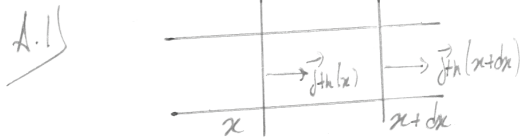


Physique : DS1

Partie A - Isolation thermique (E3A - PSI - 2014)

A) Etude du mur simple



En régime permanent : $dU=0 \Leftrightarrow \vec{j}_{th}(x) \cdot \vec{S} dt - \vec{j}_{th}(x+dx) \cdot \vec{S} dt = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{d j_{th}}{dx} S dt dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d j_{th}}{dx} = 0$$

Or $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{e}_x \Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$

A.2) Donc $T = Ax + B$ avec $\begin{cases} T(0) = T_{int} \\ T(e_B) = T_{ext} \end{cases} \Rightarrow T(x) = T_{int} + \frac{T_{ext} - T_{int}}{e_B} x$

On obtient un profil linéaire de température, indépendant des caractéristiques du mur

A.3) Donc $\vec{j}_{th} = \lambda \frac{T_{int} - T_{ext}}{e_B} \vec{u}_x$, le flux thermique est orienté selon $+\vec{u}_x$ car $T_{int} > T_{ext}$

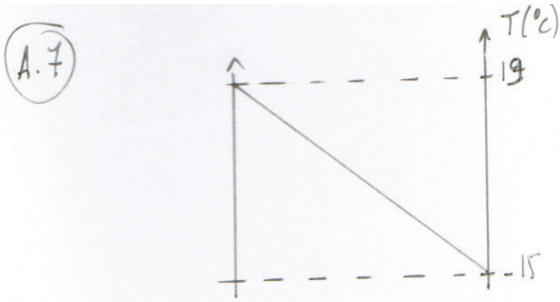
A.4) On $\phi = \int_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \phi = \frac{\lambda S}{e_B} (T_{int} - T_{ext})$

A.5) $\phi \leftrightarrow I$
 $T_{int} - T_{ext} \leftrightarrow V_B - V_A$ d'où $r = \frac{\phi}{T_{int} - T_{ext}} = \frac{e_B}{\lambda S}$

Si $S = 1 \text{ m}^2$ alors $R_{th} = \frac{e_B}{\lambda \times 1} = \frac{e_B}{\lambda}$ en $\text{m}^2 \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$

A.6) A.N pour le béton armé : $j_{th} = 298 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

On a $U = j_{th} \text{ (si } \Delta T = 1 \text{ K)} \Rightarrow U = \frac{1}{R_{th}} = \underline{\underline{8,75 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2}}}$



béton armé

(A.8) Pour le hors gel : $T = 273,15 \text{ K}$ donc $T(e_{HG}) = T_{int} + \frac{T_{ext} - T_{int}}{e_B} \cdot e_{HG}$

$$\Leftrightarrow \frac{e_{HG}}{e_B} = \frac{T(e_{HG}) - T_{int}}{T_{ext} - T_{int}}$$

$$\Rightarrow \underline{e_{HG} = 11,2 \text{ cm}}$$

(B) Etude du mur composite

B.1) En l'absence de source on a toujours $j_{th}(x^+) = j_{th}(x^-)$ d'après le A.1) en régime permanent. On applique cette propriété d'air :

$$\underline{j_{c,th} = d_1 \frac{T_{int} - T_2}{e_1} = d_2 \frac{T_2 - T_3}{e_2} = d_3 \frac{T_3 - T_4}{e_3} = d_4 \frac{T_4 - T_{ext}}{e_4}}$$

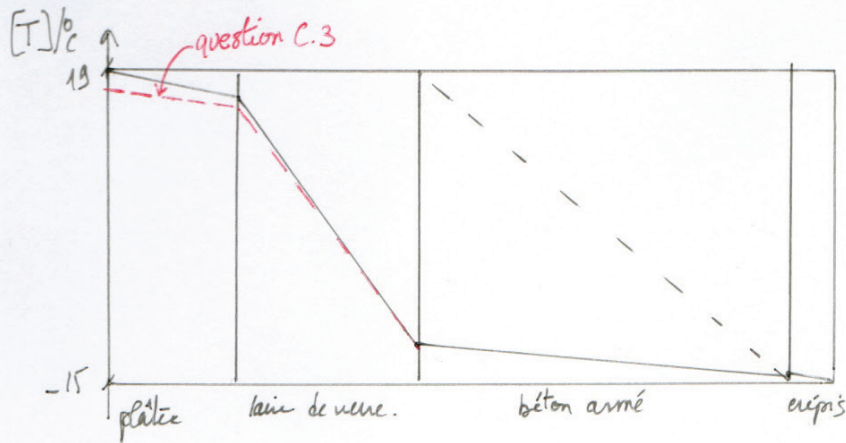
B.2) On a une équivalence série donc : $R_{c,th} = \sum_{i=1}^4 \frac{e_i}{d_i} = \underline{2,30 \text{ m}^2 \text{ K W}^{-1}}$

B.3) donc $\left\{ \begin{array}{l} U_c = \frac{1}{R_{c,th}} = \underline{0,434 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2}} \\ \text{et} \\ j_{c,th} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{c,th}} = \underline{14,8 \text{ W m}^{-2}} \end{array} \right.$

On remarque que $U_c \approx U_{20} \Rightarrow$ la structure est plus efficace.

B.4) D'après B.1) :

$$\left. \begin{array}{l} T_2 = T_{int} - \frac{j_{c,th} \cdot e_1}{d_1} = 16,5^\circ \text{C} \\ T_3 = T_2 - \frac{j_{c,th} \cdot e_2}{d_2} = -13^\circ \text{C} \\ T_4 = T_3 - \frac{j_{c,th} \cdot e_3}{d_3} = -14,7^\circ \text{C} \end{array} \right\}$$



On remarque que c'est la laine de verre qui isole le mieux vu le ΔT entre ses limites.

$$B.5) \text{ On a : } \vec{j}_{\text{th,eq}} = - \lambda_{\text{ceq}} \frac{dT}{dx} \vec{e}_x = \lambda_{\text{ceq}} \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{e_1 + e_2 + e_3 + e_4}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{\text{ceq}} = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4}{R_{\text{e,th}}} = \underline{\underline{0,152 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}}}$$

C) Mur composite avec transferts convectifs et radiatifs

$$C.1) \text{ Par définition } j_{\text{th,FL}} = \Phi/S$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{paroi intérieure : } j_{\text{th,FL}} = h_{\text{int}} (T_{\text{FL,int}} - T_{\text{p,int}}) \\ \text{paroi extérieure : } j_{\text{th,FL}} = h_{\text{ext}} (T_{\text{p,ext}} - T_{\text{FL,ext}}) \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Et } R_{\text{th,FL,int}} = 1/h_{\text{int}} \text{ et } R_{\text{th,FL,ext}} = 1/h_{\text{ext}}$$

$$\text{Donc } R_{\text{th,FL}} = \frac{1}{h_{\text{int}}} + R_{\text{th}} + \frac{1}{h_{\text{ext}}} = \underline{\underline{2,44 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}}}$$

$$C.2) \text{ On a } j_{\text{th,FL}} = j_{\text{th}} \Rightarrow \begin{cases} T_{\text{p,int}} = T_{\text{FL,int}} - j_{\text{th}} / h_{\text{int}} = \underline{\underline{17,5^\circ \text{C}}} \\ T_{\text{p,ext}} = T_{\text{FL,ext}} + j_{\text{th}} / h_{\text{ext}} = \underline{\underline{-14,5^\circ \text{C}}} \end{cases}$$

On remarque que la prise en compte de ce phénomène influence surtout à la paroi intérieure.

C.3) - Graphe sur la question B.4

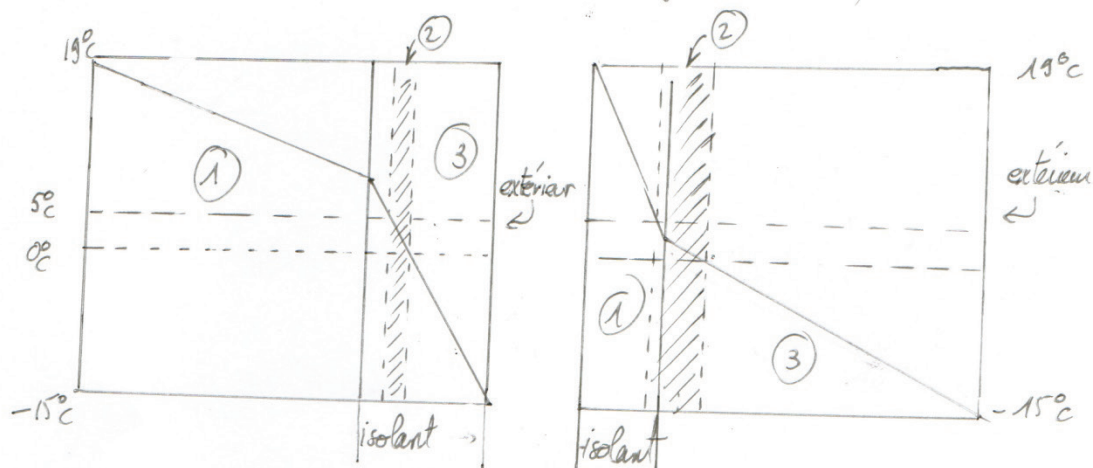
- la présence de vent améliore la convection \Rightarrow h_{ext} augmente et $R_{th,FE}$ est diminuée
- une humidité importante peut entraîner une baisse de $T_{p,ext}$ en raison de l'évaporation.
- de rayonnement solaire "direct" (murs orientés sud) peut augmenter $T_{p,ext}$

o
o
o

D) Redaction d'une isolation optimale.

D.1) On délimite :

- en " (1) " la zone où l'eau est sous forme de vapeur ($T > T_s$)
- en " (2) " la zone où l'eau peut se condenser ($0^\circ C < T < T_s$)
- en " (3) " la zone où l'eau condensée est gelée ($T < 0^\circ C$).



D.2) Pour éviter de dégrader les matériaux, il faut éviter les zones (2) et (3), par conséquent on préfère la solution d'isolation par l'extérieur.

Partie B : Tunnel du Fréjus (Mines PC - 2016)

$$1^{\circ}) \text{ Par définition } \begin{cases} T_{\text{moy}} = \theta_0 \\ T_{\text{max}} = \theta_0 + T_0 \\ T_{\text{min}} = \theta_0 - T_0 \end{cases}$$

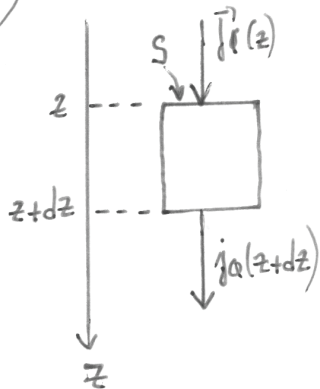
On peut choisir $T_0 = 15^{\circ}\text{C}$

$$2^{\circ}) \text{ On a : } d\Phi_Q = \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} \quad \text{où } [j_Q] = \text{Wm}^{-2}$$

où \vec{j}_Q est la densité du flux thermique homogène à une puissance surfacique.

3^o) loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -K \text{ grad } T$ valable dans un milieu isotrope avec des variations de température peu rapides.

$$\text{D'où } [K] = \frac{\text{Wm}^{-2}}{\text{Km}^{-1}} = \text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$$

4^o)

$$\text{Soit } \delta Q = [j_Q(z) - j_Q(z+dz)] S dt$$

$$\Leftrightarrow \delta Q = - \frac{\partial j_Q}{\partial z} \underbrace{dz S dt}_{dS}$$

5^o) . de système doit contenir un assez grand nombre de particules pour introduire la notion de température.

. de système doit être assez petit pour tenir compte de l'inhomogénéité de la température à grand volume.

$$6^{\circ}) \text{ En appliquant le premier principe : } dU = \delta Q \Rightarrow dU = - \frac{\partial \rho}{\partial z} S dz dt$$

$$\begin{aligned} \text{or } dU &= [u(t+dt) - u(t)] \rho_s dG \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} \rho_s dG dt \\ \Rightarrow dU &= c_s \rho_s \frac{\partial T}{\partial t} dG dt \text{ où } dG = S dz \end{aligned}$$

$$7^{\circ}) \text{ Donc } \frac{\partial T}{\partial t} c_s \rho_s = - \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \rho a = -k \frac{\partial T}{\partial z} &\Rightarrow \rho c_s \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} &= \underbrace{\frac{k}{\rho c_s}}_D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{t.q. } [D] = \text{m}^2 \text{s}^{-1}$$

8^o) La forme de solution : $T = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - kz)}$ est ondulatoire, la variation de température au sonnet se propage dans la roche.

$$(1) \text{ s'écrit } (-ik)^2 D = i\omega$$

$$\Leftrightarrow k^2 = -\frac{i\omega}{D} = e^{-i\pi/2} \omega/D$$

$$\Leftrightarrow k = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} e^{-i\pi/4} \Leftrightarrow k = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} = k' + ik''$$

Pour tenir compte d'une absorption $k'' < 0$

$$\Rightarrow k = k' + ik'' \text{ où } \begin{cases} k' = \sqrt{\frac{\omega}{2D}} & \text{propagation} \\ k'' = -i \sqrt{\frac{\omega}{2D}} & \text{atténuation} \end{cases}$$

$$\text{Donc } T(z,t) = T_0 + T_1 \cos(\omega t - k'z) e^{-k'z} \text{ où } k' = \sqrt{\frac{\omega}{2D}}$$

$$9^\circ) \text{ Soit } z_e \text{ t.q. : } T_0 e^{-k'z_e} = \frac{T_0}{100}$$

$$\Leftrightarrow -k'z_e = \ln\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$\Leftrightarrow z_e = \frac{\ln 100}{k'} = \ln 100 \sqrt{\frac{2k}{G\rho_s \omega}} \approx \underline{5,3 \text{ m}}$$

D'où $z_e \ll$ altitude du trijcs \Rightarrow les variations annuelles de température n'affectent pas la température des roches environnantes.

10^o). Pour $\omega = 7,2 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$ on a z_e encore plus petit, $z_e = 0,3 \text{ m}$, les variations journalières sont encore moins ressenties en profondeur.

• les variations de basse fréquence se propagent plus facilement : c'est un passé bas

$$11^\circ) \text{ En régime stationnaire : } \frac{du}{dt} = 0 \text{ d'où } dU = 0$$

$$\Leftrightarrow \delta Q_e + \delta Q_c = 0$$

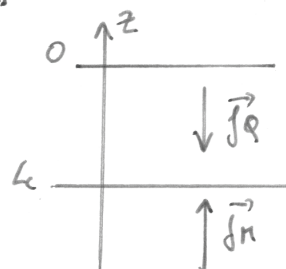
$$\Leftrightarrow \left[-\frac{\partial j_Q}{\partial z} dz \right] S dt + P dV dt = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial j_Q}{\partial z} + P = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial j_Q}{\partial z} = P_0 e^{-z/H}$$

$$12^\circ) \text{ Donc } j_Q = -P_0 H e^{-z/H} + \text{cste.}$$

$$\text{Or en } z = L_c, j_Q = -j_m$$



$$\text{Donc } -P_0 H e^{-L_c/H} + \text{cste} = -j_m$$

$$\Rightarrow \text{cste} = -j_m + P_0 H e^{-L_c/H}$$

$$\text{Donc } j_q = P_0 H [e^{-L_c/H} - e^{-z/H}] - j_m \quad (1)$$

$$\text{de plus : } j_q = -K \frac{dT}{dz} \Leftrightarrow dT = \left\{ \frac{P_0 H}{K} [e^{-z/H} - e^{-L_c/H}] + \frac{j_m}{K} \right\} dz.$$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{P_0 H}{K} \left[-H e^{-z/H} - z e^{-L_c/H} \right] + \frac{j_m z}{K} + \text{cste.}$$

$$\text{a } T(b) = \theta_0 \Rightarrow \frac{P_0 H}{K} [-H] + \text{cste} = \theta_0 \text{ d'où } \text{cste} = \theta_0 + \frac{P_0 H^2}{K}$$

$$\text{Donc } T(z) = \theta_0 + \frac{P_0 H}{K} \left[H(1 - e^{-z/H}) - z e^{-L_c/H} \right] + \frac{j_m z}{K} \quad (2)$$

13) • On a $j_s = j_q(z=0)$

$$\text{d'où } j_s = P_0 H [e^{-L_c/H} - 1] - j_m$$

14) • Comparons : j_m/k et $\frac{P_0 H}{K} e^{-L_c/H}$

$$\text{c'ad : } \begin{cases} j_m = 0,035 \text{ Wm}^{-2} \\ P_0 H e^{-L_c/H} = 1,11 \cdot 10^{-2} \text{ Wm}^{-2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } T(z) \simeq \theta_0 + \frac{P_0 H^2}{K} (1 - e^{-z/H}) + \frac{j_m z}{K}$$

$$\Rightarrow \underline{T(z=1,7\text{km}) \simeq 33^\circ\text{C}} \quad (\text{qui est proche des } 30^\circ\text{C} \text{ de l'énoncé})$$

$$\text{Et } \underline{j_s = -60 \text{ mWm}^{-2}}$$

15) l'équation de diffusion en régime stationnaire devient: $\Delta T = 0$

$$\cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

$$\cdot \text{En posant } T(x, z) = C_1 + f(x)g(z)$$

$$\Rightarrow f''g + g''f = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(z)}{g(z)} = \text{cste.}$$

Or on veut une solution oscillante en x d'où: $f'' + k^2 f = 0$

$$\Rightarrow f = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

$$\text{et } g = C e^{-kz} + D e^{kz} = C e^{-kz} \text{ afin que la solution reste bornée}$$

$$\text{Or } T(x, z) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = C_1 + (A' \cos kx + B' \sin kx) e^{-kz}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = T_s \\ B' = 0 \\ A' = T_1 \end{cases} \text{ et } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow T(x, z) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-2\pi z/\lambda} \quad \text{avec } \frac{2\pi}{\lambda} = k.$$

- On remarque que le relief a une part importante dans les variations de la température en fonction de x et aussi de z .
- Vu que $\lambda = 10 \text{ km}$ cet effet est plus important que les précédents m² pour une profondeur de l'ordre du km.

16) d'équation de chaleur étant linéaire on peut sommer les deux termes d'où :

$$T(x,z) = T_s + \frac{j_H z}{K} + \frac{P_0 H^2}{K} (1 - e^{-z/H}) + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-2\pi z/\lambda} \quad (3)$$

17) A l'ordre 1 on h on peut écrire :

$$T(x, z=h) = T(x, z=0) + h \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0}$$

$$\Rightarrow T(x, z=0) = T(x, z=h) - h \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0}$$

Or en surface : $j_s = -k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0}$

$$\text{d'où } T(x, z=0) = T(x, z=h) + \frac{j_s}{k} h.$$

$$= T_s + \frac{j_s}{k} h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$= \theta_0 + \beta z + \frac{j_s h_0}{K} \cos(2\pi x/\lambda)$$

or d'après (3) $T(x, 0) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \Rightarrow \begin{cases} T_s = \theta_0 + \beta z \\ T_1 = \frac{j_s h_0}{K} \end{cases}$

$$\text{Donc : } T(x, z) = \theta_0 + z \underbrace{\left(\frac{j_H}{K} + \beta\right)}_{C_1} + \underbrace{\frac{P_0 H^2}{K}}_{C_2} (1 - e^{-z/H}) + \frac{h_0 j_s}{K} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-2\pi z/\lambda}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = j_H/K + \beta \\ C_2 = P_0 H^2/K \quad \text{et } \delta = \frac{\lambda}{2\pi} \\ C_3 = j_s/K \end{cases}$$