paroi. Il est noté h_{int} pour la paroi interne à la température $T_{P,int}$ au contact de l'air intérieur à la température $T_{FL,int}$ et h_{ext} pour la paroi externe à la température $T_{P,ext}$ au contact de l'air extérieur à $T_{FL,ext}$.

C1. Déterminer les nouvelles expressions du flux surfacique $J_{th,FL}$ et de la résistance thermique surfacique $R_{th,FL}$ aux deux interfaces air-mur.

Calculer la résistance thermique surfacique du mur composite $R_{Cth,FL}$.

C2. Exprimer puis calculer les températures de paroi $T_{P,int}$ et $T_{P,ext}$. Commenter.

C3. Tracer sommairement sur le document-réponse A l'évolution du profil de température au voisinage des parois murales (intérieure et extérieure). Discuter des paramètres (climatiques entre autres) qui pourraient influencer ces évolutions du profil thermique.

Données : $T_{FL,int} = 19 \text{ }^\circ\text{C}$; $T_{FL,ext} = -15 \text{ }^\circ\text{C}$; $h_{int} = 10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$; $h_{ext} = 30 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.

D / Recherche d'une isolation optimale du mur

Dans le cadre de la rénovation de bâtiments (appartement ou chalet de montagne) ou de leur mise en conformité énergétique, un bureau d'étude envisage une isolation spécifique du mur composite présenté en sous-partie B. Le mur est considéré comme homogène, il possède une épaisseur e_{MC} ($e_{MC} = 35 \text{ cm}$) et une conductivité thermique équivalente $\lambda_{MC\acute{e}q}$.

Le bureau d'étude propose d'appliquer une couche isolante d'épaisseur e_{ISO} constituée de mousse de polyuréthane de faible conductivité thermique $\lambda_{PUR} = 0,02 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et insérée en sandwich entre deux plaques de bois. Deux alternatives s'offrent à eux : isolation côté intérieur (avantage d'une moindre épaisseur) ou isolation côté extérieur du bâtiment.

Le document-réponse A fournit les tracés des profils de températures dans ces deux cas.

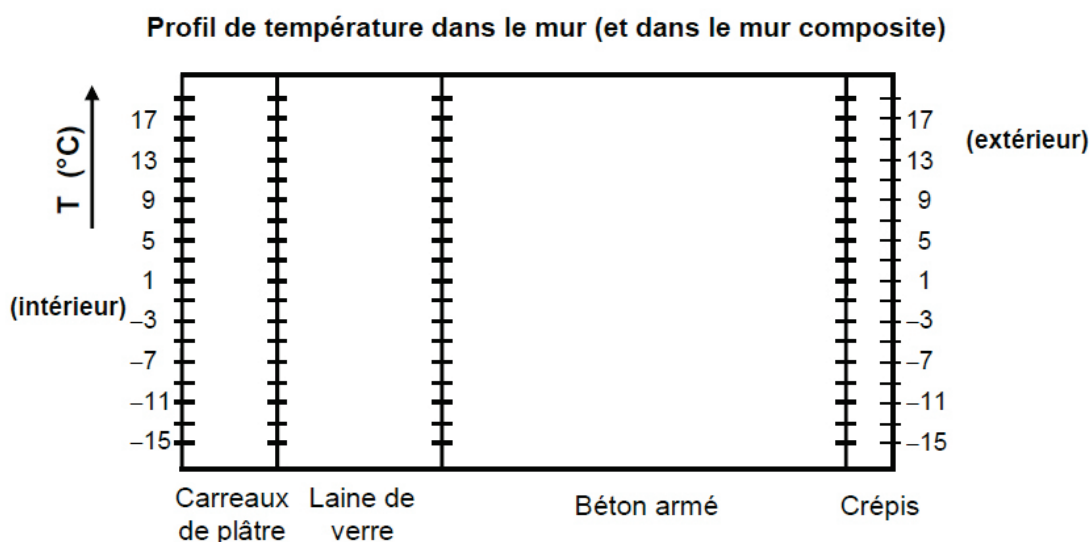
Parmi les nombreux problèmes à résoudre, l'un des plus délicats est celui de la congélation d'humidité liée à la perméabilité à l'air et à l'humidité des matériaux constitutifs du mur. Pour un mur en béton donné et compte tenu de l'humidité qu'il renferme, la vapeur d'eau se condense dans la zone où $T < T_S$, T_S étant

la température de saturation ou point de rosée ($T_s = 5\text{ °C}$). L'eau liquide formée se congèle si la température baisse en dessous de $T_0 = 0\text{ °C}$ et son volume augmente. Les cycles répétés gel-dégel, selon les évolutions temporelles et climatiques, entraînent la dégradation des matériaux, et plus particulièrement celle du béton.

D1. Positionner sur chaque tracé du document-réponse A, les températures T_0 et T_s . Mettre en évidence (en les hachurant de couleurs différentes) trois zones en liaison avec la valeur de la température au sein du matériau par rapport à T_0 et T_s . Décrire l'état physique de l'eau dans chacune de ces zones.

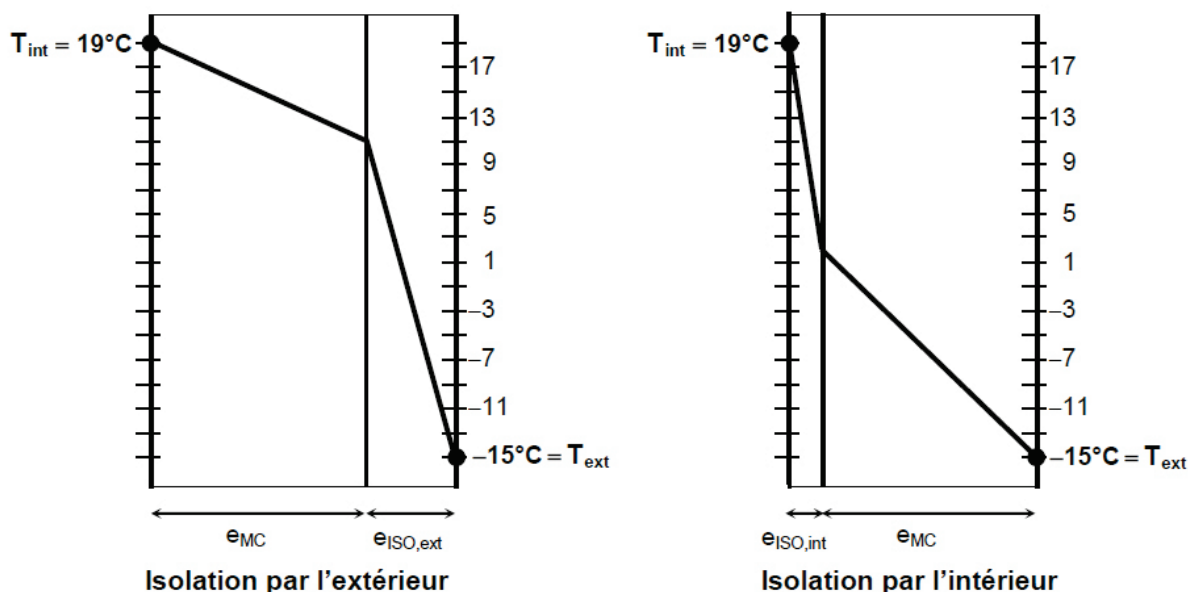
D2. Analyser les deux situations proposées. Conclure sur un choix d'isolation (extérieure ou intérieure), en tenant compte du bâtiment étudié.

Questions A7, B4 et C3



Question D1

Profils de température pour une optimisation de l'isolation



Partie B – Tunnel du Fréjus

Ce sujet comporte deux parties indépendantes qui s'intéressent à divers aspects de la physique dans le tunnel de Fréjus. A l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les nombres complexes sont soulignés. La notation \bar{z} désigne le nombre complexe conjugué de z . Les vecteurs seront traditionnellement surmontés d'une flèche, par exemple \vec{j} pour un flux surfacique ; sauf s'ils sont unitaires et seront alors surmontés d'un chapeau, par exemple \hat{e}_z tel que $\|\hat{e}_z\| = 1$. Pour les applications numériques on utilisera 3 chiffres significatifs.

I. — Température dans le tunnel de Fréjus

Le tunnel routier du Fréjus relie la vallée de l'Arc, en France, au val de Suse, en Italie. Long d'environ 13 km, le tunnel passe sous le col du Fréjus dans les Alpes cottiennes. La pointe Fréjus culmine à une altitude de 2934 m.

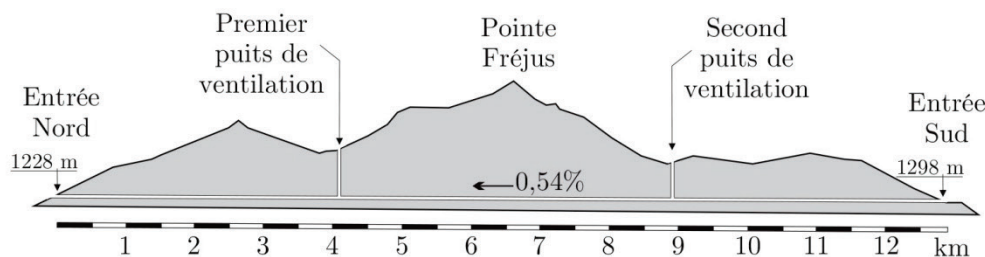


FIGURE 1 – Tunnel de Fréjus

La roche environnante dans le tunnel a une température constante tout au long de l'année d'environ 30°C . Dans un premier temps nous étudierons les évolutions saisonnières de la température dans le sol. Puis nous tenterons d'expliquer cette température élevée par un modèle géophysique.

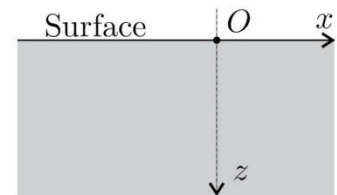


FIGURE 2 – Sol

I.A. — Évolutions saisonnières de la température dans le sol

On se place au sommet de la pointe Fréjus à une altitude de 2934 m. On assimile la roche à un milieu semi-infini de conductivité thermique κ , de masse volumique ρ_s et de capacité thermique massique c_s . Sa surface est plane et horizontale et est soumise à la variation de température extérieure $T(z=0, t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$ avec $\theta_0 = 0^\circ \text{C}$. (Voir figure 2).

- ▣ 1 — Calculer la moyenne temporelle de la température extérieure en $z = 0$. Calculer la température maximale et minimale. Proposer une valeur numérique pour T_0 pour les évolutions annuelles de température.
- ▣ 2 — Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire $d\mathcal{S}$ pendant dt , est noté $d\phi_Q$. Rappeler la définition du vecteur \vec{j}_Q , densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?
- ▣ 3 — Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application. En déduire les dimensions de la conductivité thermique κ .
- ▣ 4 — On étudie une tranche mésoscopique de sol comprise entre z et $z + dz$ de surface \mathcal{S} . Quelle est l'énergie thermique δQ reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?

❑ 5 — Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?

❑ 6 — Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\frac{\partial j_Q}{\partial z}$ et \mathcal{S} puis en fonction de ρ_s, c_s, \mathcal{S} et $\frac{\partial T}{\partial t}$.

❑ 7 — En déduire l'équation de la chaleur à une dimension $\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}$ dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.

On cherche des solutions de la forme $\underline{T}(z,t) = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$ vérifiant la condition aux limites $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$.

❑ 8 — Interpréter cette forme de solution. Déterminer la relation de dispersion correspondante. En déduire l'expression de \underline{k} qu'on mettra sous la forme $\underline{k} = k' + ik''$ avec $k' > 0$. Quelle est la signification physique de k' et k'' . Déterminer l'expression correspondante de la solution réelle $T(z,t)$.

❑ 9 — Calculer la profondeur z_e à partir de laquelle les oscillations annuelles de température ne s'écartent pas de θ_0 de plus de 1%. Que peut-on dire de la température dans le tunnel routier de Fréjus ? Pour les roches granitiques constituant le Fréjus on donne $\rho_s = 2,65 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $c_s = 8,50 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $\kappa = 3,00 \text{ SI}$.

❑ 10 — Que peut-on dire des variations quotidiennes de la température à la profondeur z_e ? En terme de filtrage fréquentiel, comment se comporte le sol ?

I.B. — Température d'origine géophysique

La température moyenne de 30° C relevée dans le tunnel de Fréjus peut être expliquée par un modèle géothermique simple de la croûte terrestre. On considère qu'au niveau des Alpes, l'épaisseur de la croûte terrestre continentale est $L_c = 45,0 \text{ km}$. Les roches granitiques qui constituent une partie des Alpes contiennent des éléments radioactifs comme l'uranium, le thorium et le potassium. La chaleur produite par ces éléments radioactifs est directement proportionnelle à leur concentration.

Dans les modèles couramment utilisés cette concentration décroît exponentiellement avec la profondeur, de sorte que la puissance volumique dégagée peut s'écrire $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 e^{-\frac{z}{H}}$ avec $H = 10,0 \text{ km}$. On prendra $\mathcal{P}_0 = 2,50 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$. La croûte terrestre repose sur le manteau terrestre, à la fois plus dense et plus chaud que la croûte. On admet enfin qu'au niveau de l'interface $\mathcal{I}_{c/m}$ entre la croûte et le manteau ce dernier génère un flux surfacique constant $\vec{j}_m = -j_m \hat{e}_z$ avec $j_m = 35,0 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$.

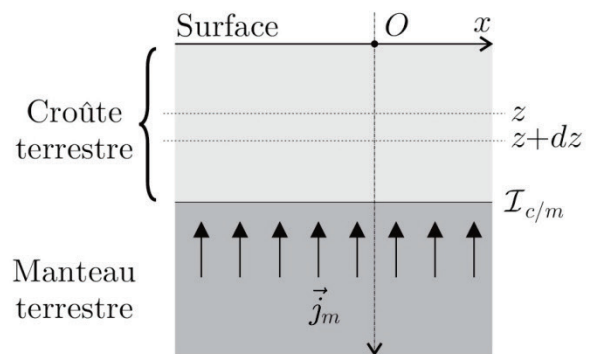


FIGURE 3 – Modèle géophysique

❑ 11 — Effectuer, *en régime stationnaire*, le bilan thermique dans une tranche de croûte terrestre de surface \mathcal{S} , comprise entre z et $z + dz$.

❑ 12 — En déduire la température $T(z)$ en fonction de : $H, L_c, \mathcal{P}, j_m, \kappa$ et $\theta_0 = 0^\circ \text{ C}$ la température moyenne de surface en $z = 0$.

❑ 13 — Exprimer le flux thermique total $\vec{j}_S = j_S \hat{e}_z$ au niveau de la surface en $z = 0$.

❑ 14 — Comparer les deux termes proportionnels à z et simplifier l'expression de $T(z)$. Calculer la température au centre du tunnel de Fréjus ($z = 1,70 \text{ km}$) puis j_S .

I.C. — Prise en compte du relief

On suppose maintenant que la température à la surface plane $z = 0$ possède une dépendance spatiale en x que l'on modélise par la relation $T(x, z = 0) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. Pour étudier l'effet du relief sur la température dans le tunnel de Fréjus on prendra $\lambda = 10,0$ km.

▣ **15** — On suppose pour cette question qu'il n'y a pas de source d'énergie thermique dans la roche. Donner sans démonstration l'équation différentielle satisfaite par $T(x, z)$ en régime stationnaire. En utilisant la méthode de séparation des variables, déterminer la solution $T(x, z)$ qui respecte la condition aux limites $T(x, z = 0)$ et qui demeure finie lorsque $z \rightarrow +\infty$. Justifier la prise en compte des effets de la variation spatiale de la température.

Document : Méthode de séparation des variables (Question 15)

- La méthode de séparation des variables consiste à poser $T(x, z) = C_1 + f(x)g(z)$ par exemple. (C_1 n'est pas obligatoire mais rend le calcul plus simple ici). On sépare les variables x et z par le produit de deux fonctions.
- Le but est d'arriver à une équation du type $\frac{f''(x)}{f(x)} = \alpha \frac{g''(z)}{g(z)}$ qui sera forcément égale à une constante.

▣ **16** — Toujours pour une surface plane d'équation $z = 0$, en utilisant la linéarité de l'équation satisfaite par la température, déterminer $T(x, z)$ en considérant les sources internes d'énergie thermique.

▣ **17** — On considère ici que la topographie de la surface peut être représentée par l'équation $h(x) = h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. La température de la surface $T_s = T(x, z = h)$ sera prise égale à celle de l'air ambiant et sera modélisée par $T_s = \theta_0 + \beta z$. En effectuant un développement limité en z à l'ordre 1, exprimer la température $T(x, z = 0)$ en fonction de h , $T(x, z = h)$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$.

Déterminer $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$ en fonction notamment du flux d'énergie thermique à la surface j_s . En déduire que que l'on peut écrire

$$T(x, z) = \theta_0 + c_1 z + c_2 (1 - e^{-z/H}) + c_3 h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-z/\delta}$$

où l'on précisera l'expression des constantes c_1 , c_2 , c_3 et δ en fonction des données du problème.