TH4 – Rayonnement thermique

A – Travaux dirigés

TH41 – Corps noir dans un four

1. Il faut avoir des températures élevées pour ne tenir compte que des transferts thermiques radiatifs puisque le flux surfacique émis par un corps en équilibre thermodynamique est σT^4.

2. On appelle S la surface totale du cube : $S = 6a^2$. On appelle T la température du cube. Pendant $\mathrm{d}t$, la température varie de $\mathrm{d}T$. On peut utiliser la loi de Stéfan puisque le cube est en équilibre thermodynamique à la température T.
On écrit le premier principe de la thermodynamique au cube entre t et $t + \mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$$

- La variation d'énergie interne vaut : $\mathrm{d}U = mc\mathrm{d}T$.
- Il n'y a pas de travail : $\delta W = 0$.
- Le flux surfacique émis par le cube considéré comme un corps noir est d'après la loi de Stéfan σT^4. Le flux thermique émis par le four considéré lui aussi comme un corps noir est σT_1^4. On en déduit le flux surfacique radiatif (orienté du corps noir vers l'extérieur) à la surface du cube (comprenant 6 faces de surface totale $S = 6a^2$) :

$$\phi^{\mathrm{rad}} = \sigma T^4 - \sigma T_1^4$$

Le transfert thermique algébriquement reçu par le cube est :

$$\delta Q_{\text{reçu}} = -\phi^{\mathrm{rad}} S\,\mathrm{d}t = -\left(\sigma T^4 - \sigma T_1^4\right) S\,\mathrm{d}t$$

On en déduit l'équation différentielle en T :

$$mc\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\left(\sigma T^4 - \sigma T_1^4\right) S$$

D'après l'énoncé, on suppose que T est proche de T_1. On pose $x = T - T_1$.

On a : $T^4 - T_1^4 = (T_1 + x)^4 - T_1^4 = T_1^4 \left(1 + \dfrac{x}{T_1}\right)^4 - T_1^4$.

On fait un développement limité au premier ordre. On obtient :

$$T_1^4 \left(1 + \frac{x}{T_1}\right)^4 - T_1^4 \approx T_1^4 \left(1 + 4\frac{x}{T_1}\right) - T_1^4 = 4T_1^3 x = 4T_1^3 (T - T_1)$$

L'équation différentielle s'écrit : $mc\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\sigma 4T_1^3 (T - T_1) S$, soit :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{\sigma 4T_1^3 S}{mc} T = \frac{\sigma 4T_1^3 S}{mc} T_1$$

On définit la constante de temps : $\tau = \dfrac{mc}{\sigma 4T_1^3 S}$.

On peut écrire l'équation différentielle avec la forme canonique :

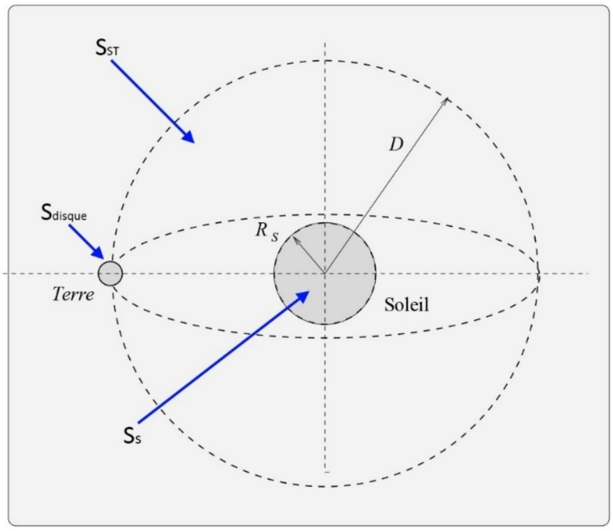
$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_1}{\tau}.$$

La résolution donne : $T = A \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + T_1$.

À $t = 0$, $T = T_0 = A + T_1$. On en déduit que $A = T_0 - T_1$, soit :

$$T = (T_0 - T_1) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_1$$

TH42 – L'effet de serre « atmosphérique »

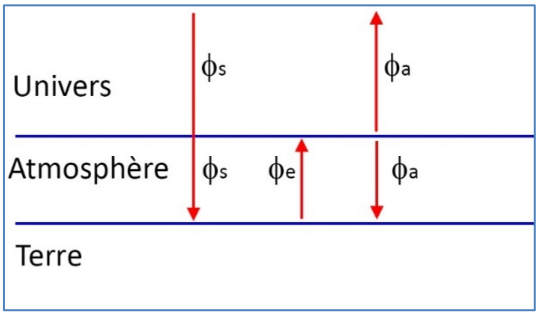


1. D'après la loi de Stefan-Boltzmann :
$$P_s = 4\pi R_s^2 \times \sigma T_s^4$$
2. La surface de la terre vue par le soleil correspond à un disque de rayon R_T d'où :
$$P_T = \frac{\pi R_T^2}{4\pi d^2} \times P_s$$
$$\Leftrightarrow P_T = \frac{\pi R_T^2}{4\pi d^2} \times 4\pi R_s^2 \times \sigma T_s^4$$
$$\Leftrightarrow P_T = \frac{\pi R_T^2 R_s^2}{d^2} \times \sigma T_s^4$$
3.

- D'après la loi de Wien :
$$\lambda_{max} T = 2898\,\mu m.K \Rightarrow T_s = 5790\,K$$
- Si on ne tient pas compte de l'atmosphère les deux puissances thermiques sont égales au niveau de la surface terrestre :
$$\Leftrightarrow P_T = P_E$$
$$\frac{\pi R_T^2 R_s^2}{d^2} \times \sigma T_s^4 = \sigma T_{e1}^4 \times 4\pi R_T^2$$
$$\Leftrightarrow T_{e1} = T_s \times \left(\frac{R_s^2}{4d^2}\right)^{\frac{1}{4}} = 280K$$

La température est relativement faible, il faut tenir compte de l'atmosphère

4.



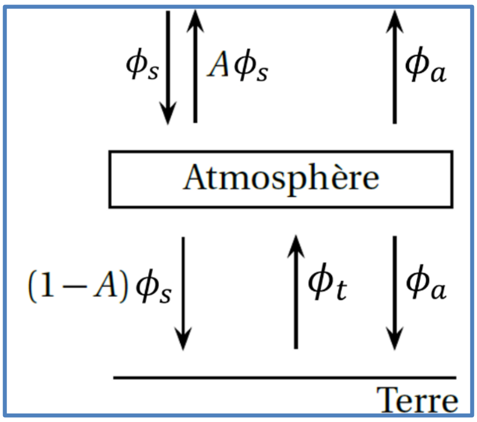
On effectue un bilan d'énergie :

- Pour la terre : $\phi_s + \phi_a = \phi_e$
- Pour la tranche d'atmosphère : $2\phi_a = \phi_e$

Donc :
$$\phi_s = \phi_a = \frac{\phi_e}{2}$$
$$\Rightarrow P_T = \frac{P_E}{2}$$
$$\Rightarrow T_{e2} = T_s \times \left(\frac{R_s^2}{2d^2}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{1/4}\, T_{e1} = 332K$$

La température est plus élevée en présence d'atmosphère. C'est l'effet de serre.

5. Si on tient compte de l'albédo, cette fois on a :



$$\begin{cases} terre : \ (1-A)\ \phi_s + \phi_a = \phi_T \\ atmosphère : \ (1-A)\ \phi_s + A\phi_s + 2\phi_a = \phi_T + \phi_s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} terre : \ (1-A)\ \phi_s + \phi_a = 2\phi_a \\ atmosphère : \ 2\phi_a = \phi_T \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi_a = (1-A)\ \phi_s = \frac{\phi_T}{2}$$

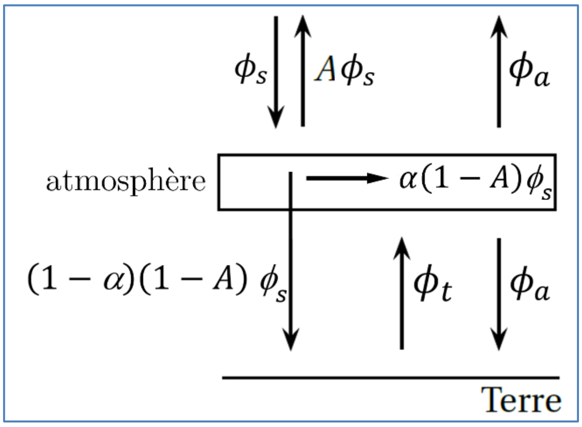
$$\Rightarrow (1-A)P_T = \frac{P_E}{2}$$

$$\Rightarrow T_{e3} = T_s \times \left((1-A)\frac{R_s^2}{2d^2}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(2(1-A)\right)^{1/4} T_{e1}$$

$$= 303K$$

On obtient une température plus réaliste.

6. On peut améliorer le modèle en considérant que l'atmosphère n'est pas entièrement transparente au rayonnement solaire. L' atmosphère absorbe une fraction α et la Terre une fraction $1-\alpha$ du rayonnement solaire émergent de la surface de l'atmosphère :



D'où le bilan :

- Pour la terre : $(1-A)(1-\alpha)\ \phi_s + \phi_a = \phi_T$
- Pour la tranche d'atmosphère :

$$(1-\alpha)(1-A)\ \phi_s + \alpha(1-A)\phi_s + 2\phi_a + A\phi_s = \phi_T + \phi_s$$

$$\Rightarrow T_{e4} = \left(2(1-A)(1-\alpha)\right)^{1/4} T_{e1}$$

Si $\alpha = 0{,}1 \Rightarrow T_{e4} = 293K$

7. Le méthane et les CFC sont particulièrement efficaces pour l'effet de serre car leur bande d'absorption correspond à une fenêtre atmosphérique où normalement la terre rayonne de l'énergie vers l'espace. Les activités humaines produisent une grande partie du méthane et des CFC de l'atmosphère. Il faut donc en limiter les rejets.

B – Exercices supplémentaires

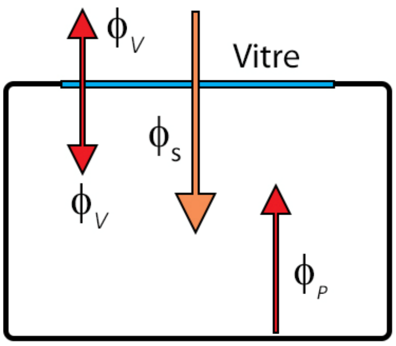
TH43 – Effet de serre

1. On a : $\phi_S = \sigma T^4 \Rightarrow \phi_s = 447 W\ m^{-2}$

2. D'après la loi de Wien : $\lambda_{max} T = 2898\ \mu m.K \Rightarrow \lambda_{max} = 9{,}7\ \mu m\ (IR\ lointain)$

3. Les murs rayonnent donc à une longueur d'onde centrée sur λ_{max}. Or ces rayonnements sont complètement absorbés par la vitre qui se comporte alors comme un corps noir. Elle va donc réémettre en partie vers la pièce et par conséquent augmenter le flux surfacique de rayonnement, donc la température de surface des murs.

4.



- Pour une surface dS de la vitre : $\phi_p = 2\phi_v$
- Pour une surface dS de la pièce : $\phi_p = \phi_v + \phi_s$

Donc : $\phi_p = 2\phi_s$, l'effet de serre a pour conséquence de doubler le flux surfacique incident sur les murs. Alors :

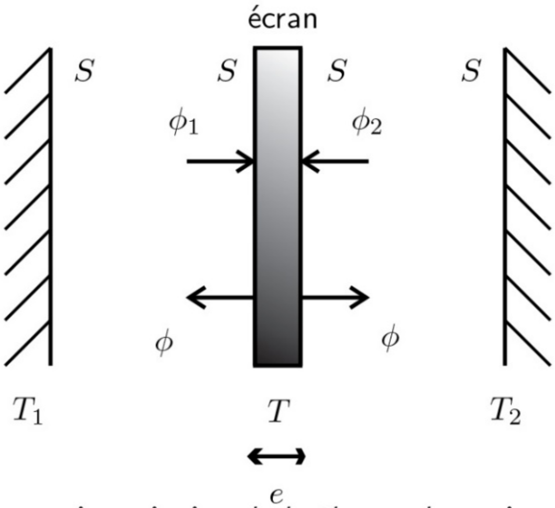
$$T_p = \left(\frac{2\phi_s}{\sigma}\right)^{1/4} = 1{,}2\ T_0 = 84{,}6°c$$

TH44 – Feuille d'aluminium entre deux parois planes

1. Il y a quatre flux surfaciques émis par les différentes surfaces qui sont considérées comme des corps noirs :

- flux surfacique émis par la paroi 1 à la température T_1 considérée comme un corps noir : $\phi_1 = \sigma T_1^4$
- flux surfacique émis par la surface de la feuille d'aluminium (à la température T) qui se situe en face de la paroi 1 : $\phi = \sigma T^4$
- flux surfacique émis par la paroi 2 à la température T_2 considérée comme un corps noir : $\phi_2 = \sigma T_2^4$
- flux surfacique émis par la surface de la feuille d'aluminium (à la température T) qui se situe en face de la paroi 2 : $\phi = \sigma T^4$

On appelle S les surfaces des 4 parois planes.



2. On applique le premier principe de la thermodynamique à la feuille d'aluminium entre t et $t + \mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$$

- La variation d'énergie interne vaut : $\mathrm{d}U = mc\mathrm{d}T = (\mu S e)\, c\mathrm{d}T$.
- Il n'y a pas de travail : $\delta W = 0$.
- Le transfert thermique algébriquement reçu par l'écran est :

$$\delta Q = \left(\phi_1 - \phi\right) S\mathrm{d}t + \left(\phi_2 - \phi\right) S\mathrm{d}t$$

Il reste à simplifier $\phi_1 - \phi = \sigma\left(T_1^4 - T^4\right)$ et $\phi_2 - \phi = \sigma\left(T_2^4 - T^4\right)$.
On pose $x = T - T_1$.

$$T_1^4 - T^4 = T_1^4 - (T_1 + x)^4 = T_1^4 - T_1^4\left(1 + \frac{x}{T_1}\right)^4$$

D'après l'énoncé, on suppose que T est très proche de T_1.

On fait un développement limité au premier ordre :

$$T_1^4 - T_1^4\left(1+\frac{x}{T_1}\right)^4 \approx T_1^4 - T_1^4\left(1+4\frac{x}{T_1}\right) = -4T_1^3 x$$
$$= -4T_1^3\left(T - T_1\right)$$

On donc :

$$\phi_1 - \phi = -\sigma 4T_1^3\left(T - T_1\right)$$

On obtient de même :

$$\phi_2 - \phi = -\sigma 4T_2^3\left(T - T_2\right)$$

Le premier principe s'écrit alors :

$$(\mu S e)\, c\mathrm{d}T = -4\sigma T_1^3\left(T - T_1\right)S\mathrm{d}t - 4\sigma T_2^3\left(T - T_2\right)S\mathrm{d}t$$

Comme T_1 est voisin de T_2, on a :

$$(\mu S e)\, c\mathrm{d}T = -4\sigma T_1^3\left(T - T_1\right)S\mathrm{d}t - 4\sigma T_1^3\left(T - T_2\right)S\mathrm{d}t$$

En simplifiant, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{8\sigma T_1^3}{\mu c e}T = \frac{4\sigma T_1^3}{\mu c e}\left(T_1 + T_2\right)$$

On définit la constante de temps :

$$\tau = \frac{\mu c e}{8\sigma T_1^3}$$

Le régime permanent est :

$$T_\infty = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

On peut écrire l'équation différentielle avec la forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_\infty}{\tau}$$

La température est :

$$T = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_\infty$$

A $t = 0$, $T = T_0 = A + T_\infty$. On en déduit que $A = T_0 - T_\infty$, soit :

$$T = \left(T_0 - T_\infty\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_\infty$$

TH45 – Igloo

Un homme, même parfaitement couvert, émet de la chaleur par rayonnement, comme tout corps considéré noir de surface S_h à la température $T_h = 37°c.$ Avec la loi de Stefan-Boltzmann on obtient :

$$P_h = \sigma S_h T_h^4$$

On peut estimer sa surface $S_h = 1m^2$ soit à la louche, soit en assimilant l'homme à une sphère d'eau de 80kg.

$$\begin{cases} m = \mu \dfrac{4}{3}\ \pi R^3 \\ S = 4\pi R^2 \end{cases} \Rightarrow S = 4\pi \left(\frac{3m}{4\pi\mu}\right)^{\frac{2}{3}} \sim 0{,}9\ m^2$$

$$\Rightarrow P_h = 464W$$

On peut modéliser l'igloo par une demi-sphère de rayon R=1,5m et d'épaisseur e=30cm et on suppose que la température de l'air à l'intérieure de l'igloo est constante :

Or : $\Delta T = R_{th}\ \phi$

$$\Leftrightarrow \Delta T = \left(R_{th,air\to neige} + R_{th,neige} + +R_{th,neige\to air}\right)\phi$$

Avec (On peut supposer $e \ll R_1$, pour simplifier le calcul) :

$$\begin{cases} R_{th,neige} = \dfrac{1}{4\pi\lambda_{neige}}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right) = 0{,}035KW^{-1} \\ R_{th,air\to neige} = \dfrac{1}{hS} = 7{,}0\,.\,10^{-4}KW^{-1} \\ R_{th,neige\to air} = 4{,}9\,.\,10^{-4}KW^{-1} \end{cases}$$

Donc :

$$\Delta T \sim R_{th,neige}\ \phi = 17K$$

Par conséquent la température de l'igloo est de 12°c. On peut améliorer cela par le nombre de personnes, ou l'épaisseur de la couche de neige.