

## Physique : DM13

Vers une nouvelle définition du Kelvin (Centrale PC 2016)

I) L'Agitation thermique

I.A.1) a) Soit  $\frac{dp}{dz} = -\rho g = -m_v mg$

or  $p = m_v k_B T$  d'où  $\frac{dp}{dz} = -p \cdot \frac{mg}{k_B T}$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{dz} + \frac{p}{H} = 0 \text{ où } H = \frac{k_B T}{mg}$$

$$\Rightarrow p = p(0) e^{-z/H} \text{ où } H = \frac{k_B T}{mg}$$

b) Or  $p = m_v k_B T \Rightarrow m_v(z) = N_0 e^{-mgz/k_B T}$  avec  $N_0 = \frac{p(0)}{k_B T}$

. Pour une molécule  $E_{pp} = mgz =$  énergie potentielle de pesanteur.

I.A.2) . On pose  $H = \frac{k_B T}{mg}$

. Conservation de l' $E_m$  :  $\frac{1}{2} m v_e^2 = mgH \Rightarrow v_e = \sqrt{2gH}$   
 $\Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$

Par conséquent  $v_e < v_g = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$  mais du même ordre de grandeur.

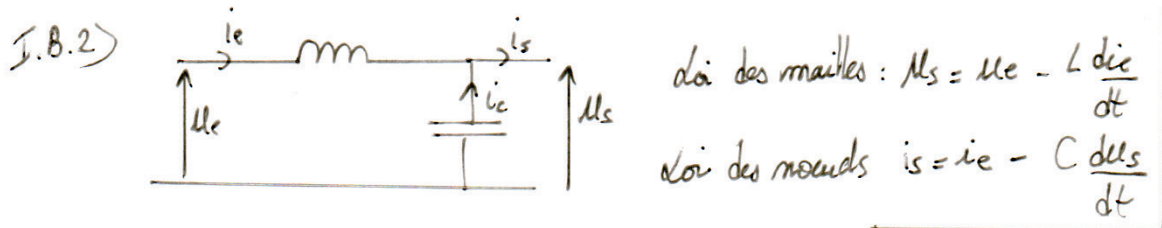
I.A.3) Considérons une bille de  $m = 100g$  et  $T = 300K$  ainsi si on compare l'énergie thermique à l' $E_{pp}$  alors :

$$mg \delta z = \frac{3}{2} k_B T \Leftrightarrow \delta z = \frac{3/2 k_B T}{mg} = 6 \cdot 10^{-21} m$$

Sous l'agitation thermique, le centre de gravité de la bille se déplace très légèrement.

### I.B) Agitation thermique dans un circuit électrique

I.B.1) Dans un métal on a  $v_{q} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} \approx 1,1 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1} \ll c$   
 $\Rightarrow$  on peut utiliser la physique non relativiste



I.B.3) a) D'après le schéma:

$$\begin{cases} u(x+dx, t) = u(x, t) - L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \\ i(x+dx, t) = i(x, t) - C \frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} dx = -L \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} dx = -C \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} & \textcircled{1} \\ \frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial u}{\partial t} & \textcircled{2} \end{cases}$$

b) Par conséquent :  $\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{L} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

d'où  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  avec  $c^2 = \frac{1}{LC}$   $\textcircled{3}$

c) Equation de d'Alembert où  $u(x, t) = \underline{u} e^{i(\omega t - kx)}$

$\textcircled{3}$  devient :  $-\omega^2 \underline{u} = c^2 (-k^2) \underline{u} \Rightarrow \omega = kc$   $\textcircled{4}$

$\textcircled{1}$  donne :  $-ik \underline{u} = -L i \omega \underline{i}$  d'où  $R_c = \frac{u/i}{L} = \frac{\omega}{k} = Lc$ .

$\textcircled{2}$  donne :  $-iki = -C i \omega \underline{u}$  — "  $R_e = \frac{u/i}{C} = k/\omega = \frac{1}{C c}$

Donc  $L = R_c / c$  et  $C = \frac{1}{R_e c}$

$$1.B.4) \text{ a) D'après (3) : } -\omega^2 U(x) \cos(\omega t) = c^2 \cos(\omega t) U''(x)$$

$$\Leftrightarrow -\omega^2 U = c^2 U''$$

$$\Leftrightarrow U'' + \frac{\omega^2}{c^2} U = 0 \quad (\Leftrightarrow U'' + k^2 U = 0)$$

$$\Rightarrow U(x) = A \cos kx + B \sin kx \quad \text{t.q.} \begin{cases} U(0) = 0 = A \\ U(D) = 0 = B \sin(kD) \end{cases}$$

$$\text{D'où } U(x) = B \sin(k_m x) \text{ où } k_m D = m\pi$$

$$\Rightarrow U_m(x) = U_{0m} \sin(k_m x) \text{ où } k_m = m\pi/D \Rightarrow \omega_m = \frac{m\pi c}{D}$$

b) Les fréquences  $f_m$  sont t.q. :  $f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{m c}{2D}$  avec  $m$  entier. Dans l'intervalle  $\Delta f$ , il y a  $N$  modes propres avec :  $N = \frac{\Delta f}{f_m - f_{m-1}} \quad (\Rightarrow N = \frac{2D \Delta f}{c})$

$$\text{c) D'après (2) : } \frac{\partial m}{\partial x} = + \gamma U_{0m} \sin(k_m x) (\omega) \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow i_m(x, t) = - \frac{\gamma \omega U_{0m}}{k_m} \cos(k_m x) \sin(\omega t) + \underbrace{\text{cste}(t)}_{=0 \text{ car } i_m = 0 \text{ si } U_{0m} = 0}$$

$$\Rightarrow i_m(x, t) = - \gamma c U_{0m} \dots$$

$$\Rightarrow i_m(x, t) = - \frac{U_{0m}}{R_c} \cos(k_m x) \sin(\omega t)$$

$$1.B.5) \text{ a) Soit } \langle d_{em} \rangle_t = \frac{1}{2} \gamma dx U_m^2 + \frac{1}{2} \lambda dx i_m^2$$

$$= \frac{1}{2} dx \left[ \gamma U_{0m}^2 \sin^2(k_m x) \cos^2(\omega t) + \lambda \frac{U_{0m}^2}{R_c^2} \cos^2(k_m x) \sin^2(\omega t) \right]$$

$$\text{or } \frac{\lambda}{R_c^2} = \frac{\lambda}{R_c} \times \frac{1}{R_c} = \frac{1}{c} \cdot \gamma c = \gamma$$

$$\text{d'où } \langle d_{em} \rangle_t = \frac{1}{2} \gamma U_{0m}^2 dx \left[ \sin^2(k_m x) \cos^2(\omega t) + \cos^2(k_m x) \sin^2(\omega t) \right]$$

$$\Rightarrow \langle d_{em} \rangle_t = \frac{1}{2} \gamma U_{0m}^2 dx \left[ \frac{1}{2} \sin^2(k_m x) + \frac{1}{2} \cos^2(k_m x) \right]$$

$$\text{d'où } \langle \text{dem} \rangle_t = \frac{1}{4} \gamma U_{\text{on}}^2 dx$$

$\Rightarrow$  Elle ne dépend pas de  $x$  vu que l'onde est stationnaire.

$$\textcircled{b} \text{ Donc } \langle E_m \rangle = \int_0^D \langle \text{dem} \rangle = \int_0^D \frac{1}{4} \gamma U_{\text{on}}^2 dx$$

$$\Rightarrow \langle E_m \rangle = \frac{1}{4} \gamma U_{\text{on}}^2 D \text{ avec } \gamma = \frac{1}{R c \epsilon}$$

$$\Rightarrow \langle E_m \rangle = \frac{1}{4} \frac{U_{\text{on}}^2 D}{R c \epsilon}$$

$$\textcircled{1.B.6} \textcircled{a} \text{ Soit } \langle E_m \rangle = k_B T = \frac{1}{4} \frac{U_{\text{on}}^2 D}{R c \epsilon}$$

$$\Leftrightarrow U_{\text{on}}^2 = \frac{4 k_B T R c \epsilon}{D}$$

$$\text{Or } \mu_{\text{eff},m}^2(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \mu_m^2(x,t) dt = \frac{1}{2} U_{\text{on}}^2 \sin^2(k_m x)$$

$$\Leftrightarrow \mu_{\text{eff},m}^2(x) = \frac{2 k_B T R c \epsilon}{D} \sin^2(k_m x) \Rightarrow U_{\text{eff},m}^2 = \frac{2 k_B T R c \epsilon}{D}$$

$$\textcircled{b} \text{ Soit } U_{\text{eff}} = \sum_{m=1}^N U_{\text{eff},m} = \frac{2 N k_B T R c \epsilon}{D} \text{ ou } N = \frac{2 D \Delta f}{c}$$

$$\Rightarrow U_{\text{eff}} = 4 k_B T \Delta f R$$

$$\Rightarrow U_{\text{eff}} = \sqrt{4 k_B T \Delta f R}$$

$\textcircled{1.B.7} \textcircled{a}$  Sur les courbes on remarque que  $\ln \mu_{\text{eff}} = \text{cte} + \alpha \ln R$

or  $\alpha \approx \frac{1}{2} \Rightarrow U_{\text{eff}} \propto R^{1/2}$  des courbes vérifient la loi de Nyquist



On choisit un point de mesure pour mesurer  $k_B$  sachant que :

$$U_{\text{eff trace}} = 500 \text{ Veff réel} \\ = 500 \sqrt{4k_B T R \Delta f}$$

$$\Leftrightarrow k_B = \frac{U_{\text{eff trace}}^2}{4A^2 T R \Delta f}$$

Pour  $R = 2 \Omega$ ,  $\Delta f = 100 \text{ Hz}$  on  $U_{\text{eff trace}} = 9 \cdot 10^{-7} \text{ V}$

$$\Rightarrow k_B = 1,35 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$$

⑤. Les valeurs de  $U_{\text{eff}}$  mesurées sont très faibles, il faut donc protéger les mesures de parasites extérieurs.

Sur plusieurs jours il sera difficile de maintenir les températures constantes  
 $\Rightarrow$  utilisation de thermostat

### ④ Mesure acoustique

B.A.1) D'après l'énoncé  $l \gg \lambda_{\text{inter}}$  avec  $n_{\text{lim}} = \left(\frac{l}{\lambda_{\text{inter}}}\right)^3$

$$\alpha p = n k_B T \Leftrightarrow p = \frac{n k_B T}{\alpha}$$

$$\text{d'où } p \leq p_{\text{lim}} \text{ avec } p_{\text{lim}} = \frac{k_B T}{(\lambda_{\text{inter}})^3} = 0,3 \text{ bar}$$

B.A.2) On va linéariser les équations selon l'approximation acoustique

Euler:  $\mu \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad } p$  devient  $\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$  ①

Conservation masse:  $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0$  devient  $\frac{\partial \mu'}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v}{\partial x}$  ②

Hypothèse adiabatique:  $\chi_S = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_S$  devient:  $\chi_S = \frac{1}{\mu_0} \times \frac{\mu'}{\mu}$  ③

$$\textcircled{3} \text{ et } \textcircled{2} \text{ donnent : } \mu_0 K_S \frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \mu_0 K_S \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x}$$

$$\text{or } \textcircled{1} : \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \mu_0 K_S \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \text{ où } c^2 = \frac{1}{\mu_0 K_S}$$

$$\textcircled{b} \text{ Pour un GP : } \mu = \frac{PM}{RT} \Rightarrow K_T = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_T = \frac{M}{\mu RT} = \frac{1}{P} \Rightarrow \begin{cases} K_T = 1/P \\ K_S = K_T = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\delta P} \end{cases}$$

$$\text{D'où } c^2 = \frac{\delta P}{\mu_0} = \frac{\delta RT}{M} = \frac{\delta N_A k_B T}{M} = c^2$$

$$\textcircled{c} \text{ Or on a } c_a = c_{a,GP} \left( 1 + \beta P \right)^{1/2} \Rightarrow \frac{\Delta c_a}{c_{a,GP}} = \frac{\beta P}{2} \leq 10^{-6}$$

$$\left( \Rightarrow P \leq \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\beta} \right) \approx \underline{1,5 \text{ bar}}$$

Th.A.3) Formule de composition des incertitudes

$$\frac{\delta k_B}{k_B} = \sqrt{\left( \frac{\delta M}{M} \right)^2 + \left( 2 \frac{\delta c_a}{c_a} \right)^2 + \left( \frac{\delta N_A}{N_A} \right)^2 + \left( \frac{\delta T}{T} \right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta c_a}{c_a} = \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\delta k_B}{k_B} \right)^2 - \left( \frac{\delta M}{M} \right)^2 - \left( \frac{\delta N_A}{N_A} \right)^2 - \left( \frac{\delta T}{T} \right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta c_a}{c_a} \leq \underline{0,64 \cdot 10^{-6}}$$

Th.B) Onde acoustique sphérique

$$\text{Th.B.1) } \textcircled{a} \text{ Soit } \vec{r} = r(r,t) \vec{e}_r \Rightarrow \text{rot } \vec{r} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \vec{e}_\varphi = \vec{0}$$

$$\text{d'où } \vec{\sigma} = \text{grad } \phi$$

Par conséquent l'équation d'Euler (4) s'écrit :

$$\mu_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad \text{où } \vec{\sigma} = \text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r \quad (\text{invariance suivant } \theta \text{ et } \varphi)$$

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} = - \frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

$$\text{donc } \Pi(r,t) = - \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{cste}(t)$$

$$\text{Or } \phi=0 \Leftrightarrow \Pi(r,t)=0 \Rightarrow \underline{\Pi(r,t) = - \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

$$\textcircled{b} \text{ Soit } \Delta \Pi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left[ \Delta \phi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \phi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \beta(r)$$

$$\text{Posons } \beta(r) = - \Delta \alpha(r) \Rightarrow \Delta(\phi + \alpha) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2(\phi + \alpha)}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{Comme } \phi \text{ est défini à une cste près on peut écrire } \Delta \phi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

II.B.2) de confinement va entraîner une quantification de  $\omega_m$

• des parois étant indéformables :  $\sigma(r=a,t) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial r}(a,t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{f'(r=a,t) = 0}$$

$$\text{II.B.3) Soit } \vec{f}(r,t) = \Pi(r,t) \vec{\sigma}(r,t) = - \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r$$

$$= - \mu_0 f(r) f'(r) \cos(\omega t) (-\omega) \sin(\omega t) \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{f}} = \underline{\mu_0 \omega \cos(\omega t) \sin(\omega t) f(r) f'(r) \vec{e}_r} \quad \text{d'où } \langle \vec{f} \rangle = \vec{0}$$

II.B.4) Soit  $\phi(r) = f(r) \cos(\omega t)$  d'où D'Alembert :

$$\Delta \phi - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad \downarrow \text{Expression en cylindriques ?}$$

$$\text{s'écrit : } \cos(\omega t) \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r f)}{\partial r^2} - \frac{1}{c_a^2} (-\omega^2) \cos(\omega t) f = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 (r f)}{\partial r^2} + \frac{\omega^2}{c_a^2} f \cdot r = 0$$

$$\text{Posons } u = r f \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\omega^2}{c_a^2} u = 0$$

$$\text{Posons } k^2 = \frac{\omega^2}{c_a^2} \Rightarrow u = A \cos(kr) + B \sin(kr)$$

$$\Rightarrow f = \frac{A}{r} \cos(kr) + \frac{B}{r} \sin(kr)$$

$$\text{or } f(0) \text{ ne doit pas diverger} \Rightarrow f(r) = \frac{B}{r} \sin(kr)$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{B}{r} \sin(kr) \cos(\omega t)$$

II.B.5) Or  $f'(a) = 0$  t.q  $f'(r) = \left[ -\frac{1}{r^2} \sin(kr) + \frac{1}{r} (k) \cos(kr) \right] B$

$$\Rightarrow + \frac{1}{a} \sin(ka) = k \cos(ka)$$

$$\rightarrow ka \cos ka - \sin ka = 0$$

$$\text{Posons } g(x) = x \cos x - \sin x \text{ d'où } x_n \text{ t.q } g(x_n) = 0$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{\omega_n a}{c_a} = 2\pi \nu_n \cdot \frac{a}{c_a}$$

$$\Rightarrow \nu_n = \frac{x_n c_a}{2\pi a}$$

II.B.6) Donc  $c_a = \frac{2\pi \nu_n a}{x_n} = \underline{\underline{307,8245 \text{ ms}^{-1}}}$

$$\text{t.q } \frac{\delta c_a}{c_a} = \sqrt{\left(\frac{\delta \nu_n}{\nu_n}\right)^2 + \left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_n}{x_n}\right)^2} \approx 1,8 \cdot 10^{-6} > \left(\frac{\delta c_a}{c_a}\right)_{\text{max}} = 0,64 \cdot 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{c_a = 307,8246 \pm 0,0006 \text{ ms}^{-1}}}$$



II.B.7) Or  $\frac{8k_B}{k_B} = \sqrt{\left(\frac{SM}{M}\right)^2 + \left(\frac{2SCa}{Ca}\right)^2 + \left(\frac{SNa}{Na}\right)^2 + \left(\frac{ST}{T}\right)^2}$

$$= 3,9 \cdot 10^{-6}$$

$\Rightarrow k_B = \underbrace{(1,380649 \pm 0,000006)}_{7 \text{ chiffres significatifs}} \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$

### III) Spectroscopie Laser

III.A.1) L'azote possède un doublet non liant t.q.  $AX_3E_1$  (Gillespie)

$\Rightarrow$  Conformations pyramidales les plus stables en  $x = b$ .

$\Rightarrow$  en  $x = 0$  conformation instable due à la forte répulsion des liaisons  $N-H$  et du doublet non liant.

$\Rightarrow$  en  $|x| > b$ ,  $E_p \nearrow$  car on tend à casser les liaisons  $N-H$ .

III.A.2) Au pt triple de l'eau  $k_B T = 0,024 \text{ eV} < V_0$ , l'inversion est impossible en mécanique classique

- Pour l'inversion il faut  $k_B T_{\min} = V_0 \Leftrightarrow T_{\min} = 2400 \text{ K}$ , pourtant on observe des inversions à des températures usuelles  $\Rightarrow$  description en mécanique quantique.

III.B.1) Soit  $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$  avec  $\Psi = \underbrace{\varphi}_{f} e^{-it\hbar}$

$$\Rightarrow i\hbar \left(-i\frac{t}{\hbar}\right) \varphi f = -\frac{\hbar^2}{2m} \varphi'' f + \varphi \varphi f$$

$$\Rightarrow \varphi'' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V)\varphi = 0$$

III.B.2) a)  $\varphi$  localisé  $\Rightarrow \int_D |\varphi|^2 dG = 1$

b) Il faut que le produit  $V\varphi$  ne diverge pas  $\varphi = 0$  en dehors des puits

Continuité de  $\varphi$ :  $\left. \begin{array}{l} \varphi_A(-x_0 - \epsilon) = \varphi_A(-x_0) = 0 \\ \varphi_B(x_0) = \varphi_B(x_0 + \epsilon) = 0 \end{array} \right\}$

$$\textcircled{c} \text{ soit } \left\{ \begin{array}{l} \int_{x_0}^{x_0+l} |\psi_B|^2 dx = 1 \\ \text{et} \\ \int_{-x_0-l}^{-x_0} |\psi_A|^2 dx = 1 \end{array} \right.$$

M.B.3) a) Particule libre :  $\psi'' + k^2 \psi = 0$  où  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

$$\Rightarrow \psi_A = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad \textcircled{3}$$

avec  $\left\{ \begin{array}{l} \psi(-x_0-l) = 0 \\ \psi(-x_0) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A e^{-ik(x_0+l)} + B e^{ik(x_0+l)} = 0 \quad \textcircled{1} \\ A e^{-ikx_0} + B e^{ikx_0} = 0 \quad \Rightarrow A = -B e^{2ikx_0} \quad \textcircled{2} \end{array} \right.$

① s'éécrit :  $B e^{ikx_0} [-e^{-ikl} + e^{ikl}] \Rightarrow \sin kl = 0 \Rightarrow \underline{k_n = \frac{n\pi}{l}}$

D'où ③ :  $\psi_A = -B e^{2ikx_0} e^{ikx} + B e^{-ikx}$   
 $= B e^{ikx_0} [-e^{ik(x+x_0)} + e^{-ik(x+x_0)}]$   
 $= B e^{ikx_0} \times 2i \times \sin(-k(x+x_0))$   
 $= -2i B e^{ikx_0} \sin(k(x+x_0))$

Notons  $\underline{\psi_A(x) = B_A \sin k(x+x_0)}$

or  $\int_{-x_0-l}^{-x_0} |\psi_A|^2 dx = 1 \Rightarrow \frac{l B_A^2}{2} = 1$  d'où  $\left\{ \begin{array}{l} \psi_{A,m}(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(k_m(x+x_0)) \\ \text{et} \\ E_n^A = \frac{\hbar^2 k_m^2}{2m} = \frac{\hbar^2 m^2 \pi^2}{2m l^2} \end{array} \right.$

⑥ De  $\hat{m}$  :  $\left\{ \begin{array}{l} \psi_{B,m}(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin k_m(x-x_0) \\ \text{et} \\ E_n^B = \frac{\hbar^2 m^2 \pi^2}{2m l^2} \end{array} \right.$

$$\text{Donc } f = \frac{\delta E}{\hbar} = \underline{23,8 \text{ GHz}}$$

$$\textcircled{d}. \text{ Soit } \psi(x, \frac{b}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{E_1^{\text{sym}} b}{2\hbar}} \left[ \varphi_1^{\text{sym}}(x) + \varphi_1^{\text{anti}}(x) e^{-i \delta E b / 2\hbar} \right]$$

$$\text{or } e^{-i \delta E b / 2\hbar} = e^{-i\pi} = -1$$

$$\Rightarrow \psi(x, \frac{b}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{E_1^{\text{sym}} b}{2\hbar}} \left[ \varphi_1^{\text{sym}}(x) - \varphi_1^{\text{anti}}(x) \right]$$

$\varphi_1(x)$  d'après figure 12.

• la molécule dont l'énergie est inférieure à la barrière de potentiel est passée d'un puits à l'autre par effet tunnel ce qui lui serait interdit en mécanique classique

$$\textcircled{e}. \text{ Soit } \left\{ \begin{array}{l} \delta E = \frac{4\pi^2 \hbar^3}{m l^3} e^{-\frac{2x_0 \sqrt{2mV_0}}{\hbar}} \\ \text{et } f = \frac{\delta E}{2\hbar\pi} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{e^{-10x_0 \sqrt{6} \cdot \sqrt{2mV_0} / \hbar}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2mV_0}} \cdot \frac{\sqrt{2mV_0}}{e^{-2x_0 \sqrt{2mV_0} / \hbar}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{e^{-10x_0 \sqrt{6} \cdot x_0 \sqrt{2mV_0} / \hbar}}{e^{-1 \cdot x_0 \sqrt{2mV_0} / \hbar}}$$

$$\Rightarrow f' = 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ Hz} \text{ d'où } \frac{b'}{2} = 55 \text{ jours}$$

d'inversion est peu probable (car très lente)

$$\text{M.C.1) Soit } \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t \end{array} \right.$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \partial \vec{E} / \partial t = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \partial \vec{E} / \partial t$$

$$\text{or } \vec{\text{rot}}(\text{rot } \vec{E}) = -\Delta \vec{E} + \text{grad}(\text{div } \vec{E}) \Leftrightarrow \vec{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial(\text{rot } \vec{B})}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \delta \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Leftrightarrow \vec{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \delta \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

$$\text{or } \vec{E}(x, t) = \epsilon_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - kx)} \Rightarrow -k^2 = \frac{1}{c^2} (-\omega^2) + \mu_0 \delta i\omega$$

$$\Rightarrow \underline{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0 \omega \delta}$$

M.C.2) a) Soit  $\underline{k} = k_r - ik_i$   
 $\Rightarrow \vec{E} = E_0 e^{-k_i x} e^{i(\omega t - k_r x)} \vec{e}_y$

Or on veut donc pas avoir une amplification il faut  $k_i > 0$ .

b) On a  $I = \langle \vec{\Pi} \rangle$   
 où  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}}{\mu_0} \wedge (i \underline{k} \wedge \vec{E}) = \frac{i \underline{k}}{\mu_0 \omega} E^2$  car OPPH.

donc  $I$  est proportionnel à  $E^2$  c'est à dire à  $e^{-2k_i x}$

$\Rightarrow I(L) = I_0 e^{-\alpha L}$  où  $\alpha = 2k_i$

M.C.3) a) Soit  $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = 10,354204 \mu\text{m}$

et  $E_\gamma = h\nu_0 = 0,12 \text{ eV}$

b) L'énergie du niveau excité est définie à  $8E$  près donc celle du photon permettant la transition sera définie de la même façon d'où :

$\Delta\nu = \frac{8E}{h} = 4,8 \text{ MHz}$

M.C.4) a) Soit  $\phi = \omega t - kx = \omega_0 \left( t - \frac{k}{\omega} x \right) = 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{c} \right) = \phi$

b) De plus  $x' = (\vec{O}'\vec{O} + \vec{O}\vec{O}') \cdot \vec{u}_x = x - v_x t$ .

Donc  $\phi$  peut s'écrire dans  $R'$  :  $\phi = 2\pi\nu' \left( t - \frac{x'}{c} \right)$   
 $= 2\pi\nu' \left[ t - \frac{x}{c} + \frac{v_x t}{c} \right]$   
 $= 2\pi\nu' \left[ t \left( 1 + \frac{v_x}{c} \right) - \frac{x}{c} \right]$   
 $= 2\pi\nu' \left( 1 + \frac{v_x}{c} \right) \left[ t - \frac{x/c}{1 + v_x/c} \right]$

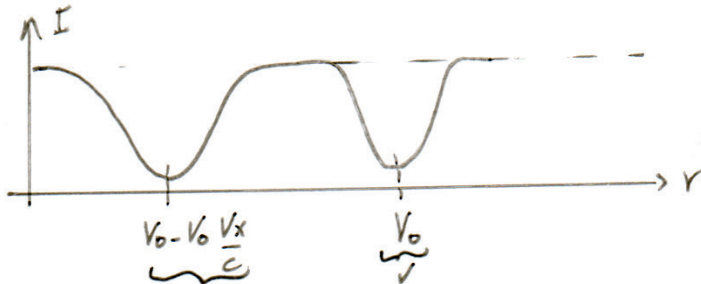
or  $\frac{v_x}{c} \ll 1$  d'où :  $\nu = \nu' \left( 1 + \frac{v_x}{c} \right)$

$\Rightarrow \nu' \approx \nu \left( 1 - \frac{v_x}{c} \right)$  ou  $v_x = c \frac{\nu - \nu'}{\nu}$



- l'effet Doppler Fizeau est utilisé en astronomie pour mesurer la vitesse radiale des étoiles ou galaxies.

③ le spectre va être identique mais décalé t.q  $\Delta v = v' - v = -v \frac{v_x}{c}$



III.C.5) Soit  $v_x = c \frac{v - v'}{v} = c \frac{v_0 - v}{v_0}$  d'où  $dv_x = c \frac{\delta v}{v_0}$

$$\Rightarrow dP(v, v_0) = \frac{ck_B}{v} e^{-\frac{mc^2(v_0 - v)^2}{2k_B T v_0^2}} dv = \frac{\delta m}{m_0}$$

III.C.6) (a) A cause de l'agitation thermique, il y a élargissement de la raie naturelle (au repos) par effet Doppler.

(b) D'après l'énoncé si  $f = e^{-\frac{(v - v_0)^2}{2a^2}}$  alors  $\Delta v = 2a$

$$\text{d'où : } \Delta v = 2 \times \frac{\sqrt{k_B T}}{\sqrt{m_a}} \frac{v_0}{c} \Leftrightarrow \Delta v = 2 \frac{v_0}{c} \sqrt{\frac{k_B T}{m_a}} = 2,4 \cdot 10^{-6} v_0$$

(c)  $\Rightarrow \Delta v = 70,6 \text{ MHz}$

$$\text{Or } k_B = \frac{c^2 (\Delta v)^2}{v_0^2} \cdot \frac{m_a}{T} \times \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\delta k_B}{k_B} = \sqrt{\underbrace{\left(\frac{\delta m_a}{m_a}\right)^2}_{2,3 \cdot 10^5} + 4 \underbrace{\left(\frac{\delta v}{v}\right)^2}_{0,14} + 4 \underbrace{\left(\frac{\delta v_0}{v_0}\right)^2}_{18 \cdot 10^{-5}} + \left(\frac{\delta T}{T}\right)^2 + 4 \left(\frac{\delta c}{c}\right)^2}$$

$\Rightarrow \frac{\delta k_B}{k_B} \approx 2 \frac{\delta v}{v} = 0,14$ , on ne peut pas négliger cette dernière car elle empêche d'obtenir la précision voulue.