

Physique : DM5

Le tore (Mines PSI/MP 2014)

II - Etude d'un conducteur ohmique torique

⑥ ϵ_0 : permittivité du vide t.q $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$

⑦ soit : $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

or $\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \text{et } \vec{j} = \gamma \vec{E} \end{cases} \Rightarrow \text{div } \vec{j} = \rho \gamma / \epsilon_0$

Donc $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho / \tau = 0$ ou $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma} = 10^{-19} \text{ s}$

$\Rightarrow \rho = \rho(0) e^{-t/\tau}$ avec $\tau = 10^{-19} \text{ s}$

$\Rightarrow \underline{\rho \rightarrow 0 \text{ au bout de qq } \tau}$

⑧ Dans le cadre de l'ARQS magnétique $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ll \vec{j}$.

$\Rightarrow \underline{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$

En effet en ordre de grandeur $\left\{ \begin{array}{l} \frac{B}{a} = \mu_0 \left(j + \epsilon_0 \frac{E}{\tau} \right) \quad \text{①} \\ \text{et} \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} E/a = B/\tau \quad (\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \quad \text{②} \end{array} \right\}$

or $\vec{j} = \gamma \vec{E} \Rightarrow \gamma \gg \frac{\epsilon_0}{\tau} \Leftrightarrow \underline{\tau \gg \tau}$

⑨ En régime permanent : $\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \rightarrow 0 \\ \text{rot } \vec{E} = \vec{0} \end{cases}$

D'où $\vec{E} = -\text{grad } V \Rightarrow \underline{\Delta V = 0}$

$$\textcircled{10} \text{ Soit } \begin{cases} \frac{d^2 V}{d\theta^2} = 0 \\ V(0) = U \\ V(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow V = A\theta + B \Rightarrow V = U + \theta \frac{(-U)}{\alpha}$$

$$\Rightarrow V = U \frac{\alpha - \theta}{\alpha}$$

$$\text{Donc } \vec{E} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{E} = \frac{U}{\alpha r} \vec{u}_\theta \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} = \frac{\partial U}{\alpha r} \vec{u}_\theta \end{cases}$$

$$\textcircled{11} \text{ Soit } I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{\gamma U}{\alpha} \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^c dz \Leftrightarrow \frac{\gamma c U \ln \frac{b}{a}}{\alpha} = I$$

$$\text{et } R = \frac{U}{I} = \frac{\alpha}{\gamma c} \frac{1}{\ln(b/a)}$$

$$\textcircled{12} \text{ On a : } R = \frac{L}{\gamma S} \quad \text{or } \ln \frac{b}{a} = \ln \left(1 + \frac{b-a}{a} \right) \approx \frac{b-a}{a}$$

$$\text{d'où } R = \frac{\alpha}{\gamma c} \cdot \frac{a}{b-a}$$

$$\text{or } S = c(b-a) \Rightarrow R = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{a}{S}$$

$$\text{et } L = \alpha a \Rightarrow R \approx \frac{L}{\gamma S} \quad \text{CQFD}$$

11) Etude d'une pièce ampèremétrique

13) Dans le cas de l'AROS magnétique on néglige les phénomènes de propagation
t.q: $\tau \ll T$ ou $\tau = \frac{a}{c}$ avec a : taille caractéristique du système

or (a) et (b) donnent

$$\begin{aligned} \frac{B}{a} &= \mu_0 j + \epsilon_0 \frac{Ba}{T^2} \\ &= \mu_0 j + \frac{Ba}{c^2 T^2} \\ &= \mu_0 j + Ba \cdot \left(\frac{\tau}{T}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{B}{a} = \mu_0 j \text{ si } \tau \ll T$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \text{ si } \tau \ll T}$$

14) On a invariance par révolution autour de Oz : $\Rightarrow B(r, z)$
le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie d'où $\vec{B} = B(r, z) \vec{u}_\theta$

$$\text{Donc } \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i + Ni)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} (i + Ni) \vec{u}_\theta}$$

15) Pour une spire: $\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0}{2\pi} (i + Ni) \ln\left(\frac{b'}{a}\right) \cdot c$

d'où pour le tor: $\Phi = \frac{\mu_0 N}{2\pi} (i + Ni) c \ln(b'/a)$

or $\Phi = Li + Mi$ d'où

$$\begin{cases} L = NM = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} c \ln(b'/a) \\ M = \frac{\mu_0 N}{2\pi} c \ln(b'/a) \end{cases} \text{ où } b' = a + b$$

$$(16) \text{ Soit } \lambda = \frac{dR}{dl}$$

$$\Rightarrow R = \lambda l$$

$$\Rightarrow R_p = N \times \lambda \times (2c + 2(b-a))$$

$$\Rightarrow \underline{R_p = 2\lambda N(b+c-a)}$$

$$(17) \text{ Soit } u = R_p i_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = 0 \text{ en circuit fermé.}$$

$$\Leftrightarrow R_p \underline{i_1} + j\omega (L \underline{i_1} + M \underline{i_2}) = 0 \Leftrightarrow \underline{i_1} (R_p + j\omega L) = -M j\omega \underline{i_2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\frac{i_1}{i_2}} = - \frac{j\omega M}{R_p + j\omega L} = \underline{H}$$

$$(18) \text{ Il faut que } \underline{i_1} = k \underline{i_2} \text{ donc } \underline{L\omega} \gg R_p.$$

$$\Leftrightarrow \omega \gg R_p/L$$

$$\text{Dans ce cas: } \underline{\frac{i_1}{i_2}} = - \frac{M}{L} = -N$$