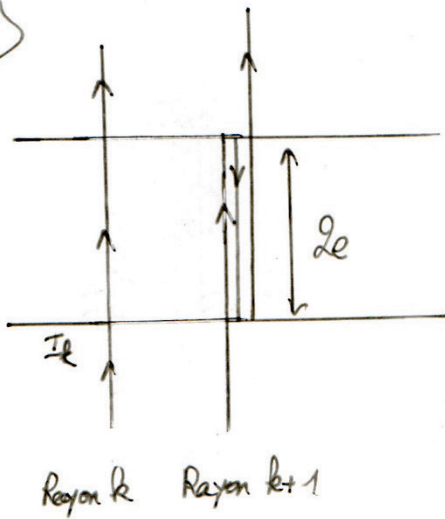


Physique : DM10

Contraste interférentiel (CCP - PC - 2013)

A.1.1)



On remarque sur le schéma que :

$$S = 2me$$

$$\Rightarrow \varphi = \Phi_{k+1} - \Phi_k = \frac{4\pi me}{\lambda}$$

1.1.2) On remarque que le rayon $(k+1)$ fait 2 réflexions supplémentaires que le rayon k d'où $\frac{A_{k+1}}{A_k} = r^2$

1.1.3) Si on note A_0 l'amplitude du rayon incident on a :

$$\begin{cases} A_1 = t^2 A_0 \\ A_2 = r^2 A_1 \\ \vdots \\ A_k = r^{2(k-1)} A_1 \end{cases}$$

et d'un point de vue de la phase

$$\begin{cases} \Delta\varphi_{1 \rightarrow 0} = 2\varphi + \frac{2\pi me}{\lambda} \\ \Delta\varphi_{2 \rightarrow 1} = \varphi \\ \vdots \\ \Delta\varphi_{k \rightarrow 1} = (k-1)\varphi \end{cases}$$

$$\text{Donc } A_k = r^{2(k-1)} t^2 A_0 e^{-i[(k-1)\varphi + 2\varphi + \frac{2\pi me}{\lambda}]}$$

$$\Rightarrow A_k = t^2 A_0 e^{-i(2\varphi + \varphi/2)} \times (r^2 e^{-i\varphi})^{k-1}$$

A.1.4)

$$\begin{aligned} \text{D'où } \underline{A} &= \sum_{k=1}^{\infty} \underline{A}_k = t^2 A_0 e^{-2i(\psi + \varphi/4)} \sum_{k=1}^{\infty} (r^2 e^{-i\varphi})^{k-1} \\ &= t^2 A_0 e^{-2i(\psi + \varphi/4)} \frac{1 - (r^2 e^{-i\varphi})^{\infty}}{1 - r^2 e^{-i\varphi}} \end{aligned}$$

or $|r e^{-i\varphi}| < 1$ d'où :

$$\underline{A} = \frac{t^2 A_0 e^{-2i(\psi + \varphi/4)}}{1 - r^2 e^{-i\varphi}}$$

$$\text{A.1.5) Or: } I = \frac{k}{2} \underline{A} \underline{A}^* = \frac{t^4 A_0^2 \cdot k/2}{(1 - r^2 e^{-i\varphi})(1 - r^2 e^{+i\varphi})}$$

$$= \frac{k t^4 A_0}{2 (1 + r^4 - (r^2 e^{-i\varphi} + r^2 e^{+i\varphi}))}$$

$$= \frac{k t^4 A_0}{2 (1 + r^4 - 2r^2 \cos \varphi)}$$

$$\text{or } \sin^2 \varphi/2 = \frac{1 - \cos \varphi}{2} \Leftrightarrow \cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \varphi/2$$

$$\text{D'où } I = \frac{k t^4 A_0}{2} \cdot \frac{1}{1 + r^4 - 2r^2 + 4r^2 \sin^2 \varphi/2}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{k t^4 A_0}{2} \frac{1}{(1 - r^2)^2 + 4r^2 \sin^2 \varphi/2} = \frac{k t^4 A_0}{2(1 - r^2)^2} \frac{1}{1 + \frac{4r^2}{(1 - r^2)^2} \sin^2 \varphi/2}$$

$$\text{Donc } I = \frac{I_0}{1 + m \sin^2(\varphi/2)} \quad \text{où } \left\{ \begin{array}{l} I_0 = \frac{k t^4 A_0}{2(1 - r^2)^2} \\ m = \frac{4r^2}{(1 - r^2)^2} \end{array} \right.$$

A.1.6 > A.N $m = 90$

① $I(\varphi)$ est maximal si le dénominateur est minimal c'est-à-dire ssi $\sin^2(\varphi/2) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} + q\pi$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \pi + 2q\pi \text{ où } q \in \mathbb{Z}.$$

Alors $I_{\max} = I_0$

② De même si $\sin^2(\varphi/2) = 1$ alors $\varphi = 2q\pi \Rightarrow I_{\min} = \frac{I_0}{1+m}$

③ Soit $I(\varphi) = \frac{I_0}{2} \Leftrightarrow 1 + m \sin^2(\varphi/2) = 2$

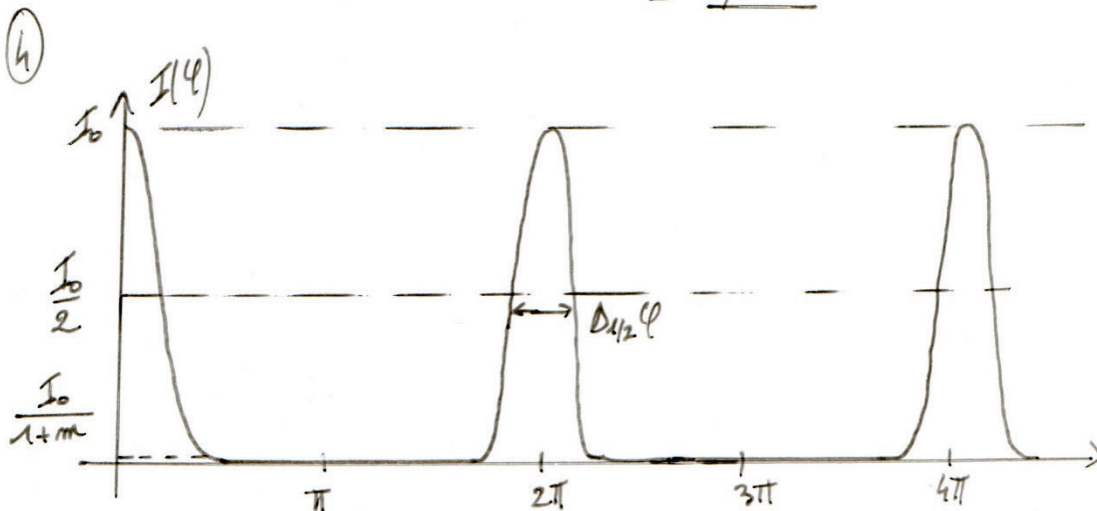
$$\Leftrightarrow \sin^2(\varphi/2) = 1/m$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\varphi}{2}\right) = \pm \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

D'où $I(\varphi) = \frac{I_0}{2} \Leftrightarrow \varphi = \pm 2 \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$

$$\text{D'où } \Delta_{1/2}(\varphi) = 4 \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \approx \frac{4}{\sqrt{m}} \text{ si } m \gg 1$$

$$\approx 0,16\pi$$



⑤. Dès que φ s'écarte de $2p\pi$ de plus de $\Delta_{1/2}\varphi$, l'intensité chute énormément.
Ainsi on peut considérer que $I=0$ sauf pour φ voisin de $2p\pi$.

. On observera une intensité variant suivant les valeurs de φ d'élevé à faible sur un écran d'observation.

A.2.1) On rajoute un détail t.q: $\delta = 2m(e-\mathcal{E}) + 2m'\mathcal{E}$.

$$\Rightarrow \varphi' = \frac{4\pi}{\lambda} [m(e-\mathcal{E}) + m'\mathcal{E}]$$

$$\Rightarrow \varphi' = \frac{4\pi}{\lambda} me + \frac{4\pi}{\lambda} \mathcal{E}(m'-m)$$

$$\Rightarrow \varphi' = \varphi + \Delta\varphi \text{ où } \Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot \mathcal{E}(m'-m)$$

A.N : $\Delta\varphi = 0,07 \text{ rad}$ avec $\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\mathcal{E}}{e} \left(\frac{m'-m}{m}\right) = \frac{\mathcal{E}}{e} \left(\frac{m'-1}{m}\right) = \frac{\mathcal{E}}{e} \times 0,005$.

Comme $\mathcal{E} \ll e \Rightarrow \Delta\varphi \ll \varphi$

A.2.2) Seul φ' change d'où $I'(\varphi') = I_0 \cdot \frac{1}{1+m \sin^2(\varphi'/2)}$

A.2.3) Soit $\mathcal{C} = \frac{I-I'}{I} = 1 - \frac{I'}{I} = 1 - \frac{1+m \sin^2(\varphi/2)}{1+m \sin^2(\varphi'/2)}$

or $\sin^2(\varphi'/2) = \sin^2\left(\frac{\varphi+\Delta\varphi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot 2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + o(\Delta\varphi/2)$

$$\Rightarrow \mathcal{C} = \frac{m \cdot \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2) \cdot \Delta\varphi}{1+m \sin^2(\varphi/2)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} = k \Delta\varphi \text{ où } k = \frac{\frac{m}{2} \sin \varphi}{1+m \sin^2(\varphi/2)}$$

A.2.4)

$$\text{On a } K = \frac{45}{1 + 90 \sin^2(\pi/4)} = \frac{45}{46} \approx 1.$$

$\Rightarrow \mathcal{C} = 0,07 < 0,1$: le détail est difficilement visible

A.2.5) Soit $K = \frac{m/2 \sin \varphi}{1 + m \sin^2(\varphi/2)}$

$$\text{d'où } \frac{dK}{d\varphi} = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{2} \cdot \cos \varphi (1 + m \sin^2(\varphi/2)) - \frac{m}{2} \sin \varphi (m \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi (1 + m \sin^2(\varphi/2)) = \sin \varphi (m \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2))$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi \left(1 + m \frac{(1 - \cos \varphi)}{2}\right) = \sin \varphi \cdot m \times \frac{\sin \varphi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi \left(1 + \frac{m}{2}\right) - \frac{m}{2} \cos^2 \varphi = \frac{m}{2} \sin^2 \varphi$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi \left(1 + \frac{m}{2}\right) - \frac{m}{2} \cos^2 \varphi = \frac{m}{2} (1 - \cos^2 \varphi)$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi \left(1 + \frac{m}{2}\right) = \frac{m}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{m/2}{1 + m/2} \Rightarrow \underline{\varphi = 120^\circ}$$

dans ce cas : $K = 4,7$

Or $\mathcal{C} = 0,1$ pour que les détails soient visibles d'où : $\Delta \varphi_{\min} = \frac{c}{K} = 0,021 \text{ rad.}$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} (m - m') \mathcal{E} = \Delta \varphi_{\min} \Rightarrow \mathcal{E}_{\min} = \frac{\Delta \varphi_{\min} \cdot \lambda}{2\pi (m - m')}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathcal{E}_{\min} = 0,37 \mu\text{m.}}$$

On verra des détails de $0,37 \mu\text{m}$ au minimum

- On peut traiter l'objet à étudier en augmentant son pouvoir réfléchissant. La transmission par l'objet serait modifiée et on le verrait mieux. On peut aussi faire une inversion de contraste par stéréoscopie.