Physique : DM n°2

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

A – Etude thermique d'un bâtiment

Avec les nouvelles normes environnementales et les diagnostics de performance énergétique des bâtiments, la cartographie thermique permet de localiser les zones de déperdition thermique les plus importantes.

On peut ensuite cibler les travaux d'isolation à effectuer en toute connaissance de cause. L'isolation peut s'effectuer par l'intérieur ou l'extérieur avec des matériaux adéquats.

On pourra alors vérifier, à réception des travaux, l'efficacité de ces derniers.

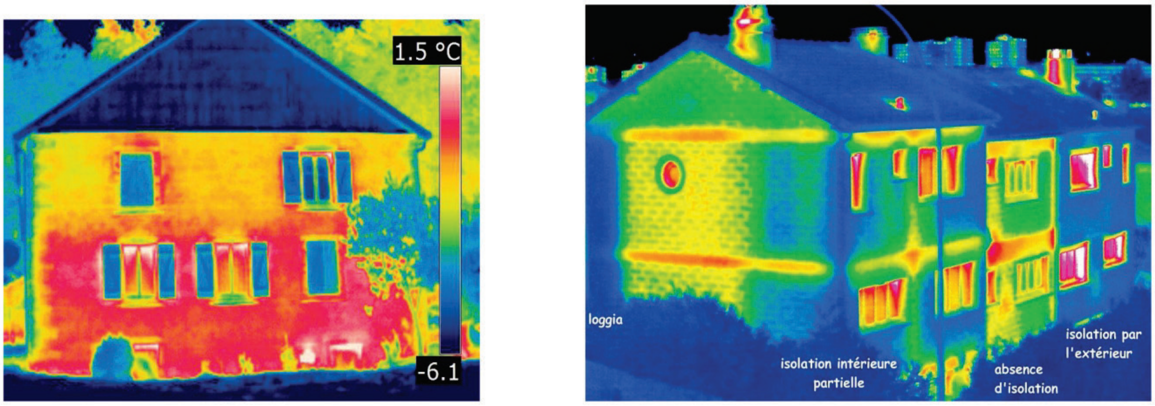

FIGURE 1 – Thermographie infrarouge.

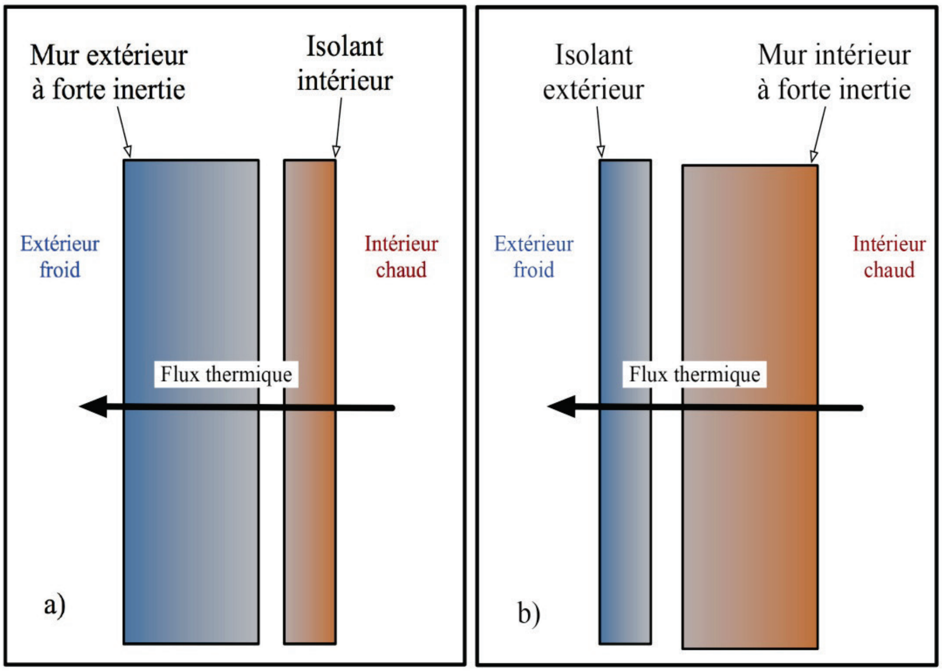

FIGURE 2 – Isolation a) par l'intérieur ou b) par l'extérieur.

Préambule

I.1. Modélisation de la pièce

On étudie une pièce parallépipédique de longueur $a = 8$ m, de largeur $b = 5$ m, de hauteur $h = 2,5$ m et possédant un radiateur électrique de puissance maximale $P = 2$ kW. Dans l'ensemble du problème, la pièce sera supposée parfaitement isolée au niveau du sol et du plafond. La capacité thermique volumique de l'air est $C_v = 1,25 \cdot 10^3$ SI. On suppose ici que la pièce est parfaitement calorifugée.

I.1.a. Quelle est l'unité de la capacité thermique volumique ?
Quelle est la valeur de la capacité thermique C de la pièce ?

I.1.b. À l'aide d'un bilan d'énergie thermique appliqué à la pièce, établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la température $T(t)$ dans la pièce en fonction de C et de P.

I.1.c. Résoudre l'équation sachant que la température initiale de la pièce est $T_0 = 10$ °C.
Tracer $T(t)$.
Déterminer la durée nécessaire pour atteindre la température finale $T_f = 20$ °C.

I.1.d. Proposer un modèle électrique simple conduisant à une équation différentielle du même type.
Préciser quelles sont les grandeurs électriques associées aux grandeurs thermodynamiques que sont $T(t)$, C et P.
Dessiner le montage électrique analogue.

I.2. Influence des murs

La pièce est constituée d'une enceinte en béton d'épaisseur $L = 15$ cm et de masse volumique $\rho = 2,2 \cdot 10^3$ kg.m^{-3}. On note $c = 1,0 \cdot 10^3$ J.kg^{-1}.K^{-1} sa capacité thermique massique et λ sa conductivité thermique ($\lambda = 1,5$ SI).

I.2.a. Exprimer l'aire S_p de la surface en contact avec la pièce en fonction de a, b et h, en négligeant l'épaisseur des murs. Faire l'application numérique.

I.2.b. Exprimer le volume de béton V_b et la capacité thermique C_{mur} de l'enceinte en béton en fonction de S_p, L, ρ et c.
Comparer numériquement C_{mur} à la capacité thermique de la pièce C.
Par rapport à ces premiers résultats, quels commentaires pouvez-vous faire sur la durée de montée en température de la pièce en prenant en considération l'influence de la capacité thermique du mur ?

Première partie : équation de la chaleur

On étudie la conduction thermique dans le mur modélisé par une barre de section S, de longueur L en contact avec deux thermostats de températures T_{int} et T_{ext} (voir figure 3, page 4).

On note : $\vec{J} = j(x,t)\vec{e}_x$ le vecteur densité de flux thermique.

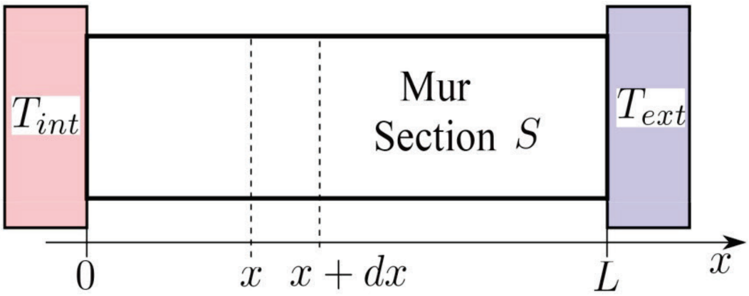

FIGURE 3 – Modélisation du mur.

I.3. Généralités

I.3.a. Rappeler la loi de Fourier. Interpréter son signe. Donner une signification physique de $j(x,t)$ et préciser son unité. Quelle est la dimension de la conductivité thermique ? En déduire son unité dans le système internationnal.

I.3.b. À l'aide d'un bilan d'énergie thermique sur la tranche comprise entre les abscisses x et $x+dx$ du mur, établir l'équation de diffusion thermique c'est-à-dire l'équation différentielle régissant l'évolution de la température $T(x,t)$ à l'intérieur du mur en fonction de ρ, c, et λ.

I.4. Étude du régime stationnaire

I.4.a. Rappeler la signification de "régime stationnaire".

I.4.b. Les températures de surface seront prises égales à celles des thermostats. Résoudre l'équation de la diffusion thermique et déterminer alors $T(x)$ la température à l'intérieur du mur à l'abscisse x. Tracer $T(x)$.

I.4.c. Définir et exprimer la température moyenne du mur notée T_{moy}.

Indiquer la position particulière x_p où la température est égale à la température moyenne.

I.4.d. Exprimer la densité de flux $j(x)$ qui traverse le mur. Que remarquez-vous ?

I.4.e. Calculer la puissance P que le radiateur doit fournir afin de maintenir la température intérieure à 20 °C pour une température extérieure de 10 °C. Commenter ce résultat par rapport au radiateur installé.

I.5. Résistance thermique

On définit en électricité la résistance d'un conducteur ohmique en convention récepteur par $R = \dfrac{\Delta V}{I}$ où ΔV est la différence de potentiels aux bornes de la résistance et I l'intensité du courant électrique qui traverse le conducteur (figure 4).

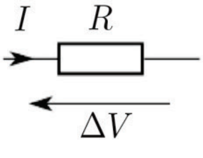

FIGURE 4 – Résistance.

I.5.a. Rappeler l'expression de la loi d'Ohm locale pour un conducteur de conductivité électrique γ. En faisant l'analogie entre la loi d'Ohm et la loi de Fourier, indiquer à quelles grandeurs thermodynamiques sont analogues la conductivité électrique, la densité de courant électrique, le potentiel électrique et l'intensité du courant. Donner cette réponse sous la forme d'un tableau récapitulatif.

I.5.b. Par analogie, donner l'expression de la résistance thermique R_{mur} du mur étudié. Préciser son unité et calculer sa valeur.

Deuxième partie : modélisation électrique

Dans cette partie, on travaillera avec la température moyenne du mur. On modélise l'ensemble du système, composé de la pièce, du mur et du radiateur, par un réseau électrique. Le but est d'étudier le comportement dynamique de ce système via sa fonction de transfert.

I.6. Circuit électrique

Dans l'approche électrique, la modélisation du système conduit au circuit électrique donné figure 5.

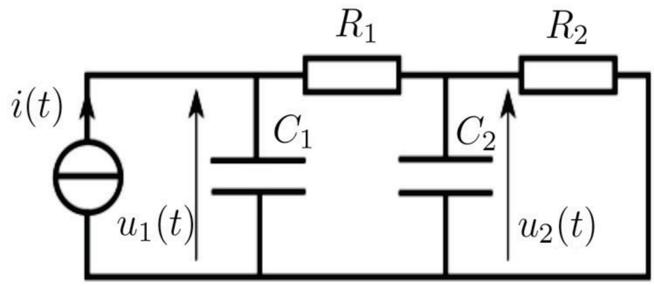

FIGURE 5 – Modèle électrique.

I.6.a. Justifier cette modélisation électrique par rapport à notre étude thermique de la première partie. Expliciter les valeurs de $I, R_1, R_2, C_1, C_2, u_1(t)$ et $u_2(t)$, en fonction des grandeurs P, R_{mur}, C, C_{mur}, la température de la pièce $T(t)$, la température moyenne du mur $T_{moy}(t)$ et la température extérieure T_{ext}.

I.6.b. Que devient ce circuit électrique en régime permanent continu ? Exprimer alors la tension $u_2(t \longrightarrow \infty)$. Quelle valeur attribueriez-vous à R_1 et à R_2 en fonction de R_{mur} ?

I.7. Établissement de l'expression d'une impédance

Afin d'étudier le comportement du circuit en régime variable, on se place en régime sinusoïdal forcé $x(t)$ de pulsation ω dont la grandeur complexe associée est notée $\underline{x}(t)$ et l'amplitude complexe est $\underline{X}$ avec :

$$x(t) = X_0\, cos(\omega t + \phi) = Re(\underline{x}(t)) \,,$$

$$\underline{x}(t) = X_0\, e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{X}\, e^{j(\omega t)} \,,$$

$$\underline{X} = X_0\, e^{j(\phi)} \,.$$

La référence de phase sera prise sur la grandeur $i(t)$ délivrée par le générateur de courant :

$$i(t) = I_0\, cos(\omega t) \,.$$

I.7.a. Exprimer l'impédance $\underline{Z_2}$ relative à l'association de la résistance R_2 avec le condensateur de capacité C_2.

I.7.b. Exprimer l'impédance $\underline{Z_1}$ relative à l'association de la résistance R_1 avec l'impédance $\underline{Z_2}$.

I.7.c. Exprimer le lien $\underline{i}(t)$, $\underline{u_1}(t)$, $\underline{Z_1}$, C_1 et ω.

I.7.d. En déduire que la relation reliant $\underline{U_1}(j\omega)$ à I_0 est donnée par :

$$\underline{U_1}(j\omega) = \frac{1+j\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C_2\omega}{1+j((R_1+R_2)C_1+R_2C_2)\omega - R_1R_2C_1C_2\omega^2}(R_1+R_2)I_0\ . \tag{1}$$

I.8. Exploitation

I.8.a. Vérifier la cohérence entre la fonction donnée par (1) et les comportements du circuit pour les hautes et basses fréquences.

Exprimer en fonction des données, $\underline{U_{10}}$, la valeur de $\underline{U_1}(j\omega)$ pour $\omega = 0$.

I.8.b. Vérifier les comportements limites lorsque C_2 tend vers zéro puis vers l'infini.

I.8.c. On appelle fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{U_1}(j\omega)}{\underline{U_{10}}}$. Quelle est la nature du filtre ?

I.8.d. Exprimer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ dans le cas où $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}R$ et $C_2 = \alpha C_1 = \alpha C$.

I.9. Diagramme de Bode

I.9.a. Établir les expressions des asymptotes de $\underline{H}(j\omega)$ en basse fréquence et haute fréquence. Tracer le diagramme de Bode asymptotique en précisant bien le point d'intersection.

I.9.b. En pratique, pour $\alpha = 200$, on obtient le diagramme de Bode de la figure 10 du **document réponse**. Mettre clairement en évidence, sur le diagramme de la figure 10 du **document réponse**, des zones rectilignes. Interpréter ces zones et placer trois pulsations particulières $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$.

I.9.c. Sous quelle forme pourrait-on mettre $\underline{H}(j\omega)$ en fonction de $\omega, \omega_1, \omega_2$ *et* ω_3 ?

I.9.d. Définir la pulsation de coupure du filtre et donner sa valeur. Estimer la durée τ du régime transitoire.