

TH3 – Diffusion thermique

A – Travaux dirigés

TH31 – Taille des mammifères marins

1. Σ reçoit un transfert thermique en r , à travers la sphère intérieure de surface $4\pi r^2$ et en perd en $r + dr$, à travers la sphère extérieure de surface $4\pi(r+dr)^2$:

$$\delta Q_e = (\phi(r, t) - \phi(r + dr, t))dt = -\frac{\partial \phi}{\partial r} dr dt = -\frac{\partial(4\pi r^2 j_{th})}{\partial r} dr dt$$

$$\Leftrightarrow \delta Q_e = (\phi(r, t) - \phi(r + dr, t))dt = -4\pi \frac{\partial(r^2 j_{th})}{\partial r} dr dt$$

- a) Le système Σ est immobile ($dE_c = 0$) et indéformable ($\delta W = 0$) ; on lui applique le premier principe entre les dates t et $t + dt$:

$$dU = \delta Q \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} dt \rho d\tau = \delta Q_e$$

$$\Leftrightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt 4\pi r^2 dr = -4\pi \frac{\partial(r^2 j_{th})}{\partial r} dr dt$$

$$\Leftrightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} r^2 = -\frac{\partial(r^2 j_{th})}{\partial r}$$

$$\Leftrightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 j_{th})}{\partial r}$$

- b) Par la loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r$ on obtient :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial r}$$

2. En régime permanent : $\frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial r} = 0$

$$\Rightarrow r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha = cste$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha / r^2$$

$$\Rightarrow T(r) = -\frac{\alpha}{r} + \beta$$

Or à l'infini : $T(r \rightarrow \infty) = T_\infty = \beta$

Reste à déterminer α .

Au contact du mammifère, il y a continuité du flux thermique d'où :

$$P = \phi(R^+) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} (r = R) \times 4\pi R^2 = -\lambda \frac{\alpha}{R^2} \times 4\pi R^2$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \alpha &= -\frac{P}{4\pi\lambda} \\ \Rightarrow T(r) &= \frac{P}{4\pi\lambda r} + T_\infty \\ \Rightarrow T_c = T(R) &= \frac{P}{4\pi\lambda R} + T_\infty\end{aligned}$$

3. La puissance cédée par le mammifère s'écrit donc :

$$P = 4\pi\lambda R(T_c - T_\infty)$$

Le mammifère peut produire une puissance de :

$$P_f = a \frac{4}{3} \pi R^3$$

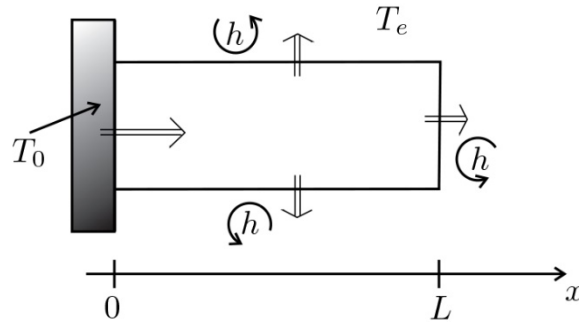
Afin que le mammifère puisse maintenir sa température il faut que :

$$\begin{aligned}P_f &\geq P \\ \Leftrightarrow a \frac{4}{3} \pi R^3 &\geq 4\pi\lambda R(T_c - T_\infty) \\ \Leftrightarrow R &\geq \sqrt{\frac{3\lambda(T_c - T_\infty)}{a}}\end{aligned}$$

Application numérique : $R_{min} = 42cm$ d'où un diamètre de 84cm, ce qui est proche des 1m annoncé.

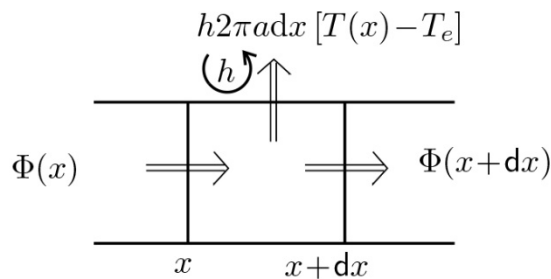
TH32 – Ailette de refroidissement

1.



Comme $a \ll L$ (le rayon du tube est très petit devant la longueur), on peut considérer que la température ne dépend que de x .

On fait un bilan thermique sur une tranche comprise entre x et $x + dx$:



$\Phi(x)$ est la puissance thermique qui rentre en x .

$\Phi(x + dx)$ est la puissance thermique qui sort en $x + dx$.

$h2\pi adx [T(x) - T_e]$ est la puissance thermique qui sort à travers la surface latérale $2\pi adx$

Si $T(x) > T_e$, le transfert thermique est positif et effectivement dirigé vers l'extérieur. C'est bien une puissance thermique effectivement perdue.

La transformation est isobare. Le premier principe de la thermodynamique sur une tranche s'écrit en régime stationnaire :

$$dH = 0 = \delta Q = \Phi(x)dt - \Phi(x + dx)dt - h2\pi adx [T(x) - T_e] dt$$

On a donc :

$$\Phi(x) - \Phi(x + dx) - h2\pi adx [T(x) - T_e] = 0$$

La loi de Fourier est : $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x$.

La puissance thermique $\Phi(x)$ qui traverse la surface πa^2 orientée suivant $\vec{u}_x$ est :

$$\Phi(x) = j_{th} \pi a^2 = -\lambda \frac{dT}{dx} \pi a^2$$

On en déduit que :

$$-\frac{d\Phi}{dx} dx - h 2\pi a dx [T(x) - T_e] = \lambda \pi a^2 \frac{d^2 T}{dx^2} dx - h 2\pi a dx [T(x) - T_e]$$

$$= 0$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda a} T = -\frac{2h}{\lambda a} T_e$$

On pose $\delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$. Soit :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_e}{\delta^2}$$

- Solution générale de l'équation homogène.

L'équation caractéristique est : $r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$, soit $r = \pm \frac{1}{\delta}$.

La solution générale est donc : $T_{SG} = A \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$.

- Solution particulière de l'équation différentielle avec second membre :

$$T_{SP} = T_e$$

La solution de l'équation différentielle est :

$$T(x) = T_e + A \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$$

Il faut deux conditions aux limites pour déterminer A et B :

- Le contact est parfait en $x = 0$, donc $T(0) = T_0 = T_e + A + B$.
- La température doit rester finie si $x \rightarrow \infty$. On a donc $A = 0$.

La constante d'intégration B est : $B = T_0 - T_e$. On obtient :

$$T(x) = T_e + (T_0 - T_e) \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$$

Numériquement, on a :

$$T(x) = 300 + 30 \exp\left(-\frac{x}{0,289}\right)$$

2. On a toujours :

$$T(x) = T_e + A \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$$

La distance caractéristique vaut $\delta = 28,9$ cm. La longueur de la tige vaut 20 cm. On ne peut plus considérer comme dans la question précédente que la longueur est très grande devant la distance caractéristique. On n'a donc plus les mêmes conditions aux limites.

Le contact est parfait en $x = 0$, donc $T(0) = T_0 = T_e + A + B$.

La deuxième condition aux limites est plus délicate à trouver. On a une discontinuité de la température à cause du flux conducto convectif en $x = L$.

Il faut raisonner sur la **continuité du flux thermique** en $x = L$.

La continuité du flux thermique en $x = L$ permet d'obtenir la deuxième équation :

$$j_{\text{th}}(L)\pi a^2 = h\pi a^2 [T(L) - T_e]$$

En utilisant la loi de Fourier, on a :

$$-\lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = h [T(L) - T_e]$$

Comme $\frac{dT}{dx} = \frac{A}{\delta} \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) - \frac{B}{\delta} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$, on a :

$$\frac{-\lambda A}{\delta} \exp\left(\frac{L}{\delta}\right) + \frac{\lambda B}{\delta} \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) = h \left(A \exp\left(\frac{L}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) \right)$$

On a un système à deux équations et deux inconnues :

$$\begin{cases} T_0 = T_e + A + B \\ \frac{-\lambda A}{\delta} \exp\left(\frac{L}{\delta}\right) + \frac{\lambda B}{\delta} \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) = h \left(A \exp\left(\frac{L}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) \right) \end{cases}$$

La résolution numérique donne : $A = 5,92$ et $B = 24,08$.

On a donc :

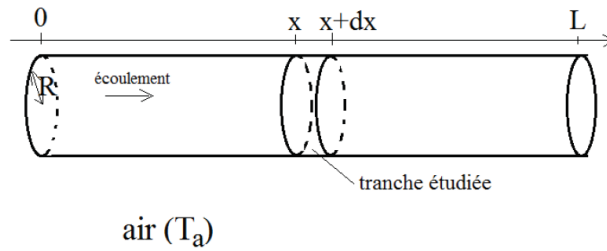
$$T(x) = 300 + 5,92 \exp\left(\frac{x}{0,289}\right) + 24,08 \exp\left(-\frac{x}{0,289}\right)$$

Pour $x = L$, la température est égale à 324 K.

TH33 – Déperditions dans un circuit de chauffage central

1.

L'eau est en écoulement stationnaire, on applique le premier principe « industriel » à une tranche élémentaire de conduite située entre x et $x + dx$.



Le premier principe s'écrit $dh = \delta q$ sous forme élémentaire (conduite horizontale de section constante, pas de pièces mobiles)

D'une part $dh = c_{\text{eau}}(T(x + dx) - T(x))$

D'autre part $\delta q = \frac{\delta \Phi}{D_m}$ où $\delta \Phi = -h(2\pi R dx)(T(x) - T_a)$ est le flux thermique conducto-convectif reçu par la tranche étudiée.

On en déduit $\frac{T(x + dx) - T(x)}{dx} + \frac{2\pi Rh}{D_m c_{\text{eau}}} T(x) = \frac{2\pi Rh}{D_m c_{\text{eau}}} T_a$

soit $\boxed{\frac{dT}{dx} + \frac{T(x)}{\ell} = \frac{T_a}{\ell} \text{ avec } \ell = \frac{D_m c_{\text{eau}}}{2\pi Rh}}$

La résolution de cette équation donne $T(x) = (T_0 - T_a)e^{-x/\ell} + T_a$

Numériquement $\ell \simeq \frac{30 \times 10^{-3} \times 4,2 \times 10^3}{2 \times 3 \times 20 \times 10^{-3} \times 10} = \boxed{1,0 \times 10^2 \text{ m}}$

2.

L'application du premier principe entre l'entrée et la sortie de la conduite, sous forme d'un bilan de puissance, donne $D_m c_{\text{eau}}(T(x = \ell) - T_0) = -P_{\text{pertes}}$ d'où $P_{\text{pertes}} = D_m c_{\text{eau}}(T_0 - [(T_0 - T_a)e^{-L/\ell} + T_a])$

On peut considérer $L \ll \ell$ donc au premier ordre $e^{-L/\ell} \simeq 1 - \frac{L}{\ell}$

On obtient alors $\boxed{P_{\text{pertes}} \simeq D_m c_{\text{eau}} \frac{L}{\ell} (T_0 - T_a)}$

Numériquement $P_{\text{pertes}} \simeq 30 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^3 \times \frac{5}{10^2} \times (70 - 10) = 3,6 \times 10^2 \text{ W}$

Cette puissance est du même ordre de grandeur que celle délivrée par un convecteur électrique (1000 W), elle n'est donc pas négligeable.

Autre méthode : on peut intégrer les pertes sur la longueur de la conduite,

$$P_{\text{pertes}} = \int_0^L h 2\pi R (T(x) - T_a) dx = h 2\pi R (T_0 - T_a) \left[-\ell e^{-x/\ell} \right]_0^L = D_m c_{\text{eau}} (T_0 - T_a) (1 - e^{-L/\ell})$$

Au premier ordre on retrouve $P_{\text{pertes}} \simeq D_m c_{\text{eau}} \frac{L}{\ell} (T_0 - T_a)$.

3.

Attention, ℓ dépend du débit massique ! En remplaçant on obtient $P_{\text{pertes}} \simeq h(2\pi RL)(T_0 - T_a)$ (on obtiendrait le même résultat en appliquant la loi de Newton pour une température constante le long de la conduite)

Dans cette approximation, la puissance perdue ne dépend pas du débit massique de l'écoulement.

On peut pousser le calcul à l'ordre 2 : $e^{-L/\ell} \simeq 1 - \frac{L}{\ell} + \frac{L^2}{2\ell^2}$

On a alors $P_{\text{pertes}} \simeq D_m c_{\text{eau}} \left(\frac{L}{\ell} - \frac{L^2}{2\ell^2} \right) (T_0 - T_a) \simeq h(2\pi RL) \left(1 - \frac{L}{2\ell} \right) (T_0 - T_a)$

Lorsque D_m augmente ℓ augmente, donc P_{pertes} augmente.

4.

La résistance thermique de l'isolant sur une longueur de 5 m est équivalente à 5 portions de 1 m placées en parallèle, donc $R_{\text{th}} = \frac{10}{5} = 2 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ sur l'ensemble de la conduite.

Cette résistance thermique d'isolant est associée en série avec la résistance thermique $\frac{1}{2\pi(R+e)Lh}$ correspondant au transfert conducto-convectif (l'interface solide/air est désormais à une distance $R+e$ de l'axe de la conduite). Estimons cette résistance : $R_{\text{cc}} \simeq \frac{1}{2 \times 3 \times 0,1 \times 5 \times 10} \simeq \frac{1}{30} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$, négligeable devant R_{th} , on peut négliger la conducto-convection.

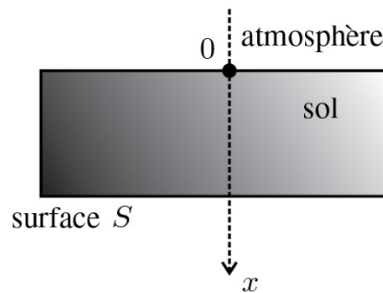
On a vu dans l'étude précédente que les pertes pouvaient être approchées par $P_{\text{pertes}} \simeq \frac{T_0 - T_a}{R_{\text{th}}} \simeq \frac{70 - 10}{2} \simeq 30 \text{ W}$, les pertes ont été divisées par un facteur 10.

En arrondissant à 300 W la puissance économisée, on obtient sur 24 heures une économie de 7,2 kWh soit environ 0,70 €. Sur une année de fonctionnement (environ 200 jours par an de chauffage), l'économie réalisée dépasse a priori nettement le coût de l'isolant.

B – Exercices supplémentaires

TH34 – Effet cave

1.



On applique le premier principe de la thermodynamique à un volume de section S , compris entre x et $x + dx$ pendant une durée dt :

$$\mu c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = \Phi(x) dt - \Phi(x + dx) dt = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dt$$

En utilisant la loi de Fourier, on a :

$$\Phi = j S = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S$$

On en déduit l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

En notation complexe, on a :

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + \underline{f}(x) \exp(j\omega t)$$

L'équation de la chaleur s'écrit alors : $\frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial x^2} = \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial \underline{T}}{\partial t}$

avec $\frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} \exp(j\omega t)$ et $\frac{\partial \underline{T}}{\partial t} = \underline{f}(x) j\omega \exp(j\omega t)$.

L'équation différentielle devient :

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} \exp(j\omega t) = \frac{\mu c}{\lambda} \underline{f}(x) j\omega \exp(j\omega t)$$

En simplifiant, on a :

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} - \frac{\mu c}{\lambda} j\omega \underline{f}(x) = 0$$

D'après l'énoncé, on pose $\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu c \omega}}$. On obtient finalement :

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} - \frac{2j}{\delta^2} \underline{f}(x) = 0$$

L'équation caractéristique est : $r^2 - \frac{2j}{\delta^2} = 0$, soit :

$$r^2 = \frac{2j}{\delta^2}$$

Il faut savoir que $j = \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right)$, donc $\sqrt{j} = \exp\left(j\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$.

On en déduit :

$$r = \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} \left(\frac{1+j}{\sqrt{2}} \right) = \pm \frac{1+j}{\delta}$$

On obtient alors :

$$\underline{f}(x) = \underline{A} \exp\left(\frac{-(1+j)x}{\delta}\right) + \underline{B} \exp\left(\frac{(1+j)x}{\delta}\right)$$

La température complexe est :

$$\underline{T} = T_0 + \left(\underline{A} \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \exp\left(\frac{-jx}{\delta}\right) + \underline{B} \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(\frac{jx}{\delta}\right) \right) \exp(j\omega t)$$

Il reste à déterminer les deux constantes d'intégration complexes avec les conditions aux limites :

- Le sol a une profondeur infinie. Comme la température doit rester finie, on a nécessairement $\underline{B} = 0$.
- Pour $z = 0$, on a : $\underline{T}(0) = T_0 + a \exp(j\omega t)$. D'où $\underline{A} = a$.

On obtient alors :

$$\underline{T} = T_0 + a \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \exp\left(j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$$

On revient aux grandeurs réelles. Soit :

$$T(x, t) = T_0 + a \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

2. Application numérique : $\delta = 14,6$ cm. Pour $x = 50$ cm, on a :

$$T(x, t) = 3 + 0,49 \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

On a donc des variations très faibles de la température à une profondeur de 50 cm. Le sol n'est plus gelé à cette profondeur. C'est l'effet de cave.

On retrouve une profondeur caractéristique comme dans l'exercice sur l'effet de peau. Au delà de quelques δ , les variations de température sont négligeables.

TH35 – Double vitrage

1. En régime permanent :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T(x) = Ax + B \text{ avec } \begin{cases} T(0) = T_i \\ T(e) = T_e \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(x) = \frac{T_e - T_i}{e}x + T_i$$

$$\text{D'où : } \phi_1 = j_{th}S = -\lambda \frac{dT}{dx}S = -\lambda \frac{T_e - T_i}{e}S = \frac{1}{R_{th}}(T_i - T_e) \Rightarrow R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$$

2.

- a) En régime permanent et dans la configuration proposée le flux ϕ_2 se conserve à travers la paroi d'où :

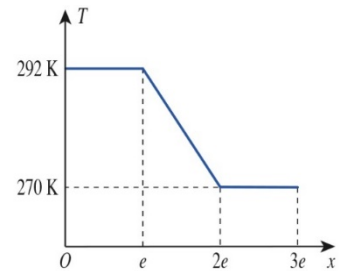
$$T_i - T_e = (T_i - T_1) + (T_1 - T_2) + (T_2 - T_e) = (R_{th,verre} + R_{th,air} + R_{th,verre})\phi_2$$

$$\Leftrightarrow \phi_2 = \frac{T_i - T_e}{2R_{th,verre} + R_{th,air}} = \frac{T_i - T_e}{2\frac{e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S}}$$

$$\text{Donc : } \frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{\frac{e}{\lambda S}}{2\frac{e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S}} = \frac{1}{2 + \frac{e'\lambda}{e\lambda'}} \sim 0,02$$

b) On en déduit :
$$\begin{cases} \frac{e}{\lambda S} = \frac{T_i - T_1}{\phi_2} = \frac{T_i - T_e}{\phi_1} \Rightarrow T_1 = T_i - \frac{\phi_2}{\phi_1}(T_i - T_e) = 291,6K \\ \frac{e}{\lambda S} = \frac{T_2 - T_e}{\phi_2} = \frac{T_i - T_e}{\phi_1} \Rightarrow T_2 = T_e + \frac{\phi_2}{\phi_1}(T_i - T_e) = 270,4K \end{cases}$$

On remarque que la température varie peu dans le verre dans le cas du double vitrage.



3.

- a) On néglige les échanges superficiels en prenant $h \rightarrow \infty$.

b) Soit : $\phi = hS(T_s - T_f) = \frac{1}{R_{th}}(T_s - T_f) \Rightarrow R_{th} = \frac{1}{hS}$

- c) La paroi est maintenant constituée :

- De trois résistances en série pour la vitre simple ;

$$(T'_i - T'_e) = \phi'_1(R_{th,i} + R_{th,verre} + R_{th,e}) = \frac{1}{S}\left(\frac{1}{h_i} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_e}\right)\phi'_1$$

- De sept résistances en série pour la double-vitre :

$$\begin{aligned} (T'_i - T'_e) &= \phi'_2(R_{th,i} + R_{th,verre} + R_{th,i} + R_{th,air} + R_{th,i} + R_{th,verre} + R_{th,e}) \\ &= \frac{1}{S}\left(\frac{3}{h_i} + \frac{2e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda'} + \frac{1}{h_e}\right)\phi'_2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\phi'_2}{\phi'_1} = \frac{\frac{1}{h_i} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_e}}{\frac{3}{h_i} + \frac{2e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda'} + \frac{1}{h_e}} \sim 0,35$$

Ce rapport est nettement plus élevé que celui trouvé à la question 2°) ; les échanges superficiels thermiques entre l'air et les vitres ne sont pas à négliger.

TH36 – Résistances thermiques en coordonnées sphériques et cylindriques

1. Un bilan d'énergie donne :

$$dU = \delta Q$$

$$\Leftrightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt d\tau = (\phi(r, t) - \phi(r + dr, t)) dt$$

En régime stationnaire :

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{\partial \phi}{\partial r} dr \Rightarrow \phi(r) = \phi_0$$

2. En coordonnées sphériques :

$$\phi = j_{th} \times 4\pi r^2$$

$$\phi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 4\pi r^2 = \phi_0$$

$$\Rightarrow dT = -\frac{\phi_0}{4\pi\lambda r^2} dr$$

$$\Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$\Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\Rightarrow R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Si $R_2 = R_1 + e$ alors $\frac{1}{R_2} \stackrel{DL}{\cong} \frac{1}{R_1} \left(1 - \frac{e}{R_1} \right) \Rightarrow R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{e}{R_1^2} \right)$

$$\Rightarrow R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$$

3. En coordonnées cylindriques :

$$\phi = j_{th} \times 2\pi r l \Leftrightarrow \phi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 2\pi r l = \phi_0$$

$$\Rightarrow dT = -\frac{\phi_0}{2\pi\lambda r l} dr$$

$$\Rightarrow T_2 - T_1 = -\frac{\phi_0}{2\pi\lambda l} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$\Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda l} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$\Rightarrow R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda l} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

Si $R_2 = R_1 + e$ alors $\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \stackrel{DL}{\cong} \frac{e}{R_1} \Rightarrow R_{th} = \frac{e}{2\pi R_1 \lambda l}$

$$\Rightarrow R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$$

TH37 – Fil parcouru par un courant électrique

1. Le système Σ est immobile et indéformable d'où le premier principe entre t et $t+dt$:

$$dU = \delta Q \text{ avec } dU = \frac{\partial u}{\partial t} dt \rho d\tau = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt d\tau$$

Σ reçoit un transfert thermique en r , à travers le cylindre intérieur de surface $2\pi r l$ et en perd en $r+dr$, à travers le cylindre extérieur de surface $2\pi(r+dr)l$ et reçoit éventuellement l'énergie $P dt$ à l'intérieur de son volume $d\tau$:

$$\delta Q_e = (\phi(r, t) - \phi(r + dr, t)) dt = -\frac{\partial \phi}{\partial r} dr dt = -\frac{\partial(2\pi r l j_{th})}{\partial r} dr dt$$

$$\delta Q_e = (\phi(r, t) - \phi(r + dr, t)) dt = -2\pi l \frac{\partial(r j_{th})}{\partial r} dr dt$$

En tenant compte de l'énergie thermique créée :

$$\delta Q = -2\pi l \frac{\partial(r j_{th})}{\partial r} dr dt + P dt 2\pi r dr l$$

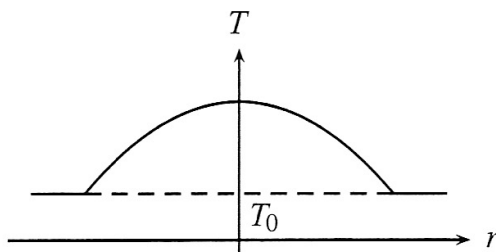
D'où :

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt 2\pi r dr l &= -2\pi l \frac{\partial(r j_{th})}{\partial r} dr dt + P dt 2\pi r dr l \\ \Leftrightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} r &= -\frac{\partial(r j_{th})}{\partial r} + P r \Leftrightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r j_{th})}{\partial r} + P \end{aligned}$$

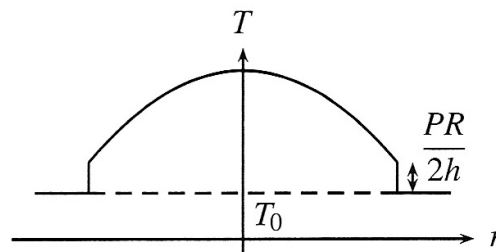
Or : $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r \Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial(r \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r} + P$

2. En régime indépendant du temps, $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{P}{\lambda} r$ donc $r \frac{dT}{dr} = -\frac{P}{2\lambda} r^2 + \alpha$, soit $\frac{dT}{dr} = -\frac{P}{2\lambda} r + \frac{\alpha}{r}$ et finalement $T(r) = -\frac{P}{4\lambda} r^2 + \alpha \ln r + \beta$.

$\alpha = 0$ car T ne diverge pas quand $r \rightarrow 0$. De plus, avec $T(R) = T_0$, $T(r) = \frac{P}{4\lambda} (R^2 - r^2) + T_0$.



Question 2



Question 3

3. On a toujours $T(r) = -\frac{P}{4\lambda} r^2 + \alpha \ln r + \beta$, avec $\alpha = 0$ car T ne diverge pas quand $r \rightarrow 0$, mais la condition aux limites en $r = R$ change. On y écrit la continuité du flux :

$$j_{th}(R) S dt = h(T(R) - T_0) S dt \Rightarrow \frac{PR}{2} = h \left(-\frac{P}{4\lambda} R^2 + \beta - T_0 \right),$$

donc :

$$\beta = \frac{P}{4\lambda} R^2 + T_0 + \frac{PR}{2h} \Rightarrow T(r) = \frac{P}{4\lambda} (R^2 - r^2) + T_0 + \frac{PR}{2h}.$$

TH38 – Chauffage d'une pièce

1. On suppose la transformation isobare. On applique le premier principe de la thermodynamique à la pièce pendant une durée dt . En régime stationnaire, on a :

$$dH = \delta W' + \delta Q$$

En régime stationnaire, $dH = H(t + dt) - H(t) = 0$.

$\delta W'$ est le travail reçu autre que celui des forces de pression. Ici $\delta W' = 0$.

En divisant par dt , on a :

$$0 = P_{\text{totale reçue}}$$

$P_{\text{totale reçue}}$ est la puissance thermique algébriquement reçue par la pièce.

Il y a trois puissances thermiques algébriquement reçues par la pièce :

$$P_{\text{totale reçue}} = P + P_1 + P_2$$

- P est la puissance thermique apportée par le chauffage (par exemple un radiateur électrique).
- $P_1 = \frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th}1}}$ est la puissance thermique reçue de l'extérieur à travers les 4 murs et le sol.
- $P_2 = \frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th}2}}$ est la puissance thermique reçue de l'extérieur à travers les tuiles et le plafond.

Dans l'écriture du premier principe, les puissances sont algébriquement reçues par le système. Il faut donc écrire $T_e - T_i$ et non $T_i - T_e$ car $\frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th}1}}$ est une puissance algébriquement orientée de l'extérieur vers l'intérieur.

Ici $T_e < T_i$, donc $P_1 < 0$. C'est donc en fait une puissance effectivement fournie à l'extérieur.

On en déduit que :

$$P = - \left(\frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th}1}} + \frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th}2}} \right)$$

D'où

$$P = 6000 \text{ W}$$

Remarque : Les deux résistances thermiques sont en parallèle. La résistance thermique est définie par :

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{th}}} = \frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{th}1}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{th}2}}$$

La puissance algébriquement reçue de l'extérieur est $\frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th}}}$. Le premier principe s'écrit alors :

$$0 = P + \frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th}}}$$

On retrouve le même résultat que précédemment.

2. On souhaite avoir la même température avec une puissance thermique $P' = 3000 \text{ W}$. On appelle $\mathfrak{R}'_{\text{th}2}$ la résistance thermique de la plaque de matériau isolant que l'on rajoute entre le plafond et les tuiles. En régime stationnaire, la résistance thermique du plafond, de la plaque de matériau et des tuiles est alors : $\mathfrak{R}_{\text{th}2} + \mathfrak{R}'_{\text{th}2}$.

Remarque : Les deux résistances sont bien en série car on se place en régime stationnaire sans terme de création. On a conservation du flux thermique (ou de la puissance thermique) à travers les différentes sections du plafond, du matériau isolant et des tuiles.

Le bilan thermique s'écrit alors :

$$P' = - \left(\frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th}1}} + \frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th}2} + \mathfrak{R}'_{\text{th}2}} \right)$$

On a alors :

$$P' = (T_i - T_e) \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{th}1}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{th}2} + \mathfrak{R}'_{\text{th}2}} \right)$$

D'où :

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{th}2} + \mathfrak{R}'_{\text{th}2}} = \frac{P'}{T_i - T_e} - \frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{th}1}} = \frac{P' \mathfrak{R}_{\text{th}1} - (T_i - T_e)}{(T_i - T_e) \mathfrak{R}_{\text{th}1}}$$

On obtient finalement :

$$\mathfrak{R}'_{\text{th}2} = \frac{(T_i - T_e) \mathfrak{R}_{\text{th}1}}{P' \mathfrak{R}_{\text{th}1} - (T_i - T_e)} - \mathfrak{R}_{\text{th}2}$$

Application numérique : $\mathfrak{R}'_{\text{th}2} = 3,0 \times 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$.

TH39 – Thermorégulation type « Manchots »

1. La conductance thermique du revêtement de plume d'un manchot est : $G_{\text{th}} = \frac{\lambda A}{e}$ où A est l'aire de la surface extérieure du manchot, à savoir : $A = 4a\ell + 2a^2$. En régime permanent, toute la puissance produite par le métabolisme de l'animal est évacuée vers l'extérieur, c'est-à-dire : $\mathcal{P}_1 = G_{\text{th}}(T_i - T_e)$. On en déduit : $\lambda = \frac{e \mathcal{P}_1}{A(T_i - T_e)}$. L'application numérique donne : $\lambda = 0,13 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

2. La surface extérieure pour les neuf manchots serrés les uns contre les autres est obtenue en remplaçant a par $3a$. Le rapport $\frac{\mathcal{P}}{A}$ est le même pour 1 seul manchot ou pour les 9 manchots, d'où : $\mathcal{P}_9 = \frac{12a\ell + 18a^2}{4a\ell + 2a^2} \mathcal{P}_1$. L'application numérique donne : $\mathcal{P}_9 = 3,5 \mathcal{P}_1$ pour les neuf manchots, soit pour un seul manchot une puissance à fournir égale à 39% de la puissance qu'il doit fournir s'il est isolé.