Physique : DM11

Automated Transfer Véhicle (Centrale PC – 2014)

I Orbite de l'ISS

I.A Préliminaires gravitationnels

1 Gravitation : $\vec{F_G} = -\frac{Gmm'}{r^2}\vec{u_r}$

Coulomb : $\vec{F_e} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$

2 Avec les analogies : $\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0} \leftrightarrow -4\pi G \\ m \leftrightarrow q \end{cases}$

On a : $\oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$ qui devient $\boxed{\oiint_\Sigma \vec{A}\cdot\vec{dS} = -4\pi G M_{int}}$

3 Le problème est à symétrie sphérique : $\vec{A} = A(r)\vec{u_r}$

d'où $A(r).4\pi r^2 = -4\pi G M_{int}$

À l'extérieur $M_{int} = M_T \Rightarrow \vec{A} = -\frac{4\pi G M_T}{4\pi r^2}\vec{u_r}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{A} = \frac{-GM_T}{r^2}\vec{u_r}}$

Donc $\boxed{\vec{A} = -\frac{k}{r^3}\vec{r} \text{ où } k = GM_T}$

Or $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} \Rightarrow \boxed{k = g_0 R_T^2}$

I.B L'orbite circulaire de l'ISS

① Pour un pb à force centrale $\vec{L_0} = \vec{cste}$

$$\Leftrightarrow mrv = cste$$

Or $r_{circulaire} = cste \Rightarrow \boxed{v = cste}$

② Soit $m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow -\frac{mv^2}{r} = -\frac{km}{r^2} \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{k}{r}}}$

or $\omega = \underbrace{\frac{v}{r}}_{cste} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{r^3}}}$ ①

③ ① donne : $r^3\omega^2 = k \Leftrightarrow r^3 \times \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = k \Leftrightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{k}{4\pi^2}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2} = cste}$$

④ Par définition : $\begin{cases} E_p = -\frac{km}{r} \\ E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{km}{2r} \end{cases} \Rightarrow \boxed{E_c = -\frac{E_p}{2}}$

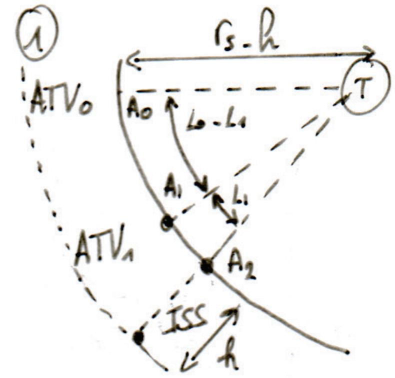
⑤ Par conséquent : $E_m = E_c + E_p \Leftrightarrow \boxed{E_m = \frac{E_p}{2} = -\frac{km}{2r}}$

⑥ On a $r_S = R_T + d_S = 6770\,km \Rightarrow \begin{cases} v_S = u_S = \underline{7{,}67\,km.s^{-1}} \\ \omega_S = \frac{v_S}{r_S} = \underline{1{,}13.10^{-3}\,rad.s^{-1}} \\ T_S = \frac{2\pi}{\omega_S} = 5540\,s = \underline{1\,h\,32\,min} \end{cases}$

II Phase finale d'approche

II.A La dérive d'approche

1



D'où : $\phi_{A_0A_1} = \dfrac{\overset{\frown}{A_0A_1}}{r_S - h} \Rightarrow \boxed{\phi_{A_0A_1} = \dfrac{L_0 - L_1}{r_S - h}} = \underline{\underline{2{,}3°}}$

2 Soit ω_{ATV} la vitesse angulaire dans $\mathcal{R}_{géo}$ d'où :

$$\omega_{ATV} = \sqrt{\frac{k}{(r_S - h)^3}}$$

or $\omega_S = \sqrt{\dfrac{k}{r_S^3}} \Rightarrow \omega_{ATV} = \omega_S \cdot \left(1 - \dfrac{h}{r_S}\right)^{-3/2}$

or $h \ll r_S \Rightarrow \boxed{\omega_{ATV} \overset{DL}{=} \omega_S \left(1 + \dfrac{3}{2}\dfrac{h}{r_S}\right)}$

D'où la vitesse angulaire relative : $\Delta\omega = \omega_{ATV} - \omega_S$

$\Leftrightarrow \boxed{\Delta\omega = \omega_S \cdot \dfrac{3}{2}\dfrac{h}{r_S}} = \underline{\underline{2{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}}}$

3 D'où $\boxed{\Delta t = \dfrac{\phi_{A_0A_1}}{\Delta\omega}} \simeq \underline{4^h 26 \text{min}}$

II.B La dynamique d'approche

1) R_{iss} par rapport à $R_{géo}$ est en translation circulaire uniforme autour de la terre et en rotation uniforme autour de Ty d'où $\boxed{R_{iss} \text{ non galiléen}}$

2) Bilan de forces : - gravitation $\vec{F}_G = -\frac{km}{TM^3}\vec{TM}$

- inertie $\begin{cases} \vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e \\ \vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c \end{cases}$

3) Par définition : $\vec{a}_e = \left.\frac{d^2\vec{TO}}{dt^2}\right|_{Rgéo} + \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}}{dt}}_{=\vec{0}\text{, uniforme.}} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})$

Posons $\vec{\Omega} = \omega_s \vec{u}_y = \vec{\omega}_s$.

or le mouvement de O dans $R_{géo}$ vérifie : $m\vec{a}(O)\Big|_{Rgéo} = -\frac{km}{TO^3}\vec{TO}$

Donc $\boxed{\vec{a}_e = -k\frac{\vec{TO}}{TO^3} + \vec{\omega}_s \wedge (\vec{\omega}_s \wedge \vec{OM})}$

4) Soit $\frac{\vec{TM}}{TM^3} = \frac{\vec{TO}+\vec{OM}}{\left[(\vec{TO}+\vec{OM})^2\right]^{3/2}} \simeq \frac{\vec{TO}}{TO^3\left[1+\frac{OM^2+2\vec{TO}\cdot\vec{OM}}{TO^2}\right]^{3/2}} + \frac{\vec{OM}}{TO^3}$

$\overset{D.L}{=} \frac{\vec{TO}}{TO^3}\left(1 - 3\frac{\vec{TO}\cdot\vec{OM}}{TO^2}\right) + \frac{\vec{OM}}{TO^3}$

Donc $\frac{\vec{TM}}{TM^3} - \frac{\vec{TO}}{TO^3} = \frac{3\vec{TO}\cdot\vec{OM}}{TO^2}\cdot\frac{\vec{TO}}{TO^3} + \frac{\vec{OM}}{TO^3} = \alpha$

or $\vec{TO} = TO\,\vec{u}_z$ donc $\vec{TO}\cdot\vec{OM} = z\,TO \Rightarrow \alpha = \frac{3z\,TO^2\vec{u}_z}{TO^5} + \frac{\vec{OM}}{TO^3}$

$= \frac{3z\vec{u}_z + x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z}{TO^3}$

D'où $\boxed{\frac{\vec{TM}}{TM^3} - \frac{\vec{TO}}{TO^3} = \frac{1}{TO^3}(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y - 2z\vec{u}_z)}$

⑤ • Calculons $\vec{F}_{ic}$ avant d'appliquer le PFD :

$$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega}_s \wedge \vec{v} = -2m\omega_s\vec{u}_y \wedge (\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z)$$
$$= -2m\omega_s(\dot{z}\vec{u}_x - \dot{x}\vec{u}_z)$$

• De m̂ $\vec{F}_{ie}$: $\vec{F}_{ie} = mk\dfrac{\vec{TO}}{TO^3} - m\vec{\omega}_s \wedge (\vec{\omega}_s \wedge \vec{OM})$

$$= mk\frac{\vec{TO}}{TO^3} + m\omega_s^2\vec{HM} \quad \text{où } \vec{HM} = \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ z \end{vmatrix}$$

Donc $m\vec{a}(M) = -km\left[\dfrac{\vec{TM}}{TM^3} - \dfrac{\vec{TO}}{TO^3}\right] + m\omega_s^2\vec{HM} - 2m\omega_s(\dot{z}\vec{u}_x - \dot{x}\vec{u}_z)$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = \frac{-k}{TO^3}\begin{vmatrix} x \\ y \\ -2z \end{vmatrix} + \omega_s^2\begin{vmatrix} x \\ 0 \\ z \end{vmatrix} - 2\omega_s\begin{vmatrix} \dot{z} \\ 0 \\ \dot{x} \end{vmatrix} \quad \text{avec } \frac{k}{TO^3} = \frac{k}{r_s^3} = \omega_s^2$$

d'où
$$\begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = \omega_s^2\begin{vmatrix} -x \\ -y \\ +2z \end{vmatrix} + \omega_s^2\begin{vmatrix} x \\ 0 \\ z \end{vmatrix} - 2\omega_s\begin{vmatrix} \dot{z} \\ 0 \\ \dot{x} \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega_s\dot{z} = 0 & (1) \\ \ddot{y} + \omega_s^2 y = 0 & (2) \quad \text{CQFD :)} \\ \ddot{z} + 2\omega_s\dot{x} - 3\omega_s^2 z = 0 & (3) \end{cases}}$$

⑥. Initialement $y_0 = 0$; $\dot{y}_0 = 0$ comme le mvt est plan $\Rightarrow \boxed{y(t) = 0}$

• (1) s'intègre en $\dot{x}(t) - \dot{x}(0) = -2\omega_s(z(t) - z_0)$

Donc (3) s'écrit : $\ddot{z} + 2\omega_s\left[\dot{x}_0 - 2\omega_s z + 2\omega_s z_0\right] - 3\omega_s^2 z = 0$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \omega_s^2 z = 2\omega_s\left[\dot{x}_0 + 2\omega_s z_0\right]$$

$$\Rightarrow z(t) = A + B\cos(\omega_s t) + C\sin(\omega_s t) \quad \text{où } \boxed{A = \frac{2\dot{x}_0}{\omega_s} + 4z_0}$$

or $\begin{cases} z(0) = z_0 = 4z_0 + \dfrac{2\dot{x}_0}{\omega_s} + B & \Rightarrow \boxed{B = -3z_0 - \dfrac{2\dot{x}_0}{\omega_s}} \\ \dot{z}(0) = \dot{z}_0 = C\omega_s & \Rightarrow \boxed{C = \dfrac{\dot{z}_0}{\omega_s}} \end{cases}$

(7) Or $\ddot{x} + 2\omega_s \dot{z} = 0 \iff \dot{x} - \dot{x}_0 = -2\omega_s (z - z_0)$

$$\Rightarrow x - x_0 = -2\omega_s \int_0^t z(t)\,dt + (2\omega_s z_0 + \dot{x}_0)t$$

$$\Rightarrow x = x_0 + (2\omega_s z_0 + \dot{x}_0)t - 2\omega_s\left[At + \frac{B}{\omega_s}\sin(\omega_s t) - \frac{C}{\omega_s}(\cos\omega_s t - 1)\right]$$

Donc $x = x_0 + \left[2\omega_s z_0 + \dot{x}_0 - 2\omega_s\left(\dfrac{2\dot{x}_0}{\omega_s} + 4z_0\right)\right]t - 2B\sin(\omega_s t) + 2C(\cos(\omega_s t) - 1)$

$$\Rightarrow \boxed{x = x_0 - 3(\dot{x}_0 + 2\omega_s z_0)t + 2\underbrace{\left(+3z_0 + 2\frac{\dot{x}_0}{\omega_s}\right)}_{-B}\sin(\omega_s t) + 2\underbrace{\frac{\dot{z}_0}{\omega_s}}_{C}\left[\cos(\omega_s t) - 1\right]}$$

(8) (a) Dans la partie II.A, on a vu que la dérive était uniforme d'où :

$\ddot{x} = 0$ et (1) $\Rightarrow \dot{z} = 0$ et $z = z_0$

$\Downarrow$

$\dot{x} = \dot{x}_0$

D'où : (3) s'écrit : $-2\omega_s \dot{x}_0 = 3\omega_s^2 z_0$

$$\iff \boxed{z_0 = -\frac{2}{3}\frac{\dot{x}_0}{\omega_s}}$$

(b) En remplaçant dans $x(t)$ et $z(t)$ on remarque que B et C sont nuls d'où

$$\begin{cases} x = x_0 - 3\left(\dot{x}_0 - \frac{4}{3}\dot{x}_0\right)t = x_0 + \dot{x}_0 t \\ z = 2\dfrac{\dot{x}_0}{\omega_s} + 4z_0 = -3z_0 + 4z_0 = z_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_0 + \dot{x}_0 t \\ z = z_0 \end{cases}}$$

II.C Phase d'approche radioguidée

1) A $t=0$ l'équation proposée donne : $z(0) = \frac{2}{\omega_s}\left(\cancel{x_0} - \cancel{x_0} - \frac{4}{3} v_s + v_s\right)$

$$\Leftrightarrow z(0) = -\frac{2}{3}\frac{v_s}{\omega_s}$$

or $z(0) = -h \Rightarrow \boxed{v_s = \frac{3}{2} h\omega_s = r_s \Delta\omega}$ d'après II.A.2

v_s représente la vitesse relative entre l'ISS et l'ATV à l'issue de la phase d'approche circulaire

2) Par définition, $\begin{cases} \Delta v = \dot{x}_0 - v_s \\ x_0 = -L_2 \end{cases}$ d'après le schéma proposé.

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 2/\omega_s\left(\dot{x}_0 - v_s - 1/3\, v_s - (\dot{x}_0 - v_s)\cos(\omega_s t)\right) \\ x = \left(-3\dot{x}_0 + 4v_s\right)t + 4/\omega_s\left(\dot{x}_0 - v_s\right)\sin(\omega_s t) + x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} z = 2/\omega_s\left(\Delta v\left(1-\cos(\omega_s t)\right) - v_s/3\right) \\ x = \left(v_s - 3\Delta v\right)t + 4/\omega_s\, \Delta v \sin(\omega_s t) - L_2 \end{cases}}$$

3) En A_3, $z(t_f) = 0 \rightarrow \Delta v\left(1-\cos(\omega_s t_f)\right) = v_s/3 \Leftrightarrow \cos(\omega_s t_f) = 1 - \frac{v_s}{3\Delta v}$

D'où $\frac{v_s}{3\Delta v} \leqslant 2 \Leftrightarrow \boxed{\Delta v \geqslant \frac{v_s}{6}}$

L'énergie dépensée par les moteurs à $t=0$ se résume à l'énergie cinétique :

$$\Rightarrow \Delta E_c = \frac{1}{2}m(v_s+\Delta v)^2 - \frac{1}{2}m v_s^2 \simeq m v_s \Delta v$$

or $\Delta v \geqslant \frac{v_s}{6} \Rightarrow \Delta E_c$ minimal pour Δv minimal

$$\rightarrow \boxed{\Delta v = \frac{v_s}{6}}$$

(4) On veut arriver en A_3 t.q $\begin{cases} z = 0 \\ x = -L_3 = -3500\,m \end{cases}$

d'où $\begin{cases} Z = 1 \\ X = 1,15 \end{cases}$ (Dans tous les cas $X < 1,5$)

La trajectoire qui se rapproche le plus de ces possibilités est la trajectoire 5

D'où $\Delta v \simeq \frac{v_s}{5} = \frac{17}{5} \simeq 3,4\,m/s$

(5) Le cas $\Delta v = \frac{v_s}{6}$ (trajectoire 6) $\Rightarrow \cos(\omega_s t_f) = -1$

$\Leftrightarrow \omega_s t_f = \pi$

$\Leftrightarrow t_f = \pi/\omega_s = \frac{T_s}{2} = 46\,min$

(6) Si on choisit la trajectoire 6 on ne sera pas en A_3, il faudra donc un nouveau changement de vitesse pour se retrouver en $Z = 1$.

II. D) Closing

(1) On reconnaît l'équation paramétrique d'une ellipse t.q :

. $\sin(\omega_s t) = -\frac{z\omega_s}{v_f} = -\frac{z}{(b/2)} \Rightarrow b = \frac{2v_f}{\omega_s}$

. $\cos(\omega_s t) = \frac{-\omega_s(x+L_3)}{2v_f} = \frac{-(x+L_3)}{(a/2)} \Rightarrow a = \frac{4v_f}{\omega_s}$

Or d'après la figure : $2b = L_3 - L_4 \Rightarrow b = \frac{L_3 - L_4}{2} = \frac{a}{2}$

(2) Le temps de vol de A_3 à A_4 correspond à une demi-période d'où $\Delta t_f = 46\,min$

(3) La navigation à vue n'est pas évidente vu les ajustements de vitesse nécessaire.