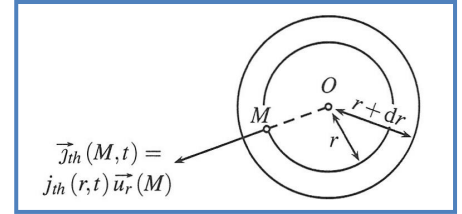


TH3 – Diffusion thermique

A – Travaux dirigés

TH31 – Taille des mammifères marins

Les mammifères sont des animaux à sang chaud dont la température reste constante. Pour maintenir leur température constante, leurs cellules sont le siège de réactions chimiques exothermiques qui dégagent une puissance volumique a . La puissance totale cédée par le mammifère au niveau de sa surface sera notée P .



Les mammifères sont décrits comme des sphères de rayon R , plongés dans de l'eau de conductivité thermique λ et de température à l'infini T_∞ (c'est-à-dire loin des animaux).

1. Equation de diffusion en coordonnées sphériques
- a) Démontrer que l'énergie thermique échangée par le système Σ compris entre deux sphères de rayon r et $r+dr$ peut se mettre sous la forme :

$$\delta Q_e = -4\pi \frac{\partial(r^2 j_{th})}{\partial r} dr dt$$

- b) En tenant compte de la loi Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r$, démontrer que l'équation de diffusion dans l'eau peut s'écrire :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

2. Calculer la température $T(r)$ de l'eau autour d'un mammifère, en fonction de P, λ, r et T_∞ . En déduire la température T_c de l'eau au contact de l'animal.
3. Établir l'expression de la puissance thermique perdue par le mammifère en $r = R$, en fonction de T_c, λ, R et T_∞ . En déduire que $R > R_{min}$ pour l'existence du mammifère marin, où l'on exprimera R_{min} en fonction de λ, T_c, a et T_∞ . Faites l'application numérique. Conclure sur l'existence des petits mammifères marins, sachant que le plus petit est le marsouin du pacifique qui mesure à peu près 1m de long. (Celui-ci est en voie d'extinction à cause des filets de pêche...)

Données : $\lambda = 0,6 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}, T_\infty = 300 \text{ K}, T_c = 310 \text{ K}, a = 100 \text{ W m}^{-3}$

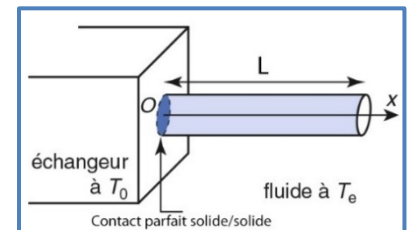
Rép : 1. a) $\phi = j_{th} \times 4\pi r^2 \dots$ b) $dU = \delta Q \dots$ 2. $T_c = \frac{P}{4\pi \lambda R} + T_\infty$ 3. $R \geq \sqrt{\frac{3\lambda(T_c - T_\infty)}{a}} = 42 \text{ cm}$, d'où un diamètre de 84cm, ce qui est proche des 1m annoncé.

TH32 – Ailette de refroidissement

On considère une barre de cuivre cylindrique de rayon $a = 5 \text{ mm}$, de longueur L . En $x = 0$, la barre de cuivre est en contact avec un milieu à la température $T_0 = 330 \text{ K}$. Tout le reste de la tige est en contact avec l'air ambiant de température uniforme $T_e = 300 \text{ K}$. On appelle :

- $\lambda = 400 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ la conductivité thermique du cuivre
- $h = 12 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ le coefficient de transfert conductoconvectif entre la barre de cuivre et l'air tel que le transfert thermique conductoconvectif puisse se mettre sous la forme : $\delta Q = hS(T_s - T_f)dt$

avec T_s la température du solide et T_f la température du fluide.



1. On considère que la longueur de la tige est quasi-infinie.
- On se place en régime permanent démontrer que l'équation de diffusion s'écrit :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_e}{\delta^2} \text{ où } \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$$

- Déterminer numériquement le profil de température $T(x)$ en tout point de la barre de cuivre.
- 2. On remplace la tige précédente par une tige de longueur $L = 20 \text{ cm}$. Déterminer numériquement $T(x)$. Calculer $T(L)$.

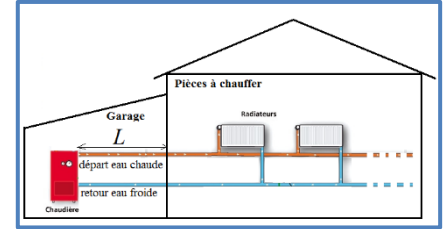
Rép : 1. Par un bilan d'énergie : $\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda a} T = -\frac{2h}{\lambda a} T_e \Rightarrow T(x) = T_e + (T_0 - T_e)e^{-\frac{x}{\delta}} = 300 + 30e^{-\frac{x}{0,289}}$

2. On utilise la continuité du flux

thermique en L et on obtient par résolution numérique : $T(x) = 300 + 24,08 e^{-\frac{x}{0,289}} + 5,92 e^{\frac{x}{0,289}}$

TH33 – Déperditions dans un circuit de chauffage central

On étudie le cas d'une maison équipée d'une chaudière située dans un garage (température ambiante $T_a = 10^\circ\text{C}$). L'eau sort de la chaudière à la température $T_0 = 70^\circ\text{C}$ et s'écoule avec un débit constant $D_m = 30 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$ dans une conduite en cuivre de longueur $L = 5,0 \text{ m}$ et de rayon $R = 20 \text{ mm}$, avant de pénétrer dans les pièces à chauffer. On fournit la loi de Newton pour le transfert conductoconvectif à l'interface entre un solide et un fluide : $\phi_{\text{solide} \rightarrow \text{fluide}} = hS(T_{\text{solide}} - T_{\text{fluide}})$. On suppose que la température de l'eau ne dépend que de la position x le long de la conduite, et que la température du cuivre est identique à celle de l'eau.



- Établir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ sous la forme suivante :

$$\frac{dT}{dx} + \frac{T(x)}{l} = A$$

- Résoudre cette équation et estimer la distance caractéristique l de l'évolution de $T(x)$.
- Établir une expression exacte puis approchée de la puissance perdue le long de la conduite. Effectuer l'application numérique et commenter le résultat.
- D'après l'expression approchée obtenue dans la question précédente, quelle est l'influence d'une augmentation du débit massique sur la puissance perdue ? Proposer une démarche permettant de déterminer plus finement cette influence.
- On souhaite réduire les pertes en installant un manchon isolant d'épaisseur $e = 8 \text{ cm}$ sur toute la longueur de la conduite. Le fournisseur indique que l'isolation ainsi réalisée présente une résistance thermique de $10 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ pour un mètre de conduite. Peut-on négliger la conducto-convection dans cette situation ? Estimer l'économie journalière réalisée grâce à cette isolation.

Données :

- $c_{\text{eau}} = 4,2 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, prix du kWh de fioul ou gaz naturel : **0,10 €**

Rép : 1. $l = \frac{D_m c_{\text{eau}}}{2\pi R h} = 100 \text{ m}$ 2. $P_{\text{pertes}} = 360 \text{ W}$ non négligeable 3. ... 4. $P_{\text{pertes}} = 30 \text{ W}$ (divisée par 10)

B – Exercices supplémentaires

TH34 – Effet « cave »

L'atmosphère occupe le demi-espace $x < 0$ et le sol le demi-espace $x > 0$. La température au niveau du sol est :

$$T(0) = T_0 + a \cos(\omega t).$$

On utilisera la notation complexe : $\underline{T}(0) = T_0 + a e^{j\omega t}$

Pour le sol, on note :

- $\mu = 3,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ la masse volumique
- $c = 515 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ la capacité thermique massique
- $\lambda = 1,2 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ la conductivité thermique

Et on pose : $\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu c \omega}}$

- Démontrer l'équation de la diffusion thermique en coordonnées cartésiennes. On cherche une solution de la forme : $\underline{T}(x, t) = T_0 + \underline{f}(x) e^{j\omega t}$. En déduire que $\underline{f}(x)$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} - \frac{2j}{\delta^2} \underline{f} = 0$$

En déduire que $\underline{f}(x)$ peut s'écrire :

$$\underline{f} = \underline{A} e^{-\frac{1+j}{\delta} x} + \underline{B} e^{\frac{1+j}{\delta} x}$$

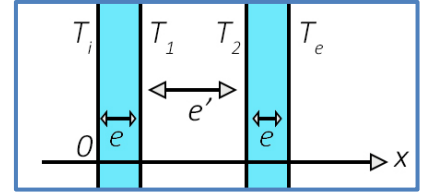
Donner alors $T(x, t)$ en fonction de T_0, a, δ et ω .

- Calculer les variations de température à une profondeur de 50 cm pour une amplitude de variation journalière de la température $T(0)$ de 15°C autour d'une température moyenne de 3°C en hiver. Commenter l'expression « Effet de cave ».

Rép : 1. $\underline{T}(x, t) = T_0 + a e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})}$ 2. $T(x, t) = 3 + 0,49 \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$

TH35 – Double vitrage

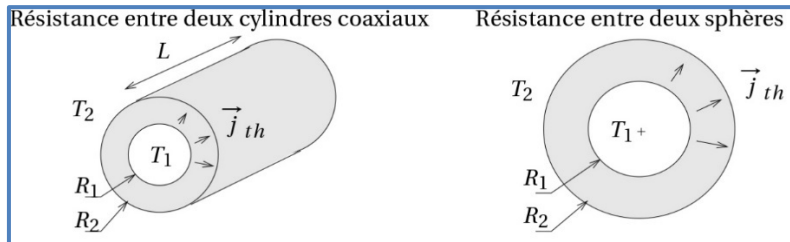
On ne considère que des régimes permanents, indépendants du temps. L'intérieur d'une pièce est séparé de l'extérieur par une paroi vitrée de surface S , orthogonale à l'axe (Ox) , et dont le verre a une conductivité thermique λ . Ses faces interne et externe sont respectivement aux températures $T_i = T(0)$ et T_e avec $T_e < T_i$.



- La paroi est une vitre simple d'épaisseur e . Évaluer le flux thermique ϕ_1 sortant de la pièce à travers cette paroi en fonction de λ, S, e, T_i et T_e . Calculer la résistance thermique R_{th} de la paroi vitrée.
- La paroi est un ensemble de deux vitres de même épaisseur e , séparées par une épaisseur e' d'air, de conductivité thermique λ' . On ne tient compte que de la conduction.
 - Évaluer le flux thermique ϕ_2 sortant de la pièce, puis $\frac{\phi_2}{\phi_1}$.
 - A.N. : $T_e = 270K$; $T_i = 292K$; $e' = e = 3mm$; $\lambda = 1,2 Wm^{-1}K^{-1}$; $\lambda' = 0,025 Wm^{-1}K^{-1}$.
 - Calculer $\frac{\phi_2}{\phi_1}$ et les températures T_1 et T_2 des faces en regard des deux vitres.
 - Représenter graphiquement les variations de la température en fonction de x dans le double vitrage.
- En plus de la conduction étudiée ci-dessus, on doit tenir compte des échanges thermiques superficiels entre le verre et l'air. Une surface de verre d'aire S , à la température T_s , échange avec l'air, à la température T_f , le flux thermique : $\phi = hS(T_s - T_f)$ avec $h > 0$
 - Quelle valeur implicite donnait-on précédemment à h lorsqu'on confondait T_s et T_f ?
 - Montrer que ces échanges superficiels introduisent une résistance thermique R_{th} . Donner l'expression de R_{th} .
 - Dans cette question, on notera les températures de l'air à l'intérieur et à l'extérieur de la pièce T'_i et T'_e et celle du verre, au contact de l'air extérieur T_i et T_e . Soit h_e le coefficient d'échange entre le verre et l'air extérieur et h_i celui relatif aux autres contacts verre-air. Les flux ϕ_1 et ϕ_2 des questions 1) et 2) deviennent respectivement ϕ'_1 et ϕ'_2 . Exprimer ϕ'_1 et ϕ'_2 en fonction de T'_i, T'_e, h_i, h_e et des paramètres e, λ, λ' et S .
 - A.N. : $h_i = 10 W.m^{-2}.K^{-1}$ et $h_e = 14 W.m^{-2}.K^{-1}$. Calculer $\frac{\phi'_2}{\phi'_1}$. Conclusion ?

Rép : 1. $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ 2. a) $\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{1}{2 + \frac{e'}{\lambda}} \sim 0,02$ b) $T_1 = 291,6K$ et $T_2 = 270,4K$ 3. a) $h \rightarrow \infty$ b) $R_{th} = \frac{1}{hS}$ c) $\frac{\phi'_2}{\phi'_1} = \frac{\frac{1}{h_i} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_e}}{\frac{3}{h_i} + \frac{2e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda} + \frac{1}{h_e}} \sim 0,35$

TH36 – Résistances thermiques en coordonnées sphériques et cylindriques



On considère un matériau conducteur compris entre deux sphères (ou cylindres) de centre O , de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), de conductivité thermique λ . Les parois sphériques de ce matériau sont maintenues constantes à la température T_1 pour $r = R_1$ et à la température T_2 pour $r = R_2$. On se place en régime stationnaire.

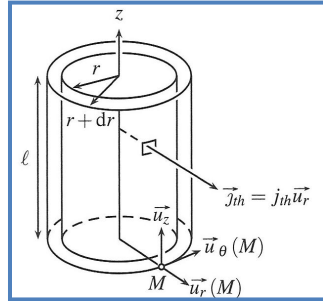
- Montrer que l'on a conservation du flux thermique et on notera celle-ci :

$$\phi(r) = \phi_0$$
- En déduire la résistance thermique de ce matériau en fonction de λ, R_1 et R_2 dans le cas de la sphère. Étudier le cas particulier où $R_2 = R_1 + e$ où $e \ll R_1$.
- En déduire la résistance thermique de ce matériau en fonction de λ, R_1 et R_2 dans le cas du cylindre. Étudier le cas particulier où R_1 et R_2 sont très proches.

Rép : 1. $\delta Q = 0 \dots$ 2. $R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sim \frac{e}{\lambda S}$ si $R_2 \sim R_1$ 3. $R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda l} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \sim \frac{e}{\lambda S}$ si $R_2 \sim R_1$

TH37 – Fil parcouru par un courant électrique

Un fil électrique de rayon R , de longueur infinie, de conductivité thermique λ , de conductivité électrique γ , de capacité thermique massique c , de masse volumique ρ , est parcouru par un courant électrique constant et uniforme d'intensité I . On note $\vec{J}_{elec}$ le vecteur densité de courant électrique. L'intensité I du courant est le flux de $\vec{J}_{elec}$. On montre dans le cours d'électromagnétisme que la puissance P délivrée par le champ électrique $\vec{E}$ par unité de volume est : $P = \gamma E^2$.



- On va effectuer un bilan d'énergie thermique en coordonnées cylindriques en présence d'une source caractérisée par la puissance électrique volumique P . Démontrer que l'énergie thermique échangée par le système Σ compris entre deux cylindres de rayon r et $r+dr$ peut se mettre sous la forme :

$$\delta Q_e = -2\pi l \frac{\partial(r j_{th})}{\partial r} dr dt$$

En tenant compte de l'énergie thermique créée, et de la loi Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r$, démontrer que l'équation de diffusion peut s'écrire :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + P$$

- Intégrer cette équation dans le cas où la température en surface du fil vaut la température extérieure T_0 en régime stationnaire. Tracer $T(r)$
- L'intégrer dans le cas où le flux thermique latéral à l'interface entre le fil et l'air extérieur est modélisé par la loi de Newton : $\varphi = hS(T(R) - T_0)$. Tracer $T(r)$.

Rép : 1. On fera bien attention au fait que S dépend de r 2. $T(r) = \frac{P}{4\lambda}(R^2 - r^2) + T_0$ 3. $T(r) = \frac{P}{4\lambda}(R^2 - r^2) + T_0 + \frac{PR}{2h}$

TH38 – Chauffage d'une pièce

On souhaite maintenir constante la température d'une pièce à $T_i = 20^\circ \text{C}$. La résistance thermique des 4 murs et du sol est $R_{th,1} = 10 \cdot 10^{-3} \text{KW}^{-1}$. La résistance thermique du plafond et des tuiles est $R_{th,2} = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{KW}^{-1}$. La température de l'extérieur est $T_e = 10^\circ \text{C}$. On se place en régime stationnaire.

- Calculer la puissance thermique P à apporter à la pièce pour maintenir constante la température.
- On améliore l'isolation thermique en rajoutant une plaque de matériau isolant entre le plafond et les tuiles. Calculer la résistance thermique $R'_{th,2}$ de ce matériau afin de réaliser une économie de 50% sur la puissance thermique P .

Rép : 1°) $P = 6 \text{ kW}$ 2°) $R'_{th,2} = 3,0 \cdot 10^{-3} \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$

TH39 – Thermorégulation type « Manchots »

Un manchot se modélise par un parallélépipède rectangle de section carrée de côté $a = 10 \text{ cm}$ et de hauteur $h = 50 \text{ cm}$. Le manchot maintient sa température interne $T_i = 37^\circ \text{C}$ au moyen d'un apport métabolique $P_1 = 50 \text{ W}$ qui compense les pertes par conduction thermique au travers de son revêtement de plumes d'épaisseur $e = 1,0 \text{ cm}$ et de conductivité thermique.

- Déterminer la valeur de la conductivité thermique λ du revêtement de plume sachant que la température extérieure (y compris au niveau du sol) est $T_e = -20^\circ \text{C}$.
- Pour faire face à des températures extrêmes, neuf manchots se serrent les uns contre les autres, formant un carré de 3×3 manchots. Le pavage est parfait, seules les faces supérieures, inférieures et latérales périphériques sont sujettes aux pertes thermiques. De combien le métabolisme P_9 nécessaire au maintien de la température interne, rapporté à un manchot, est-il réduit lorsque les neuf manchots se serrent les uns contre les autres ?

Rép : 1. $\lambda = 0,13 \text{ W m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 2. $P_9 = 0,39 P_1$