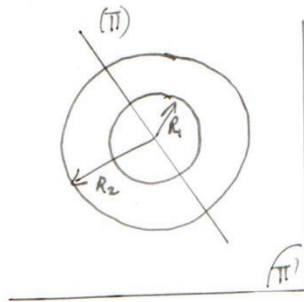


## Physique : DM7

## A - Le câble coaxial (CCP 2011 - PSI)

I) ModélisationA - Capacité linéique  $C$ 

①



- $\Pi$  et  $\Pi'$  sont plans de symétrie  $\Rightarrow \vec{E} = E \vec{u}_r$
  - Symétrie cylindrique :  $E = E(r)$
- $$\left. \begin{array}{l} \vec{E} = E(r) \vec{u}_r \end{array} \right\}$$

② Pour  $R_1 < r < R_2$  :  $E \cdot 2\pi r l = Q / \epsilon_0$  Surface de Gauss : cylindre de rayon  $r$  longueur  $l$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r l} \vec{u}_r$$

③ On a  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM}$   $\Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 l} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)$

④ D'où  $C_l = \frac{Q}{V_1 - V_2} \Leftrightarrow C_l = \frac{2\pi \epsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)} \Rightarrow C = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}$

⑤ Soit  $C = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln(R_2/R_1)} \approx 1,1 \cdot 10^{-10} \text{ F.m}^{-1}$

B) - Inductance linéique  $L$ :

⑥  $\vec{j}_{sr}$  s'exprime en  $\text{A.m}^{-1}$

⑦  $\Pi$  est plan de symétrie  $\Rightarrow \vec{B} = B \vec{u}_\theta$ , symétrie cylindrique :  $B = B(r) \Rightarrow \vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$

⑧ Contour cercle de rayon  $r$  t.q :  $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_0 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{9} \quad \text{Soit } W_m &= \iint \frac{B^2}{2\mu_0} dV \\
 &= \frac{(\mu_0 I_0)^2}{4\pi^2} \iint \frac{\lambda dr d\theta dz}{2\mu_0 r^2} \\
 &= \frac{\mu_0 I_0^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \cdot l \cdot 2\pi \\
 \Rightarrow W_m &= \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi} l \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{10} \quad \text{Or } W_m = \frac{1}{2} L I_0^2 \Rightarrow \underline{L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln(R_2/R_1)}$$

$$\textcircled{11} \quad \text{D'où : } L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(R_2/R_1) \approx 3,2 \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$$

## II Onde en et impédance du câble coaxial

$\textcircled{12}$  d'onde est progressive suivant les z croissants, elle n'est pas plane car  $E$  dépend de  $r$

$\textcircled{13}$   $E_0$  s'exprime en  $\text{V.m}^{-1}$ ,  $E_0$  est maximal en  $r = R_1$ , d'où

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(r, z, t) &= \frac{E_0 R_1}{r} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_r \\
 &= E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_r \text{ en } r = R_1 \Rightarrow \underline{d = E_0 R_1}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{14} \quad \text{Soit } \text{div } \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} \Leftrightarrow e = - d\phi/dt$$

$$\text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\delta \vec{E}}{\delta t} \quad (\text{Maxwell - Ampère qui couple les champs } \vec{E} \text{ et } \vec{B})$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{15} \quad \text{Soit } \text{rot}(\text{rot } \vec{E}) &= - \frac{d}{dt} (\text{rot } \vec{B}) \Leftrightarrow - \Delta \vec{E} = - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\delta^2 \vec{E}}{\delta t^2} \\
 &\Leftrightarrow \underline{\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 \vec{E}}{\delta t^2}}
 \end{aligned}$$

Donc  $k^2 = \omega^2/c^2$  milieu non dispersif t.q  $\omega = kc$

$$(16) \text{ Soit rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} & E_r(r, z) (\vec{u}_r) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} & r E_\theta = 0 (\vec{u}_\theta) - j k \cdot \frac{\alpha}{r} e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial z} & E_z = 0 (\vec{u}_z) \end{cases} \vec{u}_\theta = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - j \omega \vec{B}$$

$$\text{D'où } \vec{B} = \frac{\alpha}{\omega c} e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_\theta \text{ ou } k = E_0 R_1$$

### (B) Puissance transportée

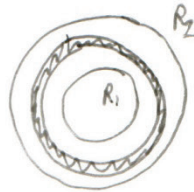
$$(17) \text{ On le calcule au "réels" } \Rightarrow \vec{\Pi} = \frac{\alpha^2}{r^2 c \mu_0} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z$$

$$(18) \text{ Soit } \langle dP \rangle = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot dS$$

$$\Rightarrow \langle dP \rangle = \frac{\alpha^2}{2r^2 c \mu_0} \cdot 2\pi r dr$$

$$\Rightarrow \langle dP \rangle = \frac{\alpha^2 \pi}{\mu_0 c} \cdot \frac{dr}{r}$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{\alpha^2 \pi}{\mu_0 c} \ln R_2 / R_1$$



$$\text{Si } \langle P \rangle = 10 \text{ W alors } E_0 = 109 \text{ kV.m}^{-1}$$

### (C) Etude de l'interface $r = R_1$

$$(19) \text{ Soit } E_m(R_1^+) - E_m(R_1^-) = \sigma / \epsilon_0$$

$$\Leftrightarrow E_0 \cos(\omega t - kz) = \sigma / \epsilon_0$$

$$\Leftrightarrow \sigma = \epsilon_0 E_0 \cos(\omega t - kz)$$

$$(20) \text{ On a } B_z(R_1^+) - B_z(R_1^-) = \mu_0 j s_1 \Leftrightarrow \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) = \mu_0 j s_1$$

$$\Leftrightarrow \vec{j}_{s1} = \frac{E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_z$$

① Impédance du câble coaxial.

②.1) Soit  $\underline{u} = \underline{V}_1 - \underline{V}_2$

Si on pose  $\underline{B} = \text{rot} \underline{A}$  alors  $\text{rot} \underline{E} = - \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \underline{A})$

d'où  $\underline{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$

Donc  $\int_{R_1}^{R_2} \underline{E} \cdot d\vec{l} = -(V_2 - V_1) - 0$ .

d'où  $\underline{u} = \int_{R_1}^{R_2} E dr \Leftrightarrow \underline{u} = \alpha \ln(R_2/R_1) e^{j(\omega t - kz)}$

②.2) Soit  $di = j_s \cdot dl \Rightarrow i = 2\pi R_1 j_s$

$\Rightarrow i = \frac{2\pi R_1 \epsilon_0}{\mu_0 c} e^{j(\omega t - kz)}$

②.3) Soit  $\underline{Z}_c = \frac{u}{i} = \frac{\alpha \ln(R_2/R_1) \mu_0 c}{2\pi \alpha}$

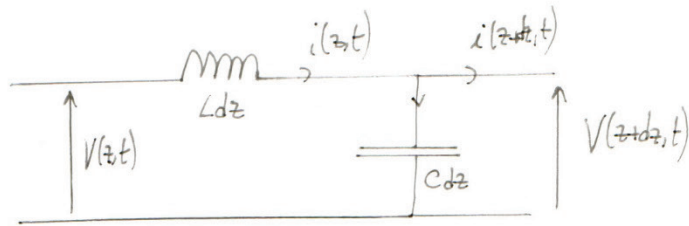
$\Rightarrow \underline{Z}_c = \frac{\mu_0 c \ln(R_2/R_1)}{2\pi}$

or  $\frac{L}{C} = \frac{\frac{\mu_0}{2\pi} \ln(R_2/R_1)}{2\pi \epsilon_0} \ln(R_2/R_1) = \frac{\mu_0}{4\pi^2 \epsilon_0} (\ln R_2/R_1)^2 = \mu_0^2 c^2 \frac{1}{4\pi^2} \ln^2(R_2/R_1)$

$\Rightarrow \underline{Z}_c = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln(R_2/R_1) = \sqrt{\frac{L}{C}}$  où  $\mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

②.4) Soit  $\underline{Z}_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} \ln(R_2/R_1)} = \underline{55 \Omega}$

## III) Propagation et réflexion des ondes dans le câble coaxial



25) On néglige l'aspect résistif des matériaux.

26) Soit  $i_z = i_{z+dz} + Cdz \cdot \frac{\partial V}{\partial t}$  et  $V_z = V_{z+dz} + Ldz \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$ .

$$\Leftrightarrow C \frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{\partial i}{\partial z}$$

$$\Leftrightarrow - \frac{\partial V}{\partial z} = L \frac{\partial i}{\partial t}$$

27)

Donc  $C \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) = - \frac{\partial^2 i}{\partial z^2}$  et  $- \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) = L \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$

donc  $-\frac{1}{C} \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = -L \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$  d'où  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$  où  $c^2 = \frac{L}{C}$

$$\text{de m} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \times \frac{1}{c^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

la solution générale est  $V(z,t) = V_i(t-z/c) + V_r(t+z/c)$

28) les CL sont  $\begin{cases} V(0,t) = V_0 \\ V(L,t) = 0 \end{cases}$

D'où  $\begin{cases} \frac{V_{im} + V_{rm}}{e^{jkt}} = V_0 \\ V_{im} e^{-jkl} + V_{rm} e^{jkl} = 0 \end{cases}$

Donc  $V_{im} e^{-jkl} + (V_0 - V_{im}) e^{jkl} = 0 \Leftrightarrow V_{im} (e^{-jkl} - e^{jkl}) = -V_0 e^{jkl}$

$$\Leftrightarrow V_{im} = \frac{V_0 e^{jkl}}{e^{jkl} - e^{-jkl}}$$

et  $V_{rm} = - \frac{V_0 e^{-jkl}}{e^{jkl} - e^{-jkl}}$

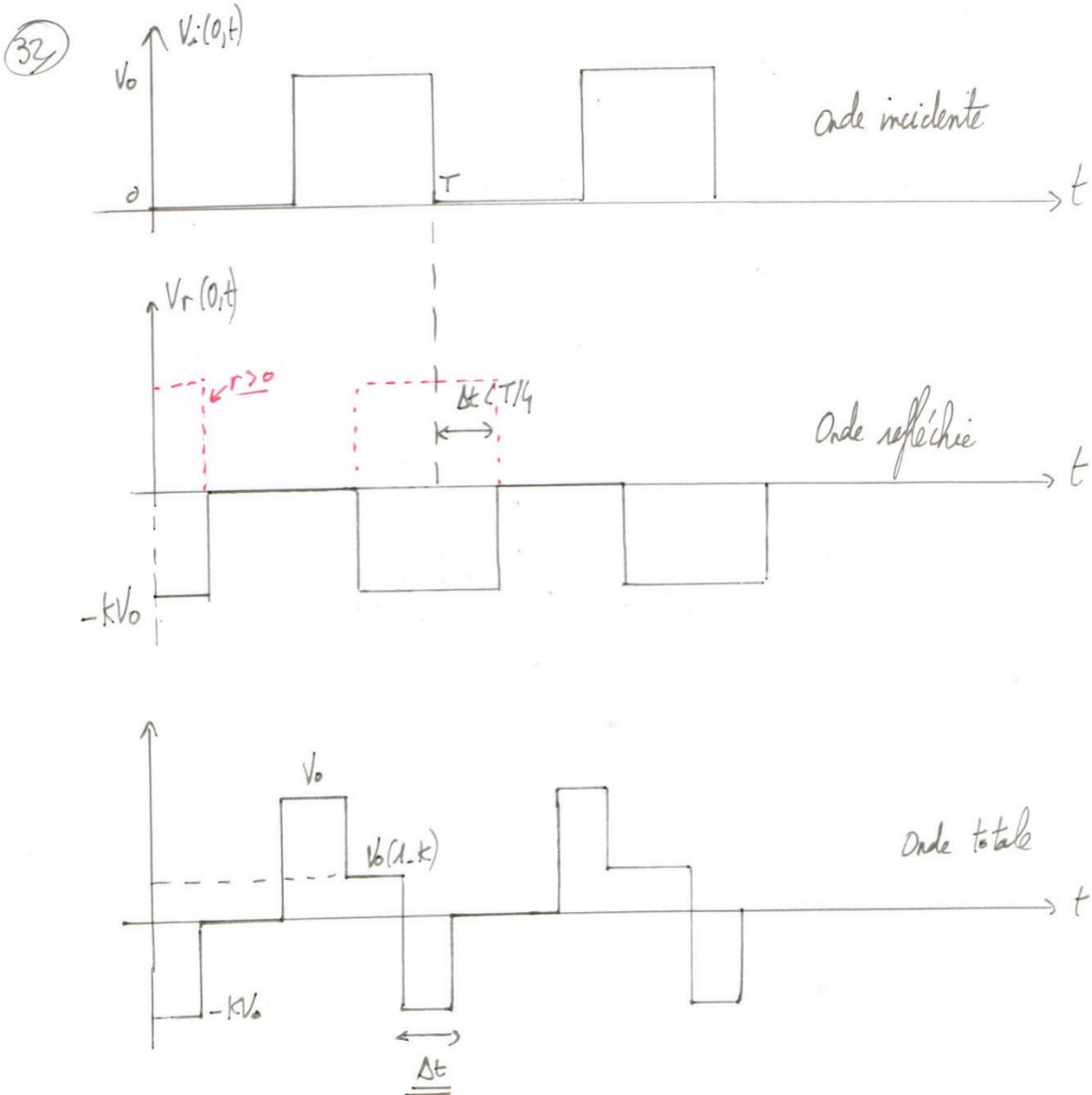
29) Soit  $r = \frac{V_r(l,t)}{V_i(l,t)} = -1$  si  $R=0$

30) Cette fois  $i(l,t) = 0 \Rightarrow r = 1$

31) On a la fonction  $r(R)$  t.q  $r(0) = -1$  continue  $\Rightarrow$  il existe valeur  $r(R_c) = 0$   
 $r(\infty) = 1$  t.q  $R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$

IV) Etude expérimentale

32)  $Z_{int}(GAF) = 50 \Omega$



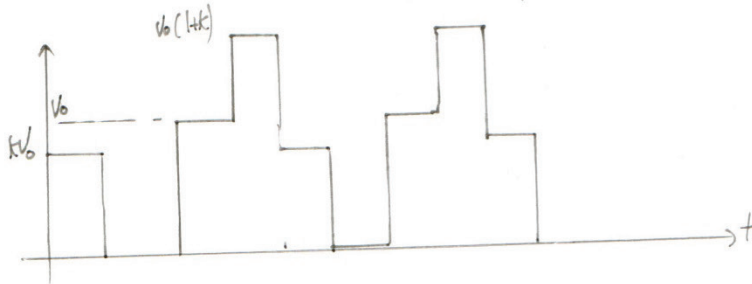


(34)

On mesure  $\Delta t = 1,2 \mu\text{s}$ . or  $\Delta x = 200 \text{ m}$ 

$$\Rightarrow c = \frac{200}{1,2 \cdot 10^{-6}} = 1,7 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

$$\text{Or } c = \sqrt{\frac{L}{C}} \approx 1,7 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} \quad (\text{on vérifie aussi } c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \text{ avec } \epsilon_r = 3,1)$$

(35) En repérant bien le OV on obtient :  $\frac{KV_0}{V_0} = \frac{3}{3,5} \approx 0,85 \Rightarrow \underline{K \approx 0,85}$  ou  $r = -0,85$ (36) Pour  $R = 20 \Omega$ , on obtient  $K = 2/19 \Rightarrow K \approx 0,11$  ou  $r = -0,11$   
 Pour  $R = 40 \Omega$ , ———  $K = 2/20 \Rightarrow K = 0,1$  ou  $r = -0,10$ .des graphes suivants correspondent à  $r$  positif d'où la forme suivantePour  $R = 60 \Omega$  on obtient  $K = 2/20 \Rightarrow r = +0,10$ Pour  $R = 80 \Omega$  ———  $K = 4/18 \Rightarrow r = +0,22$ .

- (37) • Pour  $R_c = 50 \Omega$  ce qui est logique car  $r = 0$  est compris entre  $R = 40 \Omega$  et  $60 \Omega$ .
- Quand l'onde de retour revient sur le GBF, la résistance vue est la résistance interne du GBF qui est égale à la résistance critique.

## B - Le haut-parleur (CCP 2016 - PC)

A.1.1) La source fournit un signal électrique qui met en mouvement mécanique la membrane d'où le nom de convertisseur de puissance électrique en puissance mécanique

A.1.2.1) Le circuit mobile est placé dans une zone de champ magnétique, il peut donc y avoir une variation de flux magnétique.



A.1.3) On a 
$$d\vec{f}_L = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$$= I d\vec{u}_\theta \wedge B \vec{u}_r \Rightarrow d\vec{f}_L = -iB dl \vec{u}_z$$

A.1.4) Soit 
$$m \frac{d\vec{u}_z}{dt} = \underbrace{-iBl \vec{u}_z}_{\text{Laplace}} - \underbrace{kz \vec{u}_z}_{\text{Rappel élastique}} - \underbrace{d\vec{u}}_{\text{frottement visqueux}}$$
 (3)

A.2.1) En notation complexe: 
$$-m\omega^2 \underline{z} = -iBl - k\underline{z} - d(j\omega)\underline{z}$$
 (1)

$$\underline{u} = Ri + jL\omega i - Bl(j\omega)\underline{z}$$
 (2)

A.2.2) (2)  $\Rightarrow \underline{z} = \frac{\underline{u} - Ri - jL\omega i}{-j\omega Bl}$  d'où (1): 
$$[-m\omega^2 + k + d(j\omega)] \frac{(\underline{u} - Ri - jL\omega i)}{-j\omega Bl} = -iBl$$

Donc 
$$\underline{u} (-m\omega^2 + k + d(j\omega)) = i [j\omega B^2 l^2 + (R + jL\omega) (-m\omega^2 + k + d(j\omega))]$$

Donc 
$$\underline{z} = \frac{j\omega B^2 l^2}{-m\omega^2 + k + d(j\omega)} + R + jL\omega \Leftrightarrow \underline{z} = R + jL\omega + \frac{B^2 l^2}{d + \frac{k}{j\omega} + m(j\omega)}$$

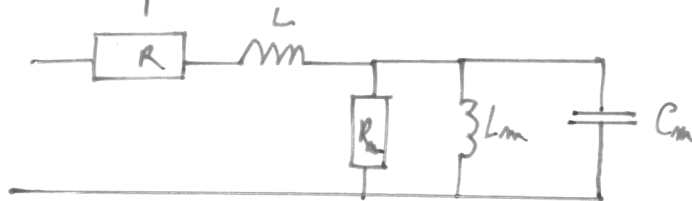


A.2.3) On remarque que  $\underline{Z}_e = R + jL\omega$  et  $\underline{Z}_m = \frac{B^2 l^2}{\lambda + m(j\omega) + k/j\omega}$

A.2.4) Donc  $\underline{Y}_m = \frac{\lambda + m(j\omega) + k/j\omega}{B^2 l^2} = \frac{\lambda}{B^2 l^2} + (j\omega) \frac{m}{B^2 l^2} + \frac{k}{B^2 l^2} \left( \frac{1}{j\omega} \right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_m = B^2 l^2 / \lambda = 16 \Omega \\ C_m = m / B^2 l^2 = 250 \mu F \\ L_m = B^2 l^2 / k = 12,8 \text{ mH} \end{cases}$$

A.2.5)  $\underline{Z}_m$  est une association en parallèle et  $\underline{Z}_e$  en série d'où :



A.2.6) On a donc  $\underline{Z} = \underline{Z}_e + \frac{1}{\underline{Y}_m} = R + jL\omega + \frac{1}{\frac{1}{R_m} + j(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega})}$

$$= R + jL\omega + \frac{1/R_m - j(C_m\omega - 1/L_m\omega)}{(1/R_m)^2 + (C_m\omega - 1/L_m\omega)^2}$$

D'où  $R_T = \text{Re}(\underline{Z}) = R + \frac{1/R_m}{(1/R_m)^2 + (C_m\omega - 1/L_m\omega)^2}$

$$\Leftrightarrow R_T = R + \frac{R_m}{1 + R_m^2 \left( C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega} \right)^2} \quad \text{CQFD}$$

A.2.7) On a  $R = R_T(\omega) = 8 \Omega$  et  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{550}{2\pi} \approx 89 \text{ Hz}$   
 $f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_m C_m}} \approx 89 \text{ Hz}$  } Cohérence des résultats

$$A.3.1) \text{ de } \begin{cases} A.1.2.2 : Blv_i = \mu i - Ri^2 - iL \frac{di}{dt} & \textcircled{a} \\ A.1.4 : Blv_i = -kz \frac{dz}{dt} - \lambda v^2 - m v \frac{dv}{dt} & \textcircled{b} \end{cases}$$

$$\textcircled{a} \Rightarrow \mu i = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) - Blv_i \Rightarrow \begin{cases} P_J = Ri^2 \\ P_L = -Blv_i \\ E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} Li^2 \end{cases} \begin{array}{l} \text{effet Joule} \\ \text{Puissance des Frottements} \\ \text{Energie stockée dans bobine} \end{array}$$

$$A.3.2) \textcircled{b} \Rightarrow -Blv_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) + \lambda v^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} k z^2 \right) \Rightarrow \begin{cases} P_A = \lambda v^2 \\ P_L = -Blv_i \\ E_c = \frac{1}{2} m v^2 \\ E_{pe} = \frac{1}{2} k z^2 \end{cases} \begin{array}{l} \text{Puissance acoustique} \\ \text{(frottements de l'air)} \\ E \text{ cinétique} \\ E_p \text{ élastique} \end{array}$$

A.3.3) En éliminant  $P_L$ :

$$\mu i = \frac{d}{dt} E_{\text{mag}} + P_J + \frac{dE_m}{dt} + P_A \quad \text{ou } E_m = E_c + E_{pe}$$

$$A.3.4) \text{ Donc } \langle \mu i \rangle = \langle P_J \rangle + \langle P_A \rangle + \left\langle \frac{dE_m}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{dE_{\text{mag}}}{dt} \right\rangle$$

$$\text{or } \left\langle \frac{dE_{\text{mag}}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{2} Li^2(T) - \frac{1}{2} Li^2(0) \right] = 0 \quad \text{car } i(T) = i(0)$$

De même pour  $\frac{dE_m}{dt}$  car  $v(T) = v(0)$  et  $z(T) = z(0)$

$$\text{Donc } \langle P_S \rangle = R \langle i^2 \rangle + \lambda \langle v^2 \rangle \quad \text{ceff}$$

• la production de l'onde sonore est liée au frottement de l'air sur la membrane

$$\text{d'où } \langle P_A \rangle = \lambda \langle v^2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{\langle P_A \rangle}{\langle P_S \rangle}$$