Physique : DM12

Tunnel du Fréjus (Mines 2016 – PC)

I – Température dans le tunnel de Fréjus

1°) Par définition $\begin{cases} T_{moy} = \theta_0 \\ T_{max} = \theta_0 + T_0 \\ T_{min} = \theta_0 - T_0 \end{cases}$

On peut choisir $\underline{T_0 = 15°C}$

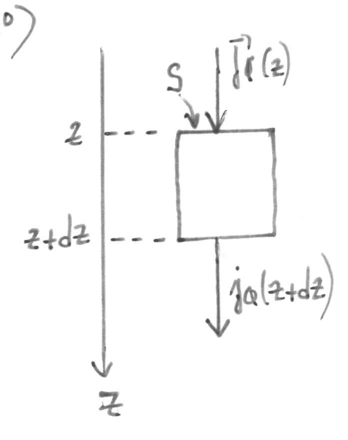
2°) On a : $\boxed{d\Phi_Q = \vec{j_Q} \cdot \vec{dS}}$ où $[j_Q] = \underline{Wm^{-2}}$

où $\vec{j_Q}$ est la densité du flux thermique homogène à une puissance surfacique.

3°) Loi de Fourier : $\boxed{\vec{j_Q} = -K \, \vec{grad}\, T}$ valable dans un milieu isotrope avec des variations de température peu rapides.

D'où $[K] = \dfrac{Wm^{-2}}{Km^{-1}} = \underline{Wm^{-1}K^{-1}}$

4°)



Soit $\delta Q = \left[j_Q(z) - j_Q(z+dz) \right] S dt$

$\Leftrightarrow \boxed{\delta Q = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial z} \underbrace{dz S}_{d\tau} dt}$

5°) . Le système doit contenir un assez grand nombre de particules pour introduire la notion de température.

. Le système doit être assez petit pour tenir compte de l'inhomogénéité de la température à grand volume.

6°) En appliquant le premier principe : $dU = \delta Q \Rightarrow \boxed{dU = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} S dz dt}$

or $dU = [u(t+dt) - u(t)] \rho_s d\tau$

$= \frac{\partial u}{\partial t} \rho_s d\tau dt$

$$\boxed{\Rightarrow dU = c_s \rho_s \frac{\partial T}{\partial t} d\tau dt \quad \text{où } d\tau = S dz}$$

7°) Donc $\frac{\partial T}{\partial t} c_s \rho_s = -\frac{\partial j_Q}{\partial z}$

or $j_Q = -K \frac{\partial T}{\partial z} \Longrightarrow \rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\frac{K}{\rho_s c_s}}_{D} \frac{\partial T}{\partial z^2}} \quad (1)$$

t.q $\underline{[D] = m^2 s^{-1}}$

8°) La forme de solution : $\underline{T} = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - \underline{k} z)}$ est ondulatoire, la variation de température au sommet se propage dans la roche.

(1) s'écrit $(-i\underline{k})^2 D = i\omega$

$\Longleftrightarrow \underline{k}^2 = -\frac{i\omega}{D} = e^{-i\pi/2} \omega/D.$

$\Longleftrightarrow \underline{k} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{D}} e^{-i\pi/4} \quad \Longleftrightarrow \underline{k} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{D}} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = k' + ik''$

Pour tenir compte d'une absorption $k'' < 0$

$$\boxed{\Longrightarrow \underline{k} = k' + ik'' \text{ où } \begin{cases} k' = \sqrt{\frac{\omega}{2D}} & \text{propagation} \\ k'' = -i\sqrt{\frac{\omega}{2D}} & \text{atténuation} \end{cases}}$$

Donc $\boxed{T(z,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t - k'z)\, e^{-k'z} \quad \text{où } k' = \sqrt{\frac{\omega}{2D}}}$

9°) Soit z_e t.q : $T_0 e^{-k' z_e} = \frac{T_0}{100}$

$\iff -k' z_e = \ln(1/100)$

$\iff \boxed{z_e = \frac{\ln 100}{k'} = \ln 100 \sqrt{\frac{2k}{C\rho_s \omega}}}$ $\simeq 5{,}3\ m$

D'où $z_e \ll$ altitude du Fréjus $\Rightarrow$ les variations annuelles de température n'affectent pas la température des roches environnantes.

10°) . Pour $\omega = 7{,}2 \cdot 10^{-5}\ rad.s^{-1}$ on a z_e encore plus petit, $z_e = 0{,}3\ m$, les variations journalières sont encore moins ressenties en profondeur.

. les variations de basse fréquence se propagent plus facilement : c'est un passe bas

11°) En régime stationnaire : $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ d'où $dU = 0$

$\iff \delta Q_e + \delta Q_c = 0$

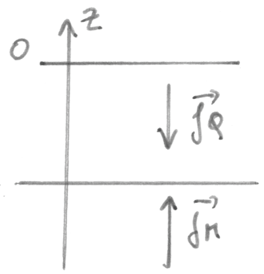
$\iff \left[-\frac{\partial j_Q}{\partial z} dz\right] S dt + P d\tau dt = 0$

$\iff -\frac{\partial j_Q}{\partial z} + P = 0$

$\iff \boxed{\frac{\partial j_Q}{\partial z} = P_0 e^{-z/H}}$

12°) Donc $j_Q = -P_0 H e^{-z/H} + cste.$

Or en $z = L_c$, $j_Q = -j_m$



Donc $-P_0H\,e^{-L_c/H} + cste = -j_M$

$\Rightarrow cste = -j_M + P_0H e^{-L_c/H}$

Donc $\boxed{j_Q = P_0H\left[e^{-L_c/H} - e^{-z/H}\right] - j_M}$ (1)

De plus : $j_Q = -K\dfrac{dT}{dz} \Leftrightarrow dT = \left\{\dfrac{P_0H}{K}\left[e^{-z/H} - e^{-L_c/H}\right] + \dfrac{j_M}{K}\right\}dz.$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{P_0H}{K}\left[-He^{-z/H} - ze^{-L_c/H}\right] + \frac{j_M z}{K} + cste.$$

a $T(0) = \theta_0 \Rightarrow \dfrac{P_0H}{K}\left[-H\right] + cste = \theta_0$ d'où $cste = \theta_0 + \dfrac{P_0H^2}{K}$

$$\text{Donc } \boxed{T(z) = \theta_0 + \frac{P_0H}{K}\left[H\left(1 - e^{-z/H}\right) - ze^{-L_c/H}\right] + j_M z/K} \quad (2)$$

13) • On a $j_S = j_Q(z=0)$

d'où $j_S = P_0H\left[e^{-L_c/H} - 1\right] - j_M$

14) • Comparons : j_M/K et $\dfrac{P_0H}{K}e^{-L_c/H}$

c.à.d : $\begin{cases} j_M = 0{,}035\,Wm^{-2} \\ P_0He^{-L_c/H} = 1{,}11.10^{-5}\,Wm^{-2}\end{cases}$

Donc $\boxed{T(z) \simeq \theta_0 + \dfrac{P_0H^2}{K}\left(1 - e^{-z/H}\right) + \dfrac{j_M z}{K}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{T(z=1{,}7km) \simeq 33°C}}$ (qui est proche des 30°C de l'énoncé)

Et $\underline{\underline{j_S = -60\ mWm^{-2}}}$

15) L'équation de diffusion en régime stationnaire devient : $\Delta T = 0$

• $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$

• En posant $T(x,z) = C_1 + f(x)g(z)$

$$\Rightarrow f''g + g''f = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(z)}{g(z)} = cste.$$

Or on veut une solution oscillante en x d'où : $f'' + k^2 f = 0$

$\Rightarrow f = A\cos(kx) + B\sin(kx)$

et $g = Ce^{-kz} + De^{kz} = Ce^{-kz}$ afin que la solution reste bornée

Or $T(x,z) = T_S + T_1 \cos\left(\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right) = C_1 + \left(A'\cos kx + B'\sin kx\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = T_S \\ B' = 0 \\ A' = T_1 \end{cases} \quad \text{et } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(x,z) = T_S + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-2\pi z/\lambda} \quad \text{avec } \frac{2\pi}{\lambda} = k.}$$

. On remarque que le relief a une part importante dans les variations de la température en fonction de x et aussi de z.

. Vu que $\lambda = 10$km cet effet est plus important que les précédents m̂ pour une profondeur de l'ordre du km.

16) L'équation de chaleur étant linéaire on peut sommer les deux termes d'où :

$$\boxed{T(x,z) = T_S + \frac{j_M z}{K} + \frac{P_0 H^2}{K}\left(1 - e^{-z/H}\right) + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-2\pi z/\lambda}} \quad (3)$$

17) A l'ordre 1 en h on peut écrire :

$$T(x, z=h) = T(x, z=0) + h \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}$$

$$\Rightarrow T(x, z=0) = T(x, z=h) - h \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}$$

Or en surface : $j_S = -K \left.\dfrac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}$

d'où $T(x, z=0) = T(x, z=h) + \dfrac{j_S}{K} h.$

$$= T_S + \frac{j_S}{K} h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$= \theta_0 + \beta z + \frac{j_S h_0}{K} \cos(2\pi x/\lambda)$$

or d'après (3) $T(x,0) = T_S + T_1 \cos\left(\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right) \Rightarrow \begin{cases} T_S = \theta_0 + \beta z \\ T_1 = \dfrac{j_S h_0}{K} \end{cases}$

Donc : $T(x,z) = \theta_0 + z\underbrace{\left(\dfrac{j_M}{K} + \beta\right)}_{C_1} + \underbrace{\dfrac{P_0 H^2}{K}}_{C_2}\left(1 - e^{-z/H}\right) + \dfrac{h_0 j_S}{K} \cos\left(\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-2\pi z/\lambda}$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{cases} C_1 = j_M/K + \beta \\ C_2 = P_0 H^2/K \quad \text{et } \delta = \dfrac{\lambda}{2\pi} \\ C_3 = j_S/K \end{cases}}$$

II – Radioactivité et effet tunnel

18) Soit $dP = |\Psi|^2 dx \Rightarrow \boxed{[\Psi] = L^{-1/2}}$

19) On a 100% de chance de trouver l'e^- dans l'espace tout entier.

20) Soit $\rho = |\Psi|^2$ représente la densité de probabilité de présence du quanton t.q

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

21) . Particule non relativiste : $v/c \ll 1$

. Soit $\Psi(x,t) = \varphi(x) f(t) = \varphi(x) e^{-iEt/\hbar}$ par conséquent :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + V\varphi = E\varphi \quad \text{où } \varphi = \varphi(x)}$$

d'où $\boxed{dP = |\Psi|^2 dx = |\varphi|^2 dx}$ car $|f(t)|^2 = 1$

22) On a $V(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k^2}\varphi = 0$

Comme $E = \hbar\omega > 0$ on a alors $\varphi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

$$\Rightarrow \boxed{\Psi = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)}}$$

OPPH se propageant vers $x>0$.

OPPH se propageant vers x négatifs

23) En relation avec le cours sur les ondes :

$$\boxed{\vec{k} = \pm k\vec{u}_x \quad \text{où } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}}$$

Or $E = E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \hbar\vec{k}}$

24) En mécanique classique, une particule ne peut pas franchir une barrière énergétique plus haute que son énergie de départ. La particule serait donc réfléchie.

25) Vu que $V=0$ on a :

$$\begin{cases} \varphi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ \varphi_{III}(x) = Ce^{ikx} + \cancel{De^{-ikx}} \end{cases}$$ où $D=0$ car l'onde ne peut revenir de l'infini.

26) Soit $\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} + \underbrace{\dfrac{2m(\epsilon - V_0)}{\hbar^2}}_{-q^2<0}\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi_{II}(x) = De^{qx} + Ee^{-qx} \text{ où } q = \sqrt{\dfrac{2m(V_0-\epsilon)}{\hbar^2}}}$

27) Conditions aux limites : $\boxed{\begin{cases} \varphi(0^-) = \varphi(0^+) \text{ et } \varphi'(0^-) = \varphi'(0^+) \\ \varphi(a^-) = \varphi(a^+) \text{ et } \varphi'(a^-) = \varphi'(a^+) \end{cases}}$

— de normalisation : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|^2 dx = 1}$

28) • Soit $\vec{j} = \dfrac{\hbar}{2m}\left[\varphi\dfrac{d\varphi^*}{dx} - \varphi^*\dfrac{d\varphi}{dx}\right]\vec{u_x} = \dfrac{\hbar}{m} Re\left[i\varphi\dfrac{d\varphi^*}{dx}\right]\vec{u_x}$.

D'où $\vec{j_I}(x) = \dfrac{\hbar}{m} Re\left[i(Ae^{ikx} + Be^{-ikx})(-ikA^*e^{-ikx} + ikB^*e^{ikx})\right]\vec{u_x}$

$= \dfrac{\hbar}{m} Re\left[k|A|^2 - k|B|^2 - \underbrace{kAB^*e^{2ikx}}_{z} + \underbrace{kBA^*e^{-2ikx}}_{z^*}\right]\vec{u_x}$

or $Re(z - z^*) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{j_I} = \dfrac{\hbar}{m} k\left[|A|^2 - |B|^2\right]}$

de même pour III : $\boxed{\vec{j_{III}} = \dfrac{\hbar k}{m} |C|^2 \vec{u_x}}$

• Interprétation : . $\vec{j_I} = \vec{j_{inc}} + \vec{j_{ref}}$ où $\begin{cases} \vec{j_{inc}} : \text{probabilité de se déplacer vers } x>0 \\ \vec{j_{ref}} : \text{———} \quad x<0 \text{ (réflexion)} \end{cases}$

. $\vec{j_{III}}$ traduit la probabilité d'avoir franchi la barrière.

d'où : $\boxed{R = \dfrac{\|\vec{j_{ref}}\|}{\|\vec{j_{inc}}\|} = \dfrac{|B|^2}{|A|^2} \text{ et } T = \dfrac{\|\vec{j_{III}}\|}{\|\vec{j_{inc}}\|} = \dfrac{|C|^2}{|A|^2}}$

29) **A.N :**

a	$0{,}50\,mm$	$1{,}00\,mm$	$2{,}00\,mm$
qa	$2{,}58$	$5{,}16$	$10{,}3$
T	$2{,}27.10^{-2}$	$1{,}32.10^{-4}$	$4{,}38.10^{-9}$

Pour la barrière épaisse : $qa \gg 1$ d'où $T = \dfrac{1}{1+\dfrac{V_0^2}{4\epsilon(V_0-\epsilon)}\,sh^2(qa)}$

est t.q $\begin{cases} sh\,qa \sim e^{qa} \\ \text{et} \\ e^{qa} \gg 1 \end{cases}$ d'où $T \sim \dfrac{4\epsilon(V_0-\epsilon)}{V_0^2}\,\dfrac{1}{\left(\frac{e^{qa}}{2}\right)^2}$

$$\Rightarrow \boxed{T \sim \underbrace{\frac{16\epsilon(V_0-\epsilon)}{V_0^2}}_{T_0(\epsilon,V_0)}\,e^{-2qa}} \Rightarrow \ln T \sim \ln T_0 - 2qa.$$

<u>Remarquons que :</u> $\dfrac{\partial T_0}{\partial \epsilon} = \dfrac{16}{V_0^2}(V_0 - 2\epsilon)$ d'où

ϵ	0		$V_0/2$		V_0
$\partial T_0/\partial\epsilon$		$+$	0	$-$	
T_0	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

$\ln 4 \sim 1{,}3.$

A part aux positions extrêmes $|\ln T_0| \ll |-2qa| \Rightarrow \boxed{\ln T \sim -2qa}$

30) . Soit ${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{A-4}_{Z-2}X$ d'où $V = \dfrac{(Z-2)e.2e}{4\pi\varepsilon_0 x}$

$$\Rightarrow \boxed{k = 2(Z-2)e^2} = 4{,}7.10^{-36}\,C^2$$

donc $\boxed{V_0 = \dfrac{k}{4\pi\varepsilon_0 x_0}} = 1{,}18.10^{-11}\,J = 74{,}4\,MeV$

. Soit $\dfrac{k}{4\pi\varepsilon_0 x_m} = \epsilon \Leftrightarrow \boxed{x_m = \dfrac{k}{4\pi\varepsilon_0\epsilon}} = 65\,fm$

. Or $q = \sqrt{2m(V_0-\epsilon)}/\hbar = 4.10^{15}\,m^{-1} \rightarrow q\underbrace{(x_m - x_0)}_{=a} \simeq 250 \gg 1$

$\rightarrow$ <u>la barrière est dite épaisse</u>

31) D'après 29) $\ln T \simeq -2qa \Leftrightarrow T \simeq e^{-2qa}$

donc $T(x+dx) = T(x)\, e^{-2q\,dx}$

$\Leftrightarrow \ln T(x+dx) = \ln T(x) - 2q\,dx$

$\Leftrightarrow d\ln T = -2q\,dx$

$\Leftrightarrow d\ln T = -2\sqrt{\dfrac{2m(V-E)}{\hbar^2}}\,dx$

D'où $\boxed{\ln T \simeq -\dfrac{2}{\hbar}\displaystyle\int_{x_0}^{x_m}\sqrt{2m_\alpha\left(\dfrac{K}{4\pi\varepsilon_0 x}-E\right)}\,dx}$ car $\ln T(x_0) \ll \ln T$ d'après 29)

32) D'où $\ln T = -\dfrac{2}{\hbar}\sqrt{2m_\alpha E}\displaystyle\int_{x_0}^{x_m}\left(\dfrac{K}{4\pi\varepsilon_0 x}\cdot\dfrac{1}{E}-1\right)^{1/2}dx$ où $E = \dfrac{K}{4\pi\varepsilon_0 x_m}$

$\Leftrightarrow \ln T = -\dfrac{2}{\hbar}\sqrt{2m_\alpha E}\displaystyle\int_{x_0}^{x_m}\sqrt{\dfrac{x_m}{x}-1}\,dx$

$\Leftrightarrow \ln T \simeq -\dfrac{2}{\hbar}\sqrt{2m_\alpha E}\times x_m\left(\dfrac{\pi}{2}-2\sqrt{\dfrac{x_0}{x_m}}\right)$ d'après l'énoncé.

$\simeq -\dfrac{2}{\hbar}\sqrt{2m_\alpha . E}\cdot\dfrac{K}{4\pi\varepsilon_0 E}\left(\dfrac{\pi}{2}-2\sqrt{x_0}\cdot\left(\dfrac{4\pi\varepsilon_0 E}{K}\right)^{1/2}\right)$

$\simeq -\dfrac{1}{4\hbar\varepsilon_0}\sqrt{\dfrac{2m_\alpha}{E}}+\dfrac{2}{\hbar}\sqrt{\dfrac{2m_\alpha x_0 K}{\pi\varepsilon_0}}$

$\Leftrightarrow \boxed{\ln T = a - \dfrac{b}{\sqrt{E}} \text{ où } \begin{cases} a = 2/\hbar\sqrt{\dfrac{2m_\alpha x_0 K}{\pi\varepsilon_0}} \\ b = \dfrac{K\sqrt{2m_\alpha}}{4\varepsilon_0\hbar}\end{cases}}$

33) Par définition : $t_m = \dfrac{2x_0}{v}$ où $E = \dfrac{1}{2}m_\alpha v^2$

$\Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{2E}{m_\alpha}} \Rightarrow \boxed{t_m = x_0\sqrt{\dfrac{2m_\alpha}{E}}}$

Le nombre de rebond par unité de temps est :

$$\boxed{n = \frac{1}{t_m} = \frac{1}{x_0}\sqrt{\frac{E}{2m_\alpha}}}$$

. Pour un unique rebond, la probabilité d'émettre une particule est égale à T, avec $T \ll 1$

. Pour un nombre de rebonds $dN = n\,dt$ on a :

$$dP = dN \cdot T \iff dP = \frac{T}{t_m}\,dt.$$

. Soit $M(t)$ le nombre de particules à l'instant t.

et dM le nombre de désintégration entre t et $dt+t$ qui vérifie :

$$M(t+dt) - M(t) = dM < 0.$$

$$= -M(t) \cdot dP$$

$$= -M(t) \cdot \frac{T}{t_m}\,dt$$

d'où $\dfrac{dM}{M} = -\dfrac{T}{t_m}\,dP \iff M = M(0)\,e^{-T/t_m \cdot t}$

donc à $t_{1/2}$: $\dfrac{M(0)}{2} = M(0)\,e^{-T/t_m \cdot t_{1/2}}$

$$\iff \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{T}{t_m} \cdot t_{1/2}$$

$$\iff \boxed{t_{1/2} = \frac{t_m}{T}\ln 2}$$

Donc $\ln t_{1/2} = \ln t_m - \ln T + \ln(\ln 2)$ avec $\ln T = a - b/\sqrt{E}$

$$\iff \ln t_{1/2} = \ln t_m - a + \frac{b}{\sqrt{E}} + \ln(\ln 2)$$

or $t_m = cste$ d'où $\boxed{\ln t_{1/2} = cste + \dfrac{b}{\sqrt{E}}}$

34) Sur le graphe proposé on vérifie bien que $\ln t_{1/2}$ est une loi affine en $\dfrac{1}{\sqrt{E}}$ avec une origine commune qui dépend de l'élément.