

TH3 – Diffusion thermique

Dans la partie « **Diffusion thermique** », la mise en équations de la diffusion thermique est limitée au cas des solides ; on peut étendre les résultats ainsi établis aux milieux fluides en l'absence de convection en affirmant la généralisation des équations obtenues dans les solides. La loi phénoménologique de Newton à l'interface entre un solide et un fluide peut être utilisée dès lors qu'elle est fournie.

3.3 Diffusion thermique		
Vecteur densité de flux thermique \vec{J}_Q ou \vec{J}_{th}	Exprimer le flux thermique à travers une surface orientée en utilisant le vecteur \vec{J}_{th} .	
Premier principe de la thermodynamique.	Établir, pour un milieu solide, l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas d'un problème ne dépendant qu'une d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques, éventuellement en présence de sources internes. Utiliser l'opérateur divergence et son expression fournie pour exprimer le bilan local dans le cas d'une géométrie quelconque, éventuellement en présence de sources internes.	On retrouve le même bilan qu'en diffusion de particules sur une variable différente.
Loi de Fourier.	Utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, métaux.	Les ordres de grandeur sont souvent demandés à l'oral.
Régimes stationnaires. Résistance thermique.	Utiliser la conservation du flux thermique sous forme locale ou globale en l'absence de source interne. Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Établir l'expression d'une résistance thermique dans le cas d'un modèle unidimensionnel. Utiliser les lois d'associations de résistances thermiques.	La résistance thermique est utilisée en régime stationnaire.
Équation de la diffusion thermique.	Établir une équation de diffusion thermique. Utiliser l'opérateur laplacien et son expression fournie pour écrire l'équation de diffusion dans le cas d'une géométrie quelconque. Analyser une équation de diffusion en ordres de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Utiliser la loi de Newton fournie comme condition aux limites à une interface solide-fluide. <i>Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.</i> <i>Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant une caméra thermique ou un capteur dans le domaine des infrarouges.</i>	La loi de Newton retranscrit les échanges conducto-convectifs entre fluide et solide.

I – Généralités

I-1) Equilibre thermodynamique local

Dans le cours de thermodynamique de première année, on a défini trois échelles de longueur :

- L'échelle microscopique : la taille caractéristique de cette échelle est la distance moyenne entre particules (ou le libre parcours moyen des particules dans un gaz).
- L'échelle macroscopique : la taille caractéristique de cette échelle est l'échelle de longueur L caractéristique du système étudié ;
- L'échelle mésoscopique : c'est une échelle intermédiaire dont la taille caractéristique d est très grande devant le libre parcours moyen l et très petite devant L .

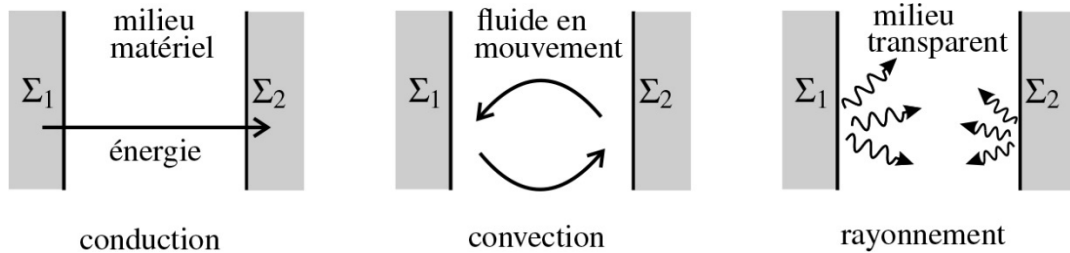
$$l \ll d \ll L$$

Le système macroscopique Σ étudié n'est pas à l'équilibre thermodynamique. Cependant, on peut diviser Σ en volumes mésoscopiques pour lesquels Y a une valeur bien déterminée : il suffit que la taille des volumes mésoscopiques soit très inférieure à la distance caractéristique de variation de Y .

Ceci permet de définir $Y(M, t)$, valeur locale de Y en un point M du système, à l'instant t . C'est l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local, selon laquelle ces volumes mésoscopiques sont quasiment des systèmes thermodynamiques à l'équilibre.

Equilibre thermodynamique local : Les volumes mésoscopiques sont des systèmes thermodynamiques en équilibre.

I-2) Les trois modes de transport de l'énergie



- Conduction thermique : transfert d'énergie à travers un milieu matériel (solide, fluide au repos) d'origine microscopique (agitation thermique). Ex : Transfert thermique à travers les murs d'une maison...
- Convection thermique : transport dû à un mouvement macroscopique de matière. Ce type de transfert peut exister en plus de la conduction dans les fluides.
 - o Convection naturelle : le mouvement du fluide apparaît spontanément, du fait de l'inégalité de températures. Ex : Dans une pièce chauffée par le sol, l'air frais au niveau du sol est chauffé, il devient plus léger, et tend à s'élever, ce qui provoque un mouvement de convection.
 - o Convection forcée : le mouvement du fluide est provoqué par une cause extérieure. Ex : ventilateur qui pulse de l'air pour refroidir un microprocesseur d'ordinateur.
- Le rayonnement thermique (TH4)

Le troisième et dernier transport d'énergie est celui par rayonnement. Une onde électromagnétique se propage et transporte de l'énergie, modélisé par le vecteur de Poynting dans le chapitre sur les ondes électromagnétiques. Ce sont par exemple les ondes infrarouges du spectre lumineux, issues directement du Soleil ou des braises d'un feu.

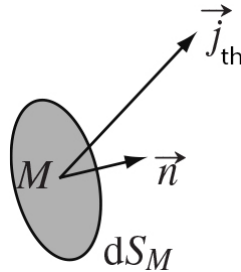
II – Flux thermique

II-1) Flux thermique

On appelle flux thermique ϕ_{th} , la quantité d'énergie thermique δQ qui traverse une surface finie orientée S pendant une durée dt :

$$\phi_{th} = \frac{\delta Q}{dt} \text{ ou } \underbrace{\delta Q}_J = \underbrace{\phi_{th}}_{J S^{-1}} \underbrace{dt}_s$$

II-2) Vecteur densité de courant thermique



Le flux thermique n'est pas forcément uniforme sur la surface S . Pour quantifier sa répartition, on définit un flux thermique surfacique quantifié par le vecteur densité de courant.

Le flux du vecteur densité de courant thermique à travers la surface finie orientée S est égal au flux thermique traversant cette surface :

$$\underbrace{\phi_{th}}_W = \iint_S \underbrace{d\phi_{th}}_W = \iint_{M \in S} \underbrace{\vec{j}_{th}(M, t)}_{W m^{-2}} \cdot \overrightarrow{dS_M}$$

La norme de \vec{j}_{th} représente le flux thermique surfacique.

III – Bilan thermique

III-1) Généralités

Le premier principe s'écrit :

$$d(U + E_c + E_{p,ext}) = \delta W + \delta Q$$

On suppose :

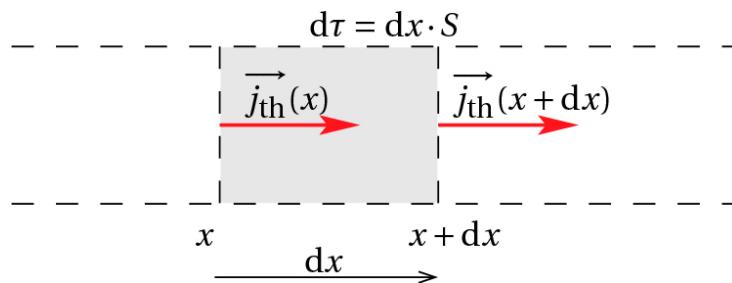
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{systeme fixe : } dE_c = 0 \text{ et } dE_{p,ext} = 0 \\ \text{Absence de travail mécanique : } \delta W = 0 \\ \delta Q = \underbrace{\delta Q_{\text{éch}}}_{\text{chaleur échangée}} + \underbrace{\delta Q_c}_{\text{énergie thermique "créée"}} \end{array} \right.$$

Pour les bilans thermiques on utilisera la relation :

$$dU = \delta Q_{\text{éch}} + \delta Q_c \text{ ou } \Delta U = Q_{\text{éch}} + Q_c$$

III-2) Bilan local unidimensionnel

a) En coordonnées cartésiennes



Considérons un système pour lequel la diffusion d'énergie se fait suivant une seule direction Ox. Dans le cas des solides ou des fluides au repos la diffusion domine la convection. Attention au cas des fluides mobiles où la convection domine la diffusion.

Exemple : une barre d'axe Ox de surface latérale calorifugée.

Bilan thermique appliqué au volume compris entre x et x+dx :

- Variation de l'énergie interne U pendant dt :

$$dU = \delta mc(T(x, t + dt) - T(x, t)) \sim \delta mc \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

$$\Leftrightarrow dU = \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} S dx dt \text{ où } \rho = \text{masse volumique}$$

- Energie thermique échangée :

$$\begin{aligned}\delta Q_{\text{éch}} &= \delta Q_x - \delta Q_{x+dx} \\ \Leftrightarrow \delta Q_{\text{éch}} &= \left(\phi_{th}(x) - \phi_{th}(x+dx) \right) dt \\ \Leftrightarrow \delta Q_{\text{éch}} &= - \frac{\partial \phi_{th}(x,t)}{\partial x} dx dt \\ \Leftrightarrow \delta Q_{\text{éch}} &= - \frac{\partial (j_{th}(x,t)S)}{\partial x} dx dt\end{aligned}$$

- Energie thermique créée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta Q_c = \underbrace{P_v}_{\text{Wm}^{-3}} S dx dt \\ P_v : \text{puissance thermique produite par unité de volume} \end{array} \right.$$

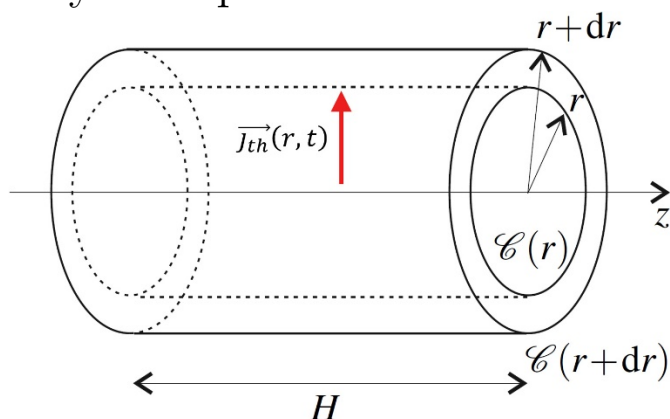
- D'où le bilan vu que S est constante :

$$\begin{aligned}\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} S dx dt &= - \frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} S dx dt + P_v S dx dt \\ \Leftrightarrow \rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} &= - \frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} + P_v\end{aligned}$$

L'équation locale traduisant le bilan thermique s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} = \underbrace{P_v(x,t)}_{=0 \text{ si pas de création}}$$

b) En coordonnées cylindriques



Bilan thermique appliqué au volume compris entre deux cylindres $C(r)$ et $C(r + dr)$.

$$dU = \delta Q_{\text{éch}} + \delta Q_c$$

$$\text{Or } \begin{cases} dU = \delta mc(T(r, t + dt) - T(r, t)) = \rho d\tau c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dt \\ \delta Q_{\text{éch}} = (\phi_{th}(r, t) - \phi_{th}(r + dr, t))dt = -\frac{\partial \phi_{th}(r, t)}{\partial r} dr dt \\ \delta Q_c = P_v d\tau dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho d\tau c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dt = -\frac{\partial (j_{th}(r, t)S(r))}{\partial r} dr dt + P_v d\tau dt$$

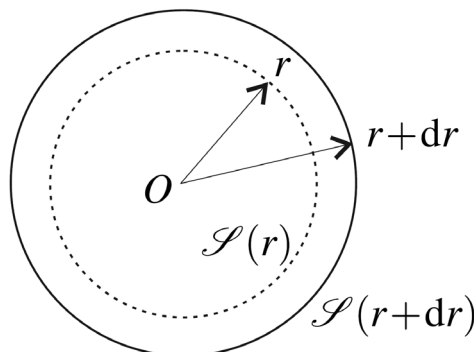
$$\Leftrightarrow \rho c 2\pi r dr H \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = -\frac{\partial (j_{th}(r, t)2\pi r H)}{\partial r} dr + P_v 2\pi r dr H$$

$$\Leftrightarrow \rho c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r j_{th}(r, t))}{\partial r} + P_v$$

L'équation locale traduisant le bilan thermique s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\rho c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r j_{th}(r, t))}{\partial r} = \underbrace{P_v(r, t)}_{=0 \text{ si pas de création}}$$

c) En coordonnées sphériques



Bilan thermique appliqué au volume compris entre deux sphères $S(r)$ et $S(r + dr)$.

$$dU = \delta Q_{\text{éch}} + \delta Q_c$$

$$\text{Or } \begin{cases} dU = \delta mc(T(r, t + dt) - T(r, t)) = \rho d\tau c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dt \\ \delta Q_{\text{éch}} = (\phi_{th}(r, t) - \phi_{th}(r + dr, t))dt = -\frac{\partial \phi_{th}(r, t)}{\partial r} dr dt \\ \delta Q_c = P_v d\tau dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho d\tau c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dt = -\frac{\partial(j_{th}(r, t)S(r))}{\partial r} dr dt + P_v d\tau dt$$

$$\Leftrightarrow \rho c 4\pi r^2 dr \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = -\frac{\partial(j_{th}(r, t)4\pi r^2)}{\partial r} dr + P_v 4\pi r^2 dr$$

$$\Leftrightarrow \rho c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 j_{th}(r, t))}{\partial r} + P_v$$

L'équation locale traduisant le bilan thermique s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\rho c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 j_{th}(r, t))}{\partial r} = \underbrace{P_v(r, t)}_{=0 \text{ si pas de création}}$$

III-3) Bilan local tridimensionnel

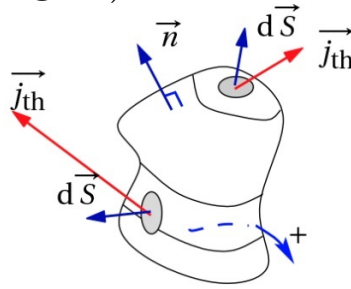
On peut généraliser ses résultats à l'aide de l'opérateur divergence dont on rappelle les expressions :

Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\phi)}{\partial \phi}$

L'équation locale traduisant le bilan thermique s'écrit :

$$\rho c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{J}_{th}(M, t) = \underbrace{P_v(M, t)}_{=0 \text{ si pas de création}}$$

III-4) Bilan global (ou intégral)



Surface finie et fermée S
délimitant un volume V

Soit :

$$dU = \delta Q_{éch} + \delta Q_c$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} dU = \iiint_{M \in V} (T(M, t + dt) - T(M, t)) \rho c d\tau = \iiint_{M \in V} \rho c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} dt d\tau \\ \delta Q_{éch} = \phi_{th} dt = - \oiint_{P \in S} \vec{J}_{th} \cdot \vec{dS} dt = - \iiint_{M \in V} \text{div} \vec{J}_{th} d\tau dt \\ \delta Q_c = \iiint_{M \in V} P_v(M, t) dt d\tau \end{array} \right.$$

Bilan thermique intégral :

$$\iiint_{M \in V} \left(\rho c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{J}_{th}(M, t) - P_v(M, t) \right) d\tau$$

Ceci étant vrai pour tout V , on retrouve le bilan local :

$$\rho c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{J}_{th}(M, t) = P_v(M, t)$$

IV - Loi de Fourier

IV-1) Loi phénoménologique

L'observation expérimentale de la diffusion thermique, des zones de forte température vers celles de faible température, avec un flux thermique d'autant plus grand que le déséquilibre est grand, conduit à introduire une loi phénoménologique analogue à la loi de Fick, la loi de Fourier :

Loi de Fourier en 1D :

$$\vec{J}_{th}(x, t) = -\lambda \frac{dT(x, t)}{dx} \vec{u}_x$$

En 3D :

$$\underbrace{\vec{J}_{th}(M, t)}_{Wm^{-2}} = - \underbrace{\lambda}_{\substack{\text{conductivité} \\ \text{thermique}}} \underbrace{\overrightarrow{grad} T(M, t)}_{Km^{-1}}$$

La valeur de la conductivité thermique dépend du matériau considéré (toutes les mesures ont été réalisées à 25°C) :

Milieu	Cuivre	Aluminium	Acier	Vitrocéramique	Pyrex	Béton
λ $WK^{-1}m^{-1}$	399	237	16	3,98	1,4	0,92
Milieu	Brique	Eau	Bois	Laine de verre	Polystyrène expansé	Air
λ $WK^{-1}m^{-1}$	0,72	0,597	0,15 à 0,45	0,038	0,027	0,026

Remarque :

La valeur de la conductivité thermique des gaz et des liquides dépend de la température. Elle augmente avec T pour les gaz alors qu'elle diminue avec T pour les liquides.

IV-2) Limites de validité

- Si $\overrightarrow{\text{grad}} T$ est trop important, $\overrightarrow{J_{th}}$ n'est plus proportionnelle à $\overrightarrow{\text{grad}} T$.
- Si $\overrightarrow{\text{grad}} T$ varie trop vite dans le temps, la proportionnalité entre $\overrightarrow{J_{th}}$ et $\overrightarrow{\text{grad}} T$ n'est plus instantanée. Il y a un retard dans l'établissement du flux thermique
- Cas des milieux anisotropes : λ dépend de la direction de l'espace. Ex : Pour le graphite, λ est 400 fois plus forte dans une direction parallèle aux couches atomiques que perpendiculairement à celles-ci.

V – Régimes stationnaires

V-1) Conservation du flux

On a vu :

$$\rho c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + \text{div } \overrightarrow{J_{th}}(M, t) = \underbrace{P_v(M, t)}_{=0 \text{ si pas de création}}$$

Donc en l'absence de sources :

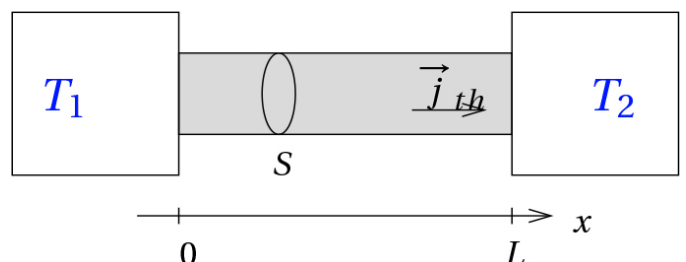
$$\text{div } \overrightarrow{J_{th}}(M, t) = 0 \stackrel{G.O}{\Leftrightarrow} \oiint_S \overrightarrow{J_{th}} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

En l'absence de sources internes, et en régime permanent le flux thermique est conservé.

V-2) Résistance thermique

a) Définition

Considérons un cylindre d'axe Ox de section S et de longueur L, en contact avec deux thermostats de température T_1 et T_2 :



On a déjà vu cette situation dans le chapitre précédent :

$$\operatorname{div} \vec{J}_{th} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \oiint_S \vec{J}_{th} \cdot \vec{dS} = 0 \\ \frac{\partial j_{th,x}}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Si on envisage un volume $d\tau = Sdx$ alors :

$$\Rightarrow \iint_{S(x)} j_{th}(x) dS_x = \iint_{S(x+dx)} j_{th}(x+dx) dS_{x+dx}$$

$$\Rightarrow \phi_{entrant} = \phi_{sortant} \text{ car } \vec{dS}_{latéral} \perp \vec{J}_{th}$$

$$\Rightarrow \phi_{th} = j_{th}S = cste \text{ d'où } -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S = cste$$

$$\Rightarrow T(x) = Ax + B$$

$$\text{Or : } \begin{cases} T(0) = T_1 \\ T(L) = T_2 \end{cases} \Rightarrow T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

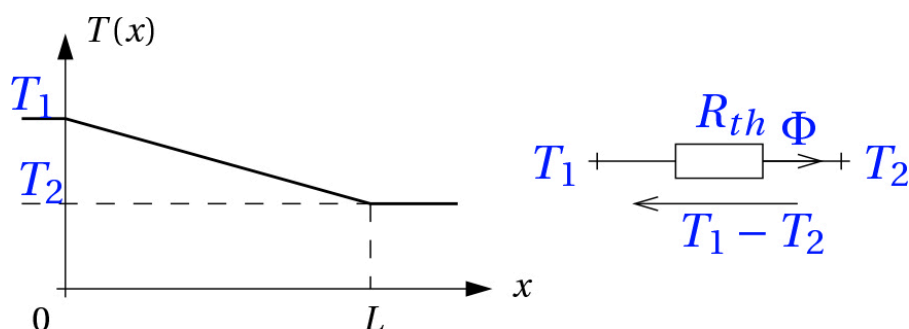
$$\Rightarrow \begin{cases} j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \\ \phi_{th} = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{L} \end{cases}$$

On peut réécrire ce résultat sous la forme :

$$T_1 - T_2 = R_{th} \phi_{th,1 \rightarrow 2} \text{ où } R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$

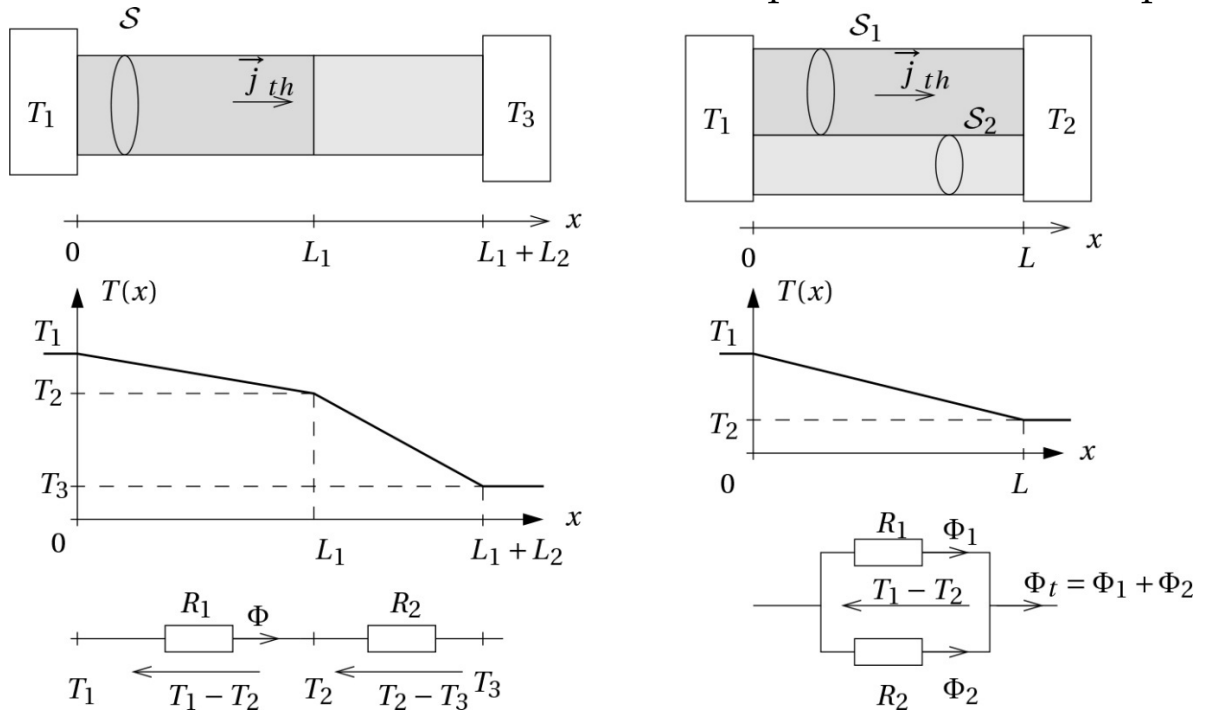
En analogie avec la loi d'Ohm : $V_1 - V_2 = R I$ on introduit la résistance thermique R_{th} :

$$T_1 - T_2 = \underbrace{R_{th}}_{KW^{-1}} \phi_{th,1 \rightarrow 2} \text{ où } R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$



b) Lois d'association

On va retrouver les mêmes lois d'association qu'en électrocinétique :



- Association en série (à gauche) :

$$T_1 - T_3 = (T_1 - T_2) + (T_2 - T_3)$$

$$\Leftrightarrow R_{th,s} \phi_{th} = R_{th,1} \phi_{th} + R_{th,2} \phi_{th}$$

$$\Leftrightarrow R_{th,s} = R_{th,1} + R_{th,2}$$

- Association en parallèle (à droite) :

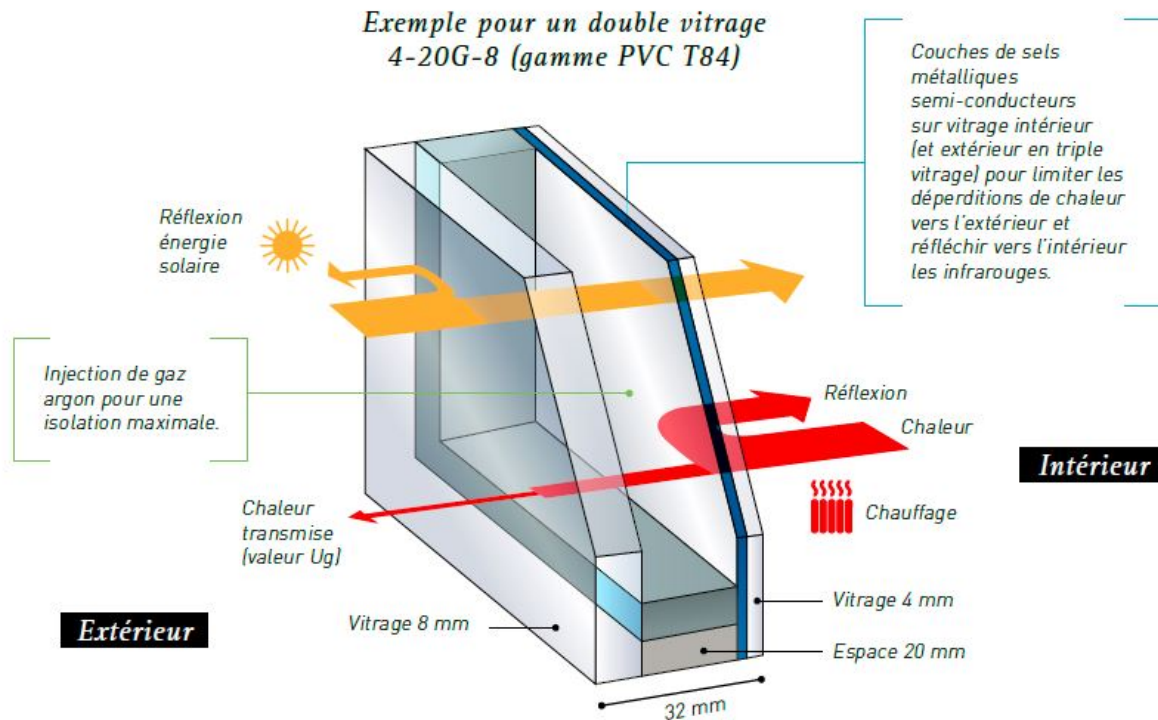
$$\phi_{th,t} = \phi_{th,1} + \phi_{th,2} \Leftrightarrow \frac{T_1 - T_2}{R_{th,p}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th,1}} + \frac{T_1 - T_2}{R_{th,2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R_{th,p}} = \frac{1}{R_{th,1}} + \frac{1}{R_{th,2}}$$

c) Analogie avec l'électrocinétique

Grandeur	Conduction thermique	Conduction électrique
Grandeur transportée	Energie U	Charge q
Loi d'Ohm	$T_1 - T_2 = R_{th} \phi_{th,1 \rightarrow 2}$	$V_1 - V_2 = R I_{1 \rightarrow 2}$
Résistance	$R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$	$R = \frac{L}{\gamma S} = \frac{\rho L}{S}$ (On reverra en électrostatique)
Flux	$\phi_{th} = \iint_{M \in S} \frac{\vec{j}_{th}(M, t)}{Wm^{-2}} \cdot \vec{dS}_M$	$I = \iint_{M \in S} \frac{\vec{j}_{elec}(M, t)}{Am^{-2}} \cdot \vec{dS}_M$ (On reverra en magnétostatique)
Equation de continuité du flux	$div \vec{j}_{th}(M, t) = 0$	$div \vec{j}_{elec}(M, t) = 0$ (On reverra en électrostatique)
Loi de Fourier	$\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{grad} T$	$\vec{j}_{elec} = -\gamma \vec{grad} V$ (On reverra en électrostatique)
Association en série	$R_{th,s} = R_{th,1} + R_{th,2}$	$R_s = R_1 + R_2$
Association en parallèle	$\frac{1}{R_{th,p}} = \frac{1}{R_{th,1}} + \frac{1}{R_{th,2}}$	$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

d) Double vitrage

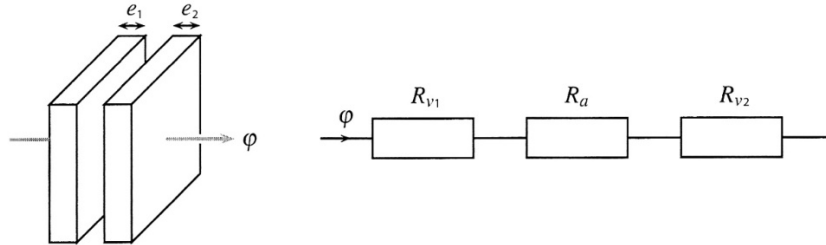


Comparons la résistance thermique d'une vitre simple de $1m^2$, de largeur 32mm, avec ce double vitrage sachant que :

$$\begin{cases} \lambda_{argon} = 0,018 W m^{-1} K^{-1} \\ \lambda_{verre} = 1 W m^{-1} K^{-1} \end{cases}$$

- Pour un simple vitrage : $R_{th} = \frac{L}{\lambda_{verre} S} = \frac{0,032}{1 * 1} = 0,032 KW^{-1}$

- Pour un double vitrage on a le schéma équivalent :

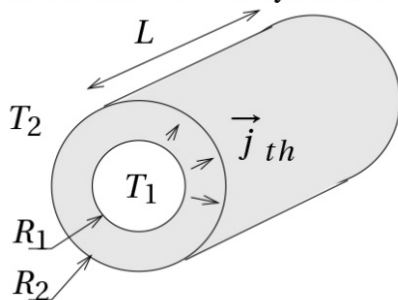


$$\Rightarrow R_{th,2} = R_{v1} + R_{v2} + R_a = \frac{e_1 + e_2}{\lambda_v S} + \frac{e_{Argon}}{\lambda_{argon} S}$$

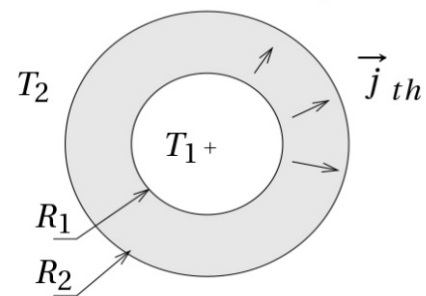
$$\Rightarrow R_{th,2} = \frac{0,012}{1 * 1} + \frac{0,020}{0,018 * 1} = 1,12 KW^{-1} \gg R_{th,1}$$

On vérifie que le double vitrage est plus efficace que le simple vitrage en isolation thermique...de plus le poids de la vitre est moindre.

e) Autres expressions de R_{th}
Résistance entre deux cylindres coaxiaux



Résistance entre deux sphères



Intéressons-nous pour commencer au cas de la résistance thermique cylindrique.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{j}_{th} = 0 &\Rightarrow \oiint_S \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS} = 0 \Rightarrow \phi_{th} = cste = \phi_0 \\ &\Rightarrow j_{th}(r) 2\pi r L = \phi_0 \\ \text{Or : } -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 2\pi r L &= \phi_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} dT &= -\frac{\phi_0}{2\pi\lambda L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \\ \Rightarrow T_2 - T_1 &= -\frac{\phi_0}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \end{aligned}$$

On peut réécrire ce résultat sous la forme :

$$T_1 - T_2 = R_{th} \phi_{th,1 \rightarrow 2} \text{ où } R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

En sphériques, la démonstration est similaire :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{j}_{th} = 0 &\Rightarrow \oiint_S \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS} = 0 \Rightarrow \phi_{th} = \text{cste} = \phi_0 \\ &\Rightarrow j_{th}(r) 4\pi r^2 = \phi_0 \\ \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} dT &= -\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \\ \Rightarrow T_2 - T_1 &= -\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \end{aligned}$$

On peut réécrire ce résultat sous la forme :

$$T_1 - T_2 = R_{th} \phi_{th,1 \rightarrow 2} \text{ où } R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

VI – Equation de la diffusion thermique

VI-1) Formulation

On a vu :

$$\left\{ \begin{aligned} \rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} &= \underbrace{P_v(x,t)}_{=0 \text{ si pas de création}} \\ \vec{j}_{th} &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x \\ \Rightarrow \rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \end{aligned} \right.$$

Equation de la diffusion unidimensionnelle en absence de sources :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \underbrace{D_{th}}_{\substack{\text{Diffusivité} \\ \text{thermique} \\ \text{en } m^2s^{-1}}} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \text{ où } D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$$

- En cylindriques :

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r j_{th}(r, t))}{\partial r} = P_v(r, t) \\ \vec{J}_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} - \frac{\lambda}{r} \frac{\partial \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial r} = P_v(r, t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial r} = 0 \text{ si } P_v(r, t) = 0$$

De même en sphériques :

$$\Rightarrow \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial r} = 0 \text{ si } P_v(r, t) = 0$$

Or :

Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

Grâce au formulaire, on remarque que le second terme est le laplacien scalaire à une dimension.

L'équation de la diffusion de particules en absence de termes de création :

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = D_{th} \Delta T(M, t) \text{ où } D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$$

Et en présence de termes de création :

$$\underbrace{\frac{\partial T(M, t)}{\partial t}}_{Ks^{-1}} = \underbrace{D_{th}}_{m^2s^{-1}} \underbrace{\Delta T(M, t)}_{Km^{-2}} + \frac{P_v(M, t)}{\rho c}$$

VI-2) Analyse en ordre de grandeur

Les variations d'un champ de température $T(M, t)$, supposé ni uniforme ni stationnaire, sont caractérisés par une longueur caractéristique L et un temps caractéristique τ .

Grandeur	$T(x, t)$	$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t}$	$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$
Ordre de grandeur	T^*	$\frac{T^*}{\tau}$	$\frac{T^*}{L^2}$

Par une analyse en ordre de grandeur l'équation de diffusion s'écrit :

$$\frac{T^*}{\tau} \sim D_{th} \frac{T^*}{L^2}$$

$$L \sim \sqrt{D_{th} \tau} \text{ ou } \tau \sim \frac{L^2}{D_{th}}$$

L'extension spatiale de la « tâche » de diffusion varie comme la racine carrée du temps caractéristique de diffusion.

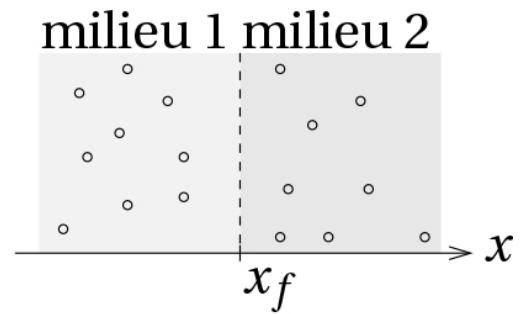
Ex : Pour un couteau en acier tel que $D_{th} = 2.10^{-5} m^2 s^{-1}$ dont la lame mesure 10 cm on obtient :

$$\tau = 500s = 8min$$

VI-3) Conditions aux limites

a) Continuité du flux thermique

Lorsqu'un transfert thermique s'observe entre deux milieux différents 1 et 2, l'interface qui les sépare est une surface mathématique. D'épaisseur nulle, elle ne peut donc pas stocker d'énergie. Toute la puissance thermique qui quitte le milieu 1 se retrouve dans le milieu 2. D'où la continuité du flux thermique à l'interface entre 2 milieux :



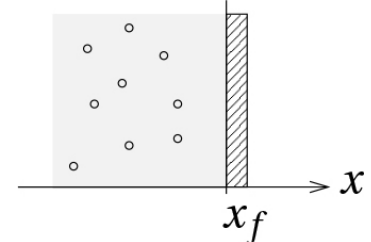
A l'interface entre deux matériaux on a continuité du flux thermiques :

$$\phi_{th}(x_f^+) = \phi_{th}(x_f^-)$$

b) Paroi calorifugée

Dans ce cas particulier :

$$\begin{cases} \phi_{th}(x_f^+) = \phi_{th}(x_f^-) = 0 \\ j_{th}(x_f^+) = j_{th}(x_f^-) = 0 \end{cases}$$



c) Contact thermique parfait entre deux solides

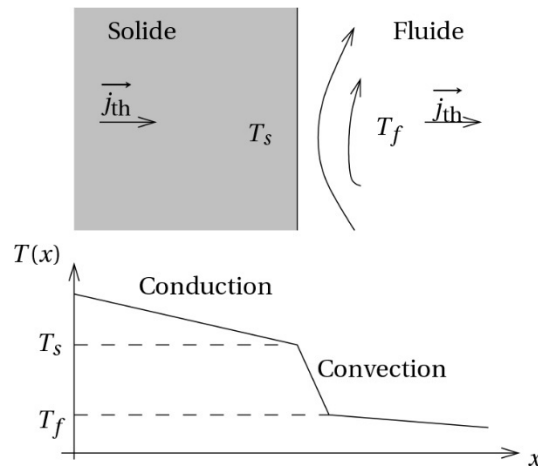
Le contact thermique parfait se retrouve dans le cas où on a affaire :

- A un thermostat
- Entre deux solides, qui présentent un contact thermique parfait.

Dans ce cas :

$$\begin{cases} \phi_{th}(x_f^+) = \phi_{th}(x_f^-) \\ j_{th}(x_f^+) = j_{th}(x_f^-) \\ T(x_f^+) = T(x_f^-) \end{cases}$$

d) Contact solide-fluide



Le transfert thermique entre une paroi solide de température T_s et un fluide de température T_f qui s'écoule le long de la paroi est modélisé le plus simplement par la loi de Newton.

Loi de Newton ou flux conducto-convectif :

$$\phi_{solide \rightarrow fluide} = \underbrace{h}_{Wm^{-2}K^{-1}} S(T_s - T_f)$$

$$\text{ou } j_{th\,solide \rightarrow fluide} = \underbrace{h}_{Wm^{-2}K^{-1}} (T_s - T_f)$$

où h est une constante appelé coefficient de transfert qui dépend :

- De la nature du fluide et de sa vitesse mais pas des températures
- Du solide et de son état de surface

Cette loi est une loi phénoménologique : elle traduit simplement les observations expérimentales mais n'est pas démontrée.