

Physique : DM8

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Spectrographes à prisme et à réseau

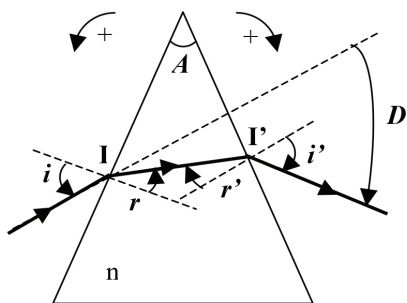


Figure 1

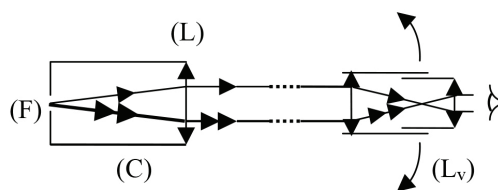


Figure 2

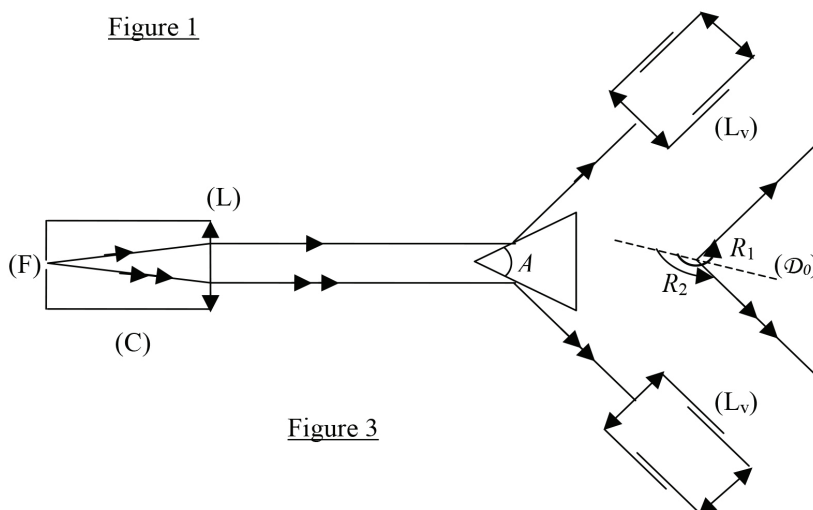


Figure 3

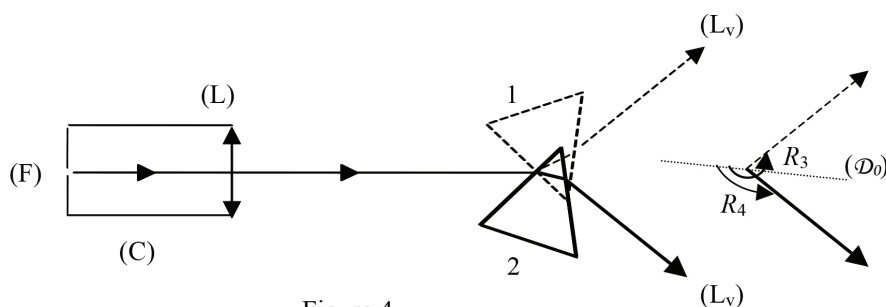


Figure 4

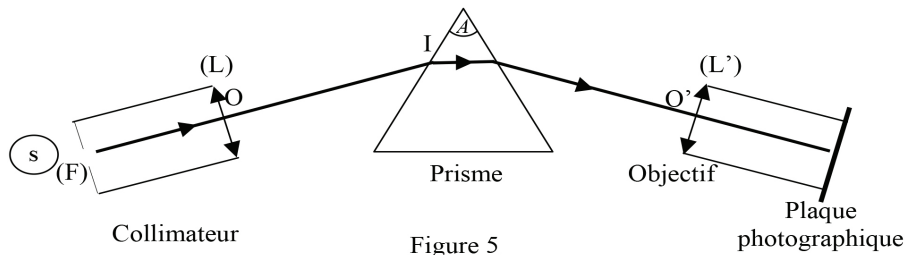


Figure 5

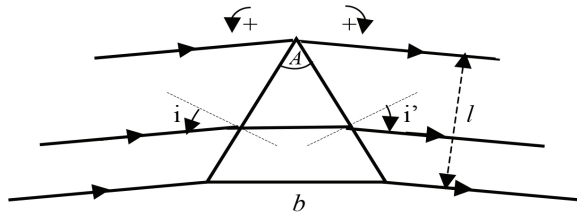


Figure 6

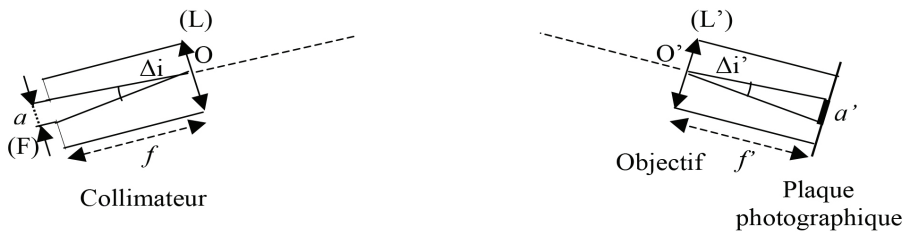


Figure 7

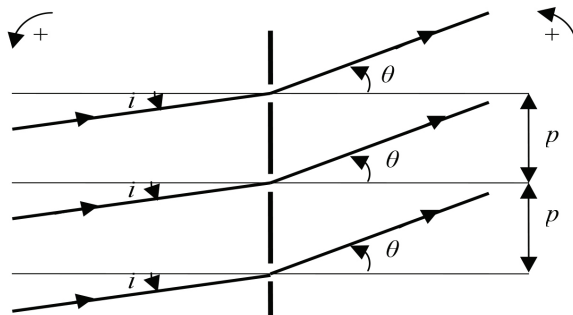


Figure 8

I. Le prisme

Un prisme, constitué par un matériau transparent, homogène, isotrope, d'indice $n(\lambda_D) > 1$ pour la radiation $\lambda_D = 589,3 \text{ nm}$ (valeur moyenne du doublet jaune du sodium), se trouve plongé dans l'air dont l'indice sera pris égal à 1.

1. Formules du prisme (cf. figure 1)

Les orientations des angles sont choisies pour que les valeurs des angles i, i', r, r' et D soient positives.

- Exprimer les lois de Snell-Descartes en fonction de i, i', r, r' et n , traduisant les réfractions à l'entrée en I et à la sortie en I' du prisme, lors du passage d'un rayon lumineux monochromatique dans le plan de section principale.
- Déterminer les relations géométriques liant les angles A, r et r' d'une part et l'angle de déviation D aux angles A, i et i' d'autre part.

2. Conditions d'émergence

En désignant par A l'angle de réfraction limite, montrer que les rayons qui pénètrent dans le prisme n'émergent qu'aux conditions suivantes :

- a. Condition sur l'angle A du prisme : $A \leq k_1 A$, où k_1 est un facteur numérique que l'on déterminera.
- b. Condition imposée à l'angle i du rayon incident :
 $i_0 \leq i \leq \pi/2$ avec $i_0 = \arcsin [k_2 \sin (A - A)]$ où k_2 est un facteur que l'on explicitera.
- c. Représenter, dans ces conditions d'émergence, les trajectoires de deux rayons lumineux entrant au même point I sous les incidences i_0 et $\pi/2$. On représentera sur les schémas les angles i_0 et A .

3. Minimum de déviation

Expérimentalement, en lumière monochromatique, on met en évidence l'existence d'un minimum de déviation, noté D_m , quand l'angle d'incidence i varie. Le tracé du rayon lumineux est alors symétrique par rapport au plan bissecteur de l'angle A du prisme. Préciser dans le cas de cette déviation minimale :

- a. Les relations entre les angles i et i' d'une part, puis r et r' d'autre part.
- b. Expliciter la relation donnant l'indice n en fonction de l'angle A du prisme et de la déviation minimale D_m .
- c. Lorsque les mesures des angles A et D_m s'effectuent avec les incertitudes absolues ΔA et ΔD_m , déterminer l'expression de l'incertitude relative $\Delta n/n$ sur l'indice n du prisme.

4. Mesure de l'indice n

L'indice du prisme peut être calculé en mesurant l'angle A du prisme et l'angle de déviation minimale D_m (pour la radiation λ_D) à l'aide d'un goniomètre. Le prisme est disposé sur la plate-forme du goniomètre, plate-forme qui comprend un collimateur (C) et une lunette de visée (L_v) (cf. figure 2). Le collimateur est constitué par une fente (F) placée au foyer objet d'une lentille (L) et éclairée par la radiation monochromatique. La lunette (L_v), munie d'un réticule, est réglée sur l'infini et permet donc d'observer l'image de la fente. Le centre du réticule de la lunette doit coïncider avec l'image de la fente pour effectuer la lecture sur le cercle, gradué au demi-degré (de 0° à $359,5^\circ$), du goniomètre. Un vernier au $1/30$ est utilisé dans le repérage des positions angulaires de la lunette de visée, depuis une direction arbitraire de référence (\mathcal{D}_0).

a. Mesure de A

Le prisme, fixe sur la plate-forme, est éclairé par le collimateur (C). Les images de la fente (F) formées par les rayons qui se réfléchissent sur les deux faces de l'angle A du prisme sont repérées par la lunette (L_v) (cf. figure 3). Les repérages des deux positions donnent :

$$R_1 = 245^\circ 10' \text{ et } R_2 = 125^\circ 18'$$

- a.1. En déduire la valeur de l'angle A du prisme. (On pourra faire intervenir les angles d'incidence du faisceau issu du collimateur sur les deux faces du prisme et calculer leur somme en fonction de l'angle A).
- a.2. Donner la valeur de ΔA (en minute d'arc) sachant que chaque lecture de position est définie à deux graduations près du vernier.

b. Mesure de D_m

Pour mesurer la déviation minimale D_m , on observe à la lunette l'image de la fente quand la radiation a traversé le prisme en position 1 (cf. figure 4). Cette position correspond au minimum de déviation pour le rayonnement monochromatique. On recommence la même expérience dans une position 2 du prisme. Les lectures correspondant aux deux positions de la lunette sont alors :

$$R_3 = 233^\circ 58' \text{ et } R_4 = 136^\circ 14'$$

- b.1. Comment peut-on repérer la position 1 ou 2 du prisme au minimum de déviation pour la radiation monochromatique ?
- b.2. En déduire la valeur de la déviation minimale D_m .

c. Détermination de n

Calculer, à partir des valeurs de A et D_m , l'indice n pour la radiation de longueur d'onde λ_D .

d. Incertitude relative sur n

d.1. Dans le cas où : $\Delta A = \Delta D_m = \varepsilon$, montrer que l'incertitude relative sur n , définie en (3.c),

devient : $\frac{\Delta n}{n} = k_3 \varepsilon \cot \frac{A}{2}$ où k_3 est un facteur numérique que l'on déterminera.

d.2. Calculer alors $\frac{\Delta n}{n}$.

e. Exprimer le résultat de la mesure de l'indice du prisme sous la forme : $n \pm \Delta n$

II. Le spectrographe à prisme

Un spectrographe à prisme est constitué (cf. figure 5):

- d'un collimateur composé d'une fente (F), éclairée par une source (S) et placée dans le plan focal objet d'une lentille mince achromatique (L).
- d'un prisme en verre dont l'indice varie avec la longueur d'onde suivant la loi empirique de Cauchy qui s'écrit dans le domaine du visible :

$$n = \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2} \quad \text{avec} \quad \alpha = 1,5973 \quad \text{et} \quad \beta = 0,0106 \mu\text{m}^2$$

- d'un objectif achromatique assimilé à une lentille mince (L'), qui donne sur une plaque photographique, située dans le plan focal image de (L'), le spectre de la lumière émise par la source (S).

Données numériques : Les distances focales images des lentilles (L) et (L') sont respectivement $f = 20$ cm et $f' = 100$ cm

1. A quoi sert ce spectrographe à prisme et qu'est-ce qui le différencie d'un spectroscopie et d'un spectromètre ?

2. Tracé de rayons lumineux

La figure 5 représente la marche, à travers le prisme et l'objectif, d'un rayon lumineux incident OI pour la longueur d'onde λ_1 . Reproduire cette figure et tracer la marche d'un rayon incident OI de longueur d'onde λ_2 légèrement supérieure à λ_1 .

3. Variation de la déviation D_m

Le prisme est réglé au minimum de déviation pour une longueur d'onde λ donnée.

a. Montrer que la variation de D_m avec l'indice n du prisme s'exprime par :

$$\frac{dD_m}{dn} = 2 \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A + D_m}{2}}$$

b. En déduire le pouvoir dispersif angulaire $\frac{dD_m}{d\lambda}$ en fonction des angles A , D_m et de la

dispersion du verre $\frac{dn}{d\lambda}$.

4. Doublet jaune du sodium

La lumière émise par la source (S) est composée des deux seules radiations jaunes du sodium de longueurs d'onde voisines λ_1 et $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$.

- Le passage d'une radiation de longueur d'onde λ à $\lambda + d\lambda$ entraîne, au minimum de déviation, une variation dD_m de la déviation. Exprimer dD_m en fonction de A , D_m , β , λ et $d\lambda$.
- Déterminer, sur la plaque photographique, la distance d_p séparant les images F'_1 et F'_2 de la fente (F) éclairée par les deux radiations du sodium.
- Calculer d_p numériquement.

Données numériques : Na : $\lambda_1 = 589,0$ nm et $\lambda_2 = 589,6$ nm

III. Le réseau par transmission

Considérons un réseau plan constitué de N fentes identiques, fines et parallèles. On pose p le « pas » de ce réseau utilisé par transmission.

- Citer un autre type de réseau et les modifications qu'un réseau est susceptible d'apporter à une onde incidente plane.

2. Relation fondamentale des réseaux

Le réseau est éclairé par un faisceau parallèle, monochromatique, de longueur d'onde λ , sous une incidence i . Le faisceau est diffracté à l'infini dans la direction θ . Les angles i et θ mentionnés (cf. figure 8) sont positifs.

- Exprimer la différence de marche δ entre deux rayons homologues séparés d'une distance p dans le plan du réseau.
- Déterminer les directions θ_k des maximums principaux d'ordre k .

3. Dénombrement des maximums principaux

On suppose que le spectre de raies des radiations du mercure est limité par les radiations violette ($\lambda_v = 400$ nm) et rouge ($\lambda_r = 700$ nm).

- Déterminer les ordres observables, sous une incidence de 30° , pour ces deux radiations et avec un réseau de « pas » $p = 2$ μm .
- A partir de quel ordre se produit le recouvrement des spectres ? Justifier votre réponse.

IV. Le spectrographe à réseau

On transforme le spectrographe à prisme en substituant au prisme un réseau de « pas » $p = 2$ μm . Le faisceau sortant du collimateur éclaire complètement le réseau par transmission sous une incidence i . Ce réseau peut tourner autour d'un axe parallèle aux fentes et le spectre obtenu est projeté à l'aide de la lentille (L') sur une plaque photographique ou un écran situé dans le plan focal image de (L').

1. Minimum de déviation

Pour une longueur d'onde λ donnée et un ordre k fixé, on désigne par $D = \theta_k - i$, la déviation entre la direction du faisceau incident reçu par le réseau et la direction du faisceau diffracté.

- a. En faisant tourner le réseau autour d'un axe parallèle à ses traits, la déviation D passe par une valeur minimale D_m pour une valeur particulière i_m de l'angle d'incidence i . Déterminer i_m en fonction de θ_{km} .
- b. Exprimer la relation fondamentale des réseaux (définie en III.2.b) en fonction de la déviation minimale D_m .
- c. En déduire la valeur de i_m , à l'ordre 1, pour la radiation jaune de longueur d'onde moyenne $\lambda = 578,05$ nm du doublet du mercure.

2. Dispersion angulaire, dispersion linéaire

Le réseau est maintenant orthogonal au faisceau incident issu du collimateur.

- a. Pour deux radiations de longueurs d'onde voisines λ et $\lambda + d\lambda$ qui tombent sur le réseau, exprimer la dispersion angulaire $\frac{d\theta_k}{d\lambda}$ en fonction de k , p et θ_k .
- b. En déduire la dispersion linéaire $\frac{dX_k}{d\lambda}$ sur la plaque photographique perpendiculaire à la direction moyenne des rayons diffractés dans l'ordre k .
- c. Calculer la valeur de $\frac{dX_k}{d\lambda}$, exprimée en mm.nm^{-1} , à l'ordre 1, pour la longueur d'onde moyenne $\lambda = 578,05$ nm.