

TH1 - Systèmes ouverts en régime stationnaire

Le programme de thermodynamique de la classe de PC s'inscrit dans le prolongement de celui de la classe de PCSI : les principes de la thermodynamique peuvent être désormais écrits sous forme infinitésimale pour un système évoluant entre deux instants infiniment proches, d'une part dans le cadre de l'étude des machines thermiques avec écoulement en régime stationnaire et d'autre part dans le cadre de l'étude de la diffusion thermique. Les expressions des variations infinitésimales des fonctions d'état en fonction des variables d'état doivent être fournies pour les systèmes envisagés.

Ce thème contribue également à asseoir la maîtrise des opérateurs d'analyse vectorielle (gradient, divergence, laplacien) mais le formalisme doit rester au deuxième plan. Les mises en équations locales sont réalisées dans le cas de problèmes ne dépendant que d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques. On admet ensuite les formes générales des équations en utilisant les opérateurs d'analyse vectorielle, ce qui permet d'aborder des situations plus variées en fournissant les expressions de la divergence et du laplacien.

Au travers des illustrations et des exemples traités, le professeur est invité à sensibiliser les étudiants à certains enjeux sociétaux liés par exemple aux questions d'économies d'énergie et de réchauffement climatique ; ceci est aussi l'occasion d'insister sur la notion de modèle en physique et plus généralement en sciences.

La partie « **Systèmes ouverts en régime stationnaire** » complète la partie « **Machines thermique** » du programme de première année de la classe de PCSI en proposant notamment un bilan d'entropie. La maîtrise des démonstrations par les étudiants et l'application des résultats à des situations concrètes constituent des objectifs de formation.

Notions et contenus	Capacités exigibles	Remarques
Systèmes ouverts en régime stationnaire		
Premier et deuxième principes de la thermodynamique pour un système ouvert en régime stationnaire, dans le seul cas d'un écoulement unidimensionnel au niveau de la section d'entrée et de la section de sortie.	Établir les relations $\Delta h + \Delta e = w_u + q$ et $\Delta s = s_e + s_c$ et les utiliser pour étudier des machines thermiques réelles à l'aide de diagrammes thermodynamiques (T,s) et (P,h).	L'aspect différentiel est en général mieux vu en PCSI. À l'inverse, les diagrammes avec changement d'état sont nouveaux pour les PCSI.

I - Écriture des principes sous forme infinitésimale

I-1) Calcul infinitésimal

a) Notations d et δ

- Aspects mathématiques

Mathématiquement, si f est une fonction de la variable x , df représente la différentielle de la fonction f .

Si $f(x)$ est une fonction d'une variable, alors on note :

$$df = f'(x)dx = \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

où $f'(x)$ est la valeur la dérivée de f en x .

La notion de différentielle présente surtout un intérêt pour les fonctions de plusieurs variables.

Si $f(x,y)$ est une fonction de deux variables, alors on notera sa différentielle :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Une quantité de la forme $A dx + B dy$ est appelé forme différentielle.

Mais ce n'est pas forcément la différentielle d'une fonction : dans ce cas elle est qualifiée de forme différentielle non exacte, notée traditionnellement δg , en physique. Il n'existe alors pas de fonction g , écrire dg est une faute mathématique.

- Interprétation physique

À ces concepts mathématiques rigoureux, on peut associer des interprétations intuitives pour lequel df et δg sont considérées comme des quantités infinitésimales (ou élémentaires) :

- df représente une **variation** infinitésimale.
- δg représente une **quantité** infinitésimale.

Par exemple, si $f(x, y)$ est une fonction de deux variables, alors l'écriture $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ peut s'interpréter ainsi : à une variation infinitésimale (ou élémentaire) dx de la variable x et une variation infinitésimale dy de la variable y , correspondent une variation (infinitésimale) df de f .

Remarque :

La notion infinitésimale renvoie à la notion de passage à la limite. Pour des variations même petites mais finies, on préférera la notation Δ . Il n'y a plus égalité dans ce cas.

$$\Delta f \sim \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

b) Intégration des formes différentielles

On considère une fonction f différentiable et on note df sa différentielle, dans un espace de dimension $N \geq 1$. On considère une courbe continue Γ reliant deux points A et B , que l'on appellera, un chemin. L'intégrale de df sur Γ , vérifie :

$$\int_{\Gamma} df = \int_A^B df = f(B) - f(A)$$

Elle ne dépend pas du chemin suivi, uniquement des points de départ et d'arrivée. Elle représente la variation de f entre A et B .

Soit δg une forme différentielle. L'intégrale de δg sur Γ est notée :

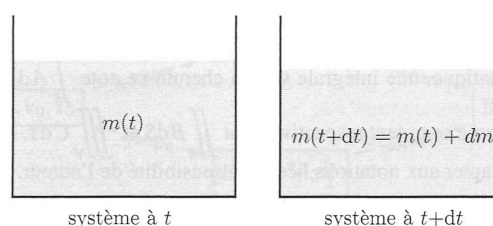
$$\int_{\Gamma} \delta g = g_{\Gamma} \neq \cancel{g(B) - g(A)} \text{ vu que } g \text{ n'existe pas}$$

Elle dépend en général du chemin suivi.

c) Masse : dm et δm

- Variation de masse dm

On considère la perte de masse d'un système au cours du temps. On note $m(t)$ la masse contenue dans le récipient à l'instant t .

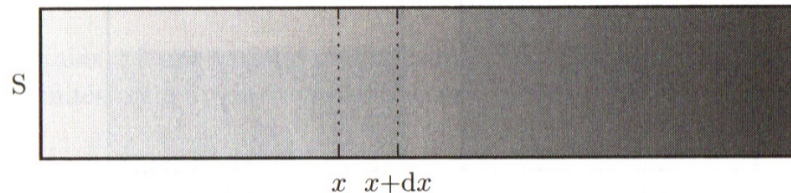


Pendant la durée infinitésimale dt , c'est à dire entre les instants t et $t+dt$, la masse dans le récipient a varié de $m(t)$ à $m(t+dt)$. La variation infinitésimale de masse entre ces deux instants est notée :

$$dm = m(t + dt) - m(t)$$

- Quantité de masse δm

On considère un système non uniforme délimité par un cylindre de section S , dont les propriétés (masse volumique $\mu(x)$, température $T(x)$, ...) varient suivant l'abscisse x . Pour étudier ce système, on le décompose en tranches infinitésimales.



La tranche comprise entre les abscisses x et $x+dx$ par exemple possède :

- Un volume élémentaire : $\delta V = S dx$
- Une masse infinitésimale : $\delta m = \mu(x) \delta V$.

δm et δV ne représentent pas des variations ici : les fonctions $V(x)$ et $m(x)$ ne sont pas définies, d'où la notation δ .

I-2) Premier principe

a) Rappel

En première année, l'énergie d'un système a été définie par :

$$E = U + E_c + E_{p,ext}$$

Le premier principe stipule alors qu'au cours d'une transformation entre deux états, la variation de son énergie est donnée par :

$$\Delta E = W + Q$$

où W et Q représentent respectivement le travail et le transfert thermique.

b) Premier Principe pour une transformation infinitésimale

Au cours d'une transformation infinitésimale, le premier principe s'écrit :

$$dE = dU + dE_c + dE_{p,ext} = \delta W + \delta Q$$

puisque U , E , $E_{p,ext}$ et E_c sont des fonctions d'état, tandis que W et Q n'en sont pas.

Cette formulation plus souple que la forme « non différentielle » permet d'aborder des transformations plus complexes. Elle sera utilisée dans les chapitres suivants.

I-3) Deuxième principe

a) Rappel

Également abordé en première année, le second principe stipule l'existence d'une fonction d'état extensive S appelée entropie, telle que sa variation entre deux états soit donnée par :

$$\Delta S = S_e + S_c$$

où :

- S_e représente l'entropie échangée. Pour un système n'échangeant qu'avec un thermostat à la température T_0 (transformation monotherme), $S_e = \frac{Q}{T_0}$
- S_c représente l'entropie créée. $S_c \geq 0$.

Le deuxième principe distingue les transformations réversibles, définies par $S_c = 0$, des transformations irréversibles, pour lesquelles $S_c > 0$. Ni S_e , ni S_c ne sont des fonctions d'état.

b) Second Principe pour une transformation infinitésimale

On en déduit :

$$dS = \delta S_e + \delta S_c \text{ avec } \delta S_e = \frac{\delta Q}{T_0} \text{ et } \delta S_c \geq 0.$$

$$\Rightarrow \Delta S = S_e + S_c \text{ où } S_e = \int \frac{\delta Q}{T_0}$$

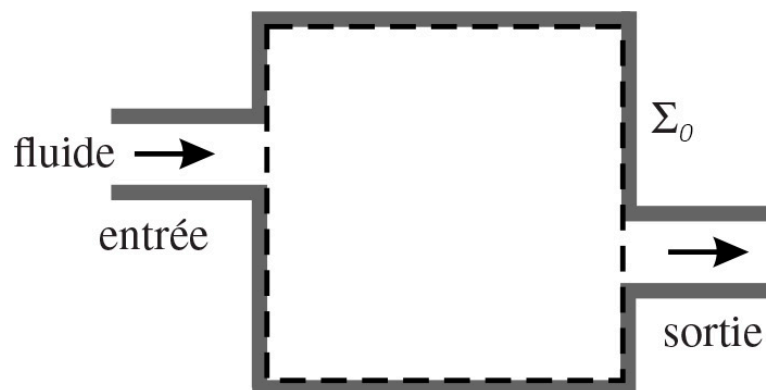
Attention au fait que T_0 n'est pas forcément une constante

Les principes de la thermodynamique ont été présentés en première année ; on en prolonge l'étude dans le cas d'un système ouvert, traversé par un fluide. Seul le cas du régime stationnaire est envisagé, ce chapitre vise à fournir les éléments permettant d'établir les bilans de masse, d'enthalpie et d'entropie.

II - Système ouvert

II-1) Définition

On dit qu'un système Σ_0 est ouvert s'il échange de la matière avec l'extérieur, par opposition avec un système fermé qui ne peut échanger que de l'énergie. Le système étudié ici est traversé par du fluide, qui pénètre par une section d'entrée et s'échappe par la section de sortie.



II-2) Débit massique

Les flux de matière entrant et sortant du système sont caractérisés par des débits massiques.

Il y a un débit massique d'entrée D_{me} et un débit massique de sortie D_{ms} tels que :

$$\delta m_e = D_{me} dt \text{ et } \delta m_s = D_{ms} dt$$

Les débits massiques s'expriment en $kg\ s^{-1}$

En régime stationnaire, la masse m contenue dans le système Σ_0 reste constante, donc la différence entre les débits d'entrée et de sortie est nulle d'où :

Pour un écoulement stationnaire :

- $M_{\Sigma_0}(t) = M_{\Sigma_0}(t + dt)$
- $\delta m_e = \delta m_s$
- $D_{me} = D_{ms}$

II-3) Bilan d'une grandeur extensive X

On désigne par X une grandeur extensive et additive quelconque. Dans les applications il s'agira par exemple de l'énergie interne U ou de l'entropie S . On note x la grandeur massique associée à X :

$$x = \frac{\delta X}{\delta m}, u = \frac{\delta U}{\delta m}, s = \frac{\delta S}{\delta m} \dots$$

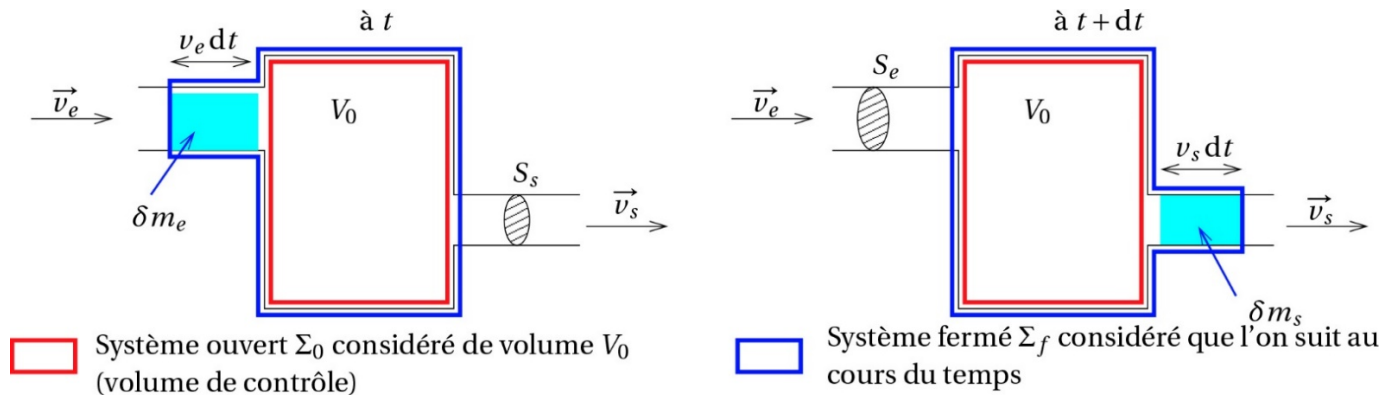
Avec :

$$\begin{cases} x_e \text{ la grandeur massique à l'entrée de } \Sigma_0 \\ x_s \text{ la grandeur massique à la sortie de } \Sigma_0 \end{cases}$$

Afin d'appliquer le premier principe en système fermée, on va devoir raisonner sur un système fermé qui est défini de la manière suivante :

On définit le système fermé suivant :

$$\begin{cases} \Sigma_f(t) = \Sigma_0(t) + \Sigma_e \\ \Sigma_f(t + dt) = \Sigma_0(t + dt) + \Sigma_s \end{cases}$$



Ainsi :

$$\begin{cases} M_{\Sigma_f}(t) = M_{\Sigma_0}(t) + \delta m_e \\ M_{\Sigma_f}(t + dt) = M_{\Sigma_0}(t + dt) + \delta m_s \end{cases}$$

Et pour une grandeur extensive X quelconque :

$$\begin{cases} X_{\Sigma_f}(t) = X_{\Sigma_0}(t) + \delta m_e x_e \\ X_{\Sigma_f}(t + dt) = X_{\Sigma_0}(t + dt) + \delta m_s x_s \end{cases}$$

D'où le bilan :

$$dX_{\Sigma_f} = dX_{\Sigma_0} + \delta m_s x_s - \delta m_e x_e$$

En régime stationnaire le bilan s'écrit :

$$dX_{\Sigma_f} = \delta m(x_s - x_e)$$

II-4) Premier principe pour un système ouvert

a) Bilan d'énergie

On applique le premier principe au système fermé Σ_f entre t et $t+dt$:

$$dU + dE_c + dE_{p,ext} = \delta W + \delta Q$$

Afin de simplifier le calcul, on note $\underline{U} = U + E_c + E_{p,ext}$

D'où :

$$\underbrace{d\underline{U}_{\Sigma_f}}_{\substack{\text{variation} \\ \text{d'énergie} \\ \text{dans } \Sigma_f}} = \underbrace{\delta W_u}_{\substack{\text{travail utile} \\ \text{ou travail "autre"}}} + \underbrace{\delta W_p}_{\substack{\text{travail des forces} \\ \text{de pression}}} + \underbrace{\delta Q}_{\substack{\text{Echange d'énergie} \\ \text{sous forme} \\ \text{de chaleur}}}$$

- Calcul de $d\underline{U}_{\Sigma_f}$:

On a en posant : $\underline{u} = u + \frac{1}{2}c^2 + gz$

$$d\underline{U}_{\Sigma_f} = d\underline{U}_{\Sigma_0} + \delta m_s \underline{u}_s - \delta m_e \underline{u}_e$$

- Présence de δW_u

Le système reçoit du travail utile s'il contient au moins une pièce mobile (hélice, turbine...) pendant le temps dt :

$$\delta W_u = P_u dt$$

- Présence de δQ

Le fluide à l'intérieur du système reçoit un transfert thermique δQ pendant dt d'où :

$$\delta Q = P_{th} dt$$

- Calcul de δW_p

On sait que $\delta W_p = -p_{ext} dV$ par conséquent vu que le système :

○ Echange un volume $+\delta V_s$ (gain)

○ Echange un volume $-\delta V_e$ (perte)

$$\Rightarrow \delta W_p = -p_s \delta V_s + p_e \delta V_e$$

$$\Rightarrow \delta W_p = -\frac{p_s}{\mu_s} \delta m_s + \frac{p_e}{\mu_e} \delta m_e$$

En notant : $v = \frac{1}{\mu}$ le volume massique on obtient :

$$\Rightarrow \delta W_p = -p_s v_s \delta m_s + p_e v_e \delta m_e$$

D'où le bilan :

$$d\underline{U}_{\Sigma_0} + \delta m_s \underline{u}_s - \delta m_e \underline{u}_e = \delta W_u + \delta Q + p_e v_e \delta m_e - p_s v_s \delta m_s$$

$$\Leftrightarrow d\underline{U}_{\Sigma_0} + \delta m_s (\underline{u}_s + p_s v_s) - \delta m_e (\underline{u}_e + p_e v_e) = \delta W_u + \delta Q$$

Or l'enthalpie est définie par : $H = U + pV \Rightarrow h = u + pv$

$$\Rightarrow d\underline{U}_{\Sigma_0} + \delta m_s \underline{h}_s - \delta m_e \underline{h}_e = \delta W_u + \delta Q$$

Ceci constitue le premier principe en système ouvert (écoulement non stationnaire) à une entrée et une sortie.

b) En régime stationnaire

A notre calcul précédent s'ajoute les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} d\underline{U}_{\Sigma_0} = 0 \\ \delta m_s = \delta m_e = \delta m \end{cases}$$

D'où :

$$\delta m(\underline{h}_s - \underline{h}_e) = \delta W_u + \delta Q$$

○ En termes d'énergie :

$$\Rightarrow \underline{h}_s - \underline{h}_e = w_u + q \quad \text{où } w_u = \frac{\delta W_u}{\delta m} \text{ et } q = \frac{\delta Q}{\delta m}$$

○ En termes de puissance :

$$D_m(\underline{h}_s - \underline{h}_e) = P_u + P_{th}$$

Le premier principe en système ouvert pour un écoulement stationnaire s'écrit dans le cas d'une entrée et d'une sortie :

$$\text{où } \begin{cases} \Delta \underline{h} = \underline{h}_s - \underline{h}_e = w_u + q \\ w_u = \frac{\delta W_u}{\delta m} \\ q = \frac{\delta Q}{\delta m} \\ \underline{h} = h + \frac{1}{2}c^2 + \underbrace{e_{pext}}_{\text{souvent } gz} \end{cases}$$

Sous forme infinitésimale :

$$d\underline{h} = \delta w_u + \delta q$$

En termes de puissance :

$$D_m \Delta \underline{h} = D_m(\underline{h}_s - \underline{h}_e) = P_u + P_{th}$$

II-5) Second principe pour un système ouvert

Dans le cas du système ouvert Σ_o évoluant sur un intervalle de temps élémentaire $[t, t + dt]$, on se ramène à un système fermé Σ_f incluant les éléments Σ_s et Σ_e . Pour Σ_f , les résultats rappelés ci-dessus s'appliquent, mais les états i et f sont alors voisins :

$$\begin{aligned} S_{\Sigma_f}(t + dt) - S_{\Sigma_f}(t) &= \delta S_{éch} + \delta S_c \\ dS_{\Sigma_f} &= \delta S_{éch} + \delta S_c \end{aligned}$$

L'entropie étant extensive, on définit pour chacun des éléments de fluide Σ_s et Σ_e les entropies massiques s_e et s_c d'où :

$$dS_{\Sigma_o} + \delta m_s s_s - \delta m_e s_e = \delta S_{éch} + \delta S_c$$

En régime stationnaire on a donc :

$$\delta m(s_s - s_e) = \delta S_{éch} + \delta S_c \Leftrightarrow s_s - s_e = \frac{\delta S_{éch}}{\delta m} + \frac{\delta S_c}{\delta m}$$

En régime stationnaire, le second principe en système ouvert s'écrit :

$$\Delta s = s_s - s_e = s_{éch} + s_c \text{ ou } ds = \delta s_{éch} + \delta s_c$$

Où les termes du second membre désignent :

- L'entropie massique d'échange $s_{éch}$, due à l'échange thermique à travers la frontière ;
- L'entropie massique de création s_c , rendant compte des irréversibilités.

III – Diagrammes (T,s) et (p,h)

III-1) Les titres massiques

Dans le milieu diphasé on définit les titres massiques par :

$$\begin{cases} x_v = \frac{m_v}{m} = \frac{m_v}{m_l + m_v} \\ x_l = \frac{m_l}{m} = 1 - x_v \end{cases}$$

III-2) Diagramme (T,s)

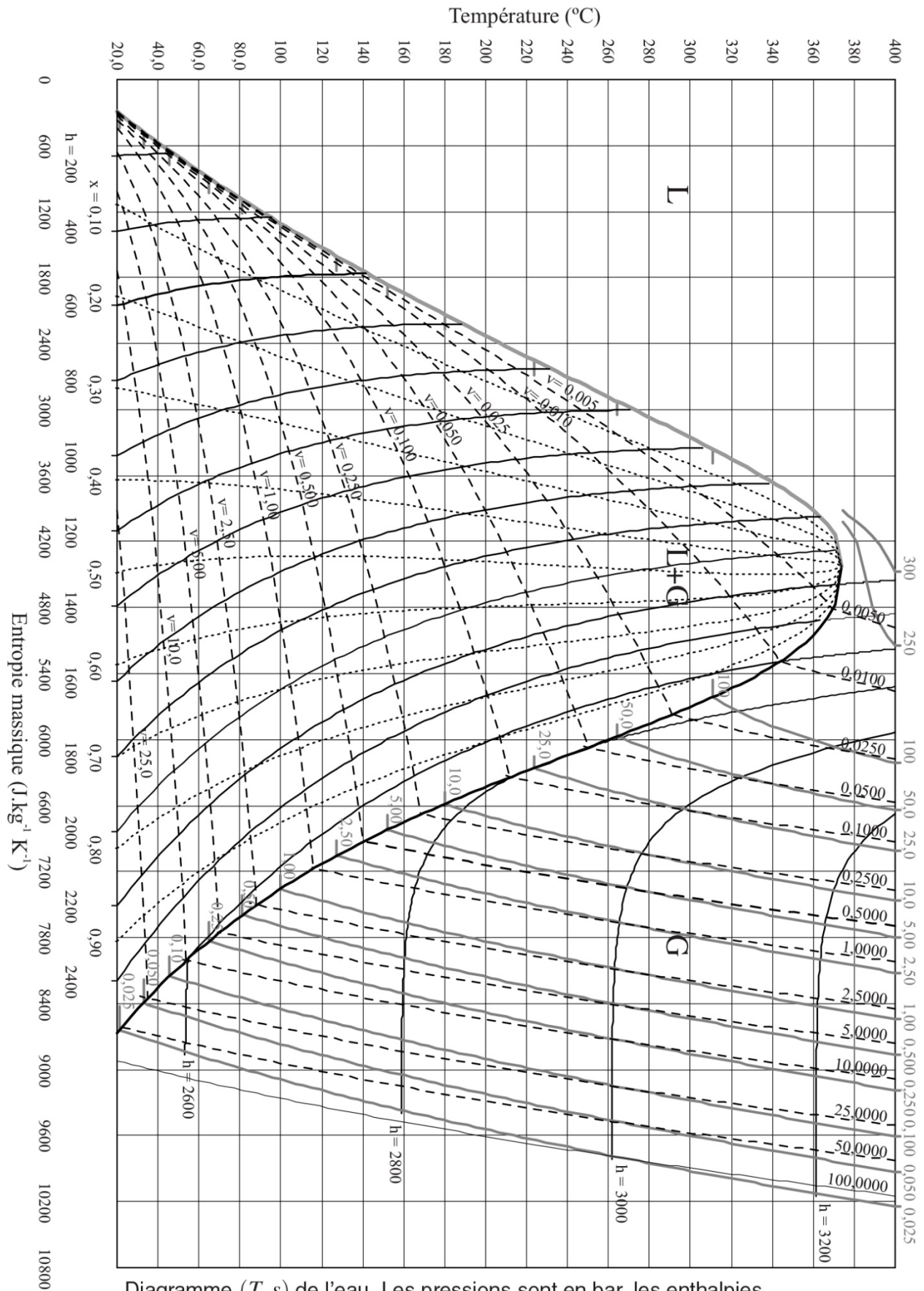


Diagramme (T,s) de l'eau. Les pressions sont en bar, les enthalpies massiques en kJ.kg^{-1} et les volumes massique en $\text{m}^3.\text{kg}^{-1}$.

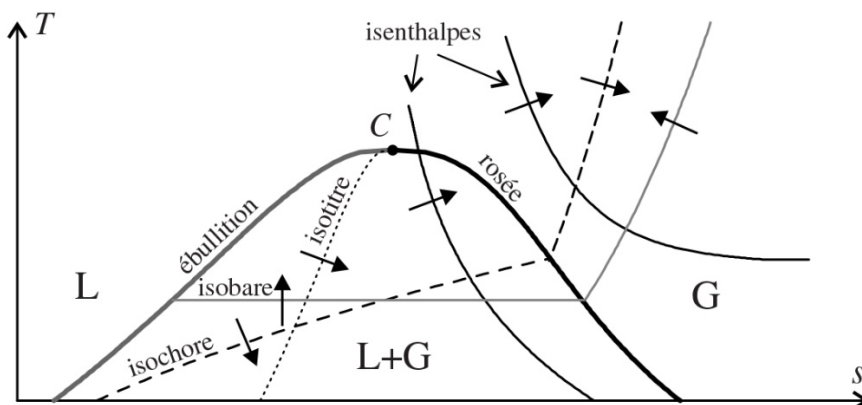
Le diagramme (T, s) est formé d'une courbe d'ébullition en gris et de la courbe de rosée en noir. Celles-ci se rejoignent au point critique C et forment la courbe de saturation.

Dans le cas de l'eau :

- $(T_c, s_c) = (374,142 \text{ °C}, 4,43 \text{ J.K}^{-1}.kg^{-1})$
- $P_c = 220,89 \text{ bar}$ et $v_c = 3,155 \times 10^{-2} \text{ m}^3 kg^{-1}$.

On observe les différents réseaux de courbes :

- Les isothermes sont des droites horizontales : on lit la température sur l'axe des ordonnées.
- Les isentropes sont des droites verticales : on lit l'entropie massique sur l'axe des abscisses.
- Les isobares sont des courbes croissantes dans la zone G du gaz et des segments de droite horizontaux dans la zone L+G (elles ne sont pas tracés complètement pour éviter de surcharger la figure).
- Les isochores sont des courbes croissantes avec une rupture de pente lorsqu'elles coupent la courbe de rosée. Dans la zone G, on observe aux points d'intersection des isochores avec les isobares que la pente de l'isochore est plus forte que celle de l'isobare. (Pour un gaz parfait elle est γ fois plus importante).



Les flèches représentent la direction dans laquelle la grandeur augmente.

III-2) Diagramme (p,h)

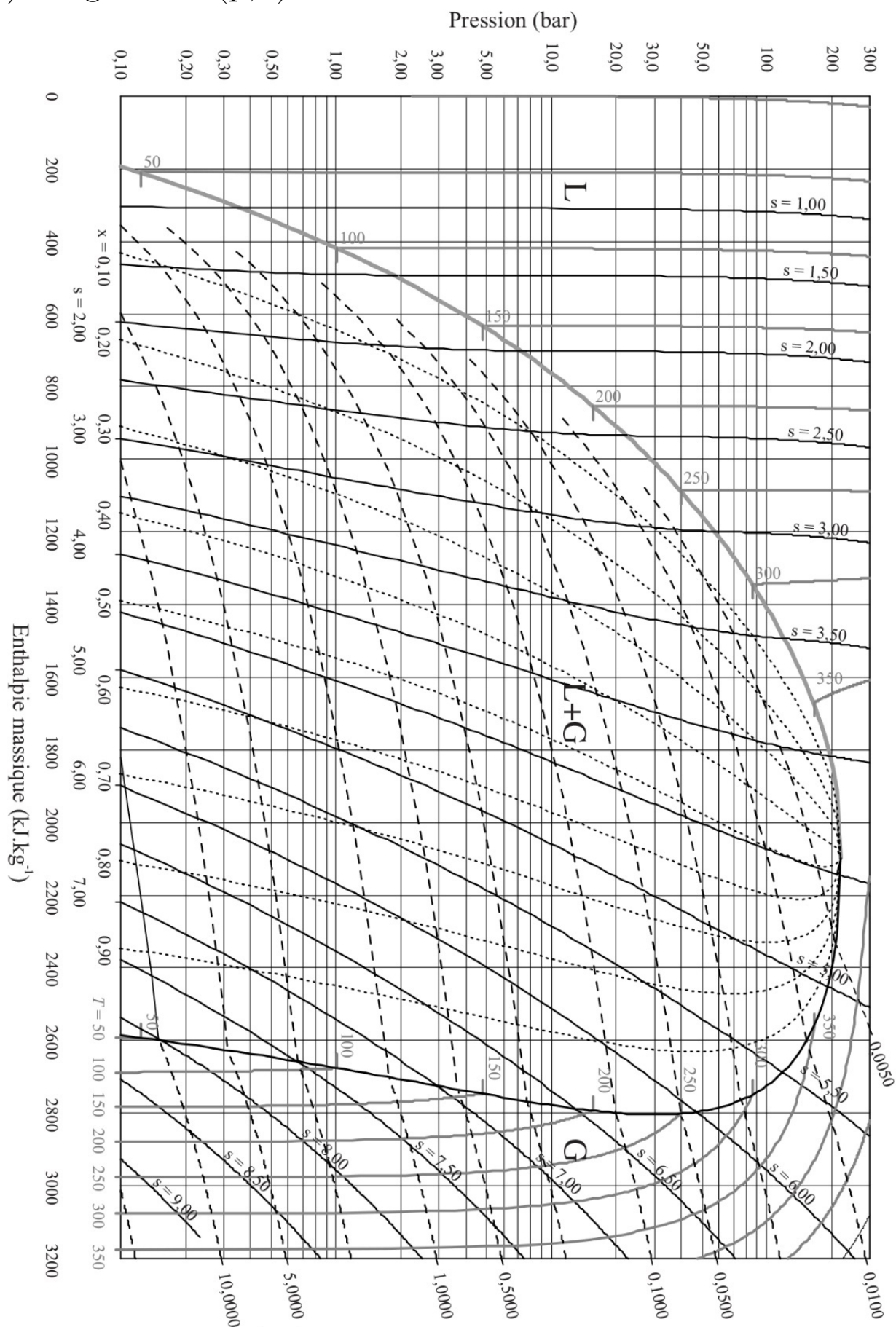
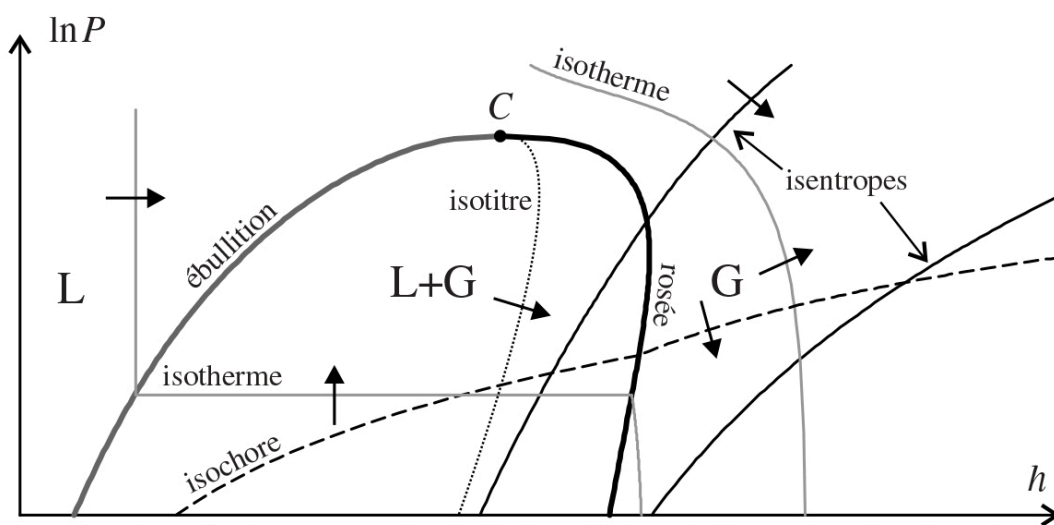


Diagramme (P,h) de l'eau. L'échelle de pression est logarithmique. Les températures sont en °C, les entropies massiques en $\text{kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ et les volumes massique en $\text{m}^3.\text{kg}^{-1}$.

Le diagramme des frigoristes pour l'eau est la représentation $(\ln(p), h)$ que l'on écrit souvent (p, h) . La courbe d'ébullition est en gris et la courbe de rosée en noir.

On observe les différents réseaux de courbes :

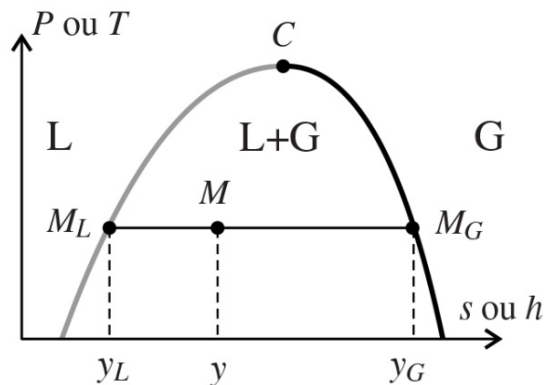
- Les isobares sont des droites horizontales : on lit la pression sur l'axe des ordonnées.
- Les isenthalpes sont des droites verticales : on lit l'enthalpie massique sur l'axe des abscisses.
- Les isothermes sont des courbes décroissantes dans la zone L et dans la zone G et des segments de droite horizontaux dans la zone L+G. Elles sont représentées en gris (la partie rectiligne des isothermes n'est pas tracée pour éviter de surcharger la figure).
- Les isochores sont des courbes croissantes avec une rupture de pente lorsqu'elles coupent la courbe de rosée.
- Les isentropes sont des courbes croissantes sans rupture de pente à la limite de la zone L+G.
- Les isotitres sont représentées en pointillés noir dans la zone L+G.



Courbes du diagramme $(\ln P, h)$. Les flèches indiquent la direction dans laquelle la grandeur constante sur la courbe augmente.

III-3) Zone d'équilibre liquide vapeur

a) Théorème des moments chimiques



Quel que soit le diagramme utilisé les relations restent les mêmes en $(\ln p, h)$, (T, s) , (p, v) ou (h, s) .

Pour un milieu diphasé on a :

$$\begin{cases} y = x_L y_L + x_G y_G \\ \text{ou} \\ Y = m_L y_L + m_G y_G \end{cases}$$

Or : $x_L + x_G = 1 \Rightarrow y = (1 - x_G)y_L + x_G y_G$

Par conséquent : $x_G = \frac{y - y_L}{y_G - y_L}$ (théorème des moments chimiques)

Un système diphasé L-G vérifie :

$$\begin{cases} y = x_L y_L + x_G y_G \\ x_G = \frac{y - y_L}{y_G - y_L} = \frac{M_L M}{M_L M_G} \\ x_L = 1 - x_G = \frac{M M_G}{M_L M_G} \end{cases}$$

b) Calculs d'enthalpie et d'entropie

Pour calculer les variations d'enthalpie ou d'entropie on peut utiliser les diagrammes thermodynamiques, cependant on peut aussi retrouver les valeurs.

$$\begin{aligned} \text{On a : } y &= x_L y_L + x_G y_G = (1 - x_G)y_L + x_G y_G \\ &\Leftrightarrow y = y_L + x_G (y_G - y_L) \\ &\Leftrightarrow y = y_L + x_G \Delta_{vap} y \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{cases} y_1 = y_L + x_{G1}\Delta_{vap}y \\ y_2 = y_L + x_{G2}\Delta_{vap}y \end{cases}$$

Par conséquent : $\Delta y = y_2 - y_1 = (x_{G2} - x_{G1})\Delta_{vap}y$

On peut retrouver facilement ce résultat, en disant pour passer de l'état 1 à l'état 2 il faut vaporiser la partie liquide présente en 1 qui est devenue vapeur en 2 d'où :

$$\Delta y = (x_{G2} - x_{G1})\Delta_{vap}y$$

De plus, sur un palier de changement d'état on a T et p qui sont constants donc l'identité thermodynamique devient :

$$dh = Tds + vdp \Rightarrow \Delta h = T\Delta s$$

Un système diphasé L-G vérifie sur un palier :

$$\begin{cases} y = y_L + x_G\Delta_{vap}y \\ \Delta y = (x_{G2} - x_{G1})\Delta_{vap}y \\ \Delta s = \frac{\Delta h}{T_{vap}} \text{ et } \Delta_{vap}s = \frac{\Delta_{vap}h}{T_{vap}} \\ y = \{s, h, v, \dots\} \end{cases}$$

$\Delta_{vap}h$ est aussi appelée chaleur latente massique de vaporisation notée l_{vap}

III-4) Zone condensée (L)

A l'aide des identités thermodynamiques :

$$\begin{cases} dh = Tds + vdp \\ \text{ou } du = Tds - pdv \end{cases}$$

On démontre, pour une zone condensée :

$$\begin{cases} dh = c_p dT = cdT \Rightarrow \Delta h = c\Delta T \\ ds = \frac{cdT}{T} \Rightarrow \Delta s = c \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \end{cases}$$

III-5) Zone vapeur (G)

En général c'est la zone où l'on utilise très souvent les diagrammes, cependant si on suppose que le gaz est parfait, on peut à nouveau utiliser les relations vues en première année.

Si la vapeur est assimilable à un gaz parfait :

$$\begin{cases} \Delta h = c_p \Delta T \text{ et } \Delta u = c_v \Delta T \\ \Delta s = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \frac{R}{M} \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \end{cases}$$

La formule de l'entropie doit être donnée.

Quelques rappels sur les gaz parfaits :

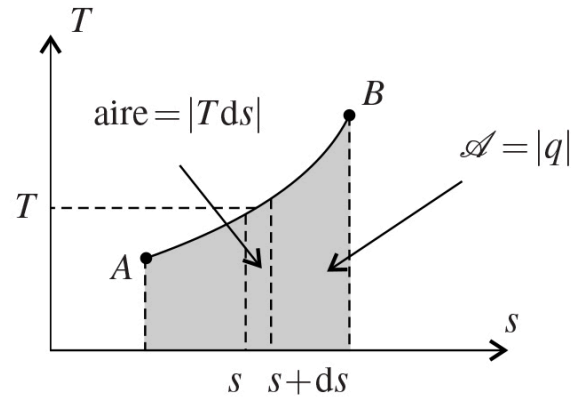
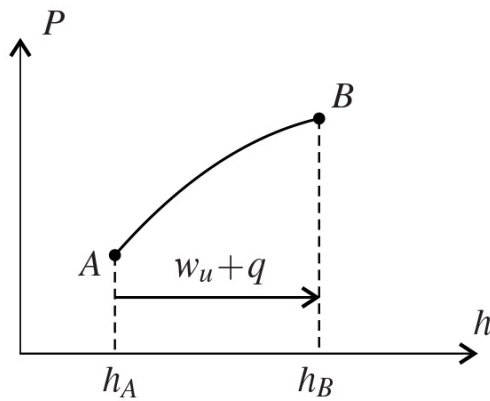
○ Les relations de Mayer

$$\begin{cases} c_p - c_v = \frac{R}{M} \text{ et } \frac{c_p}{c_v} = \gamma \\ c_p = \frac{R}{M} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \text{ et } c_v = \frac{R}{M} \frac{1}{\gamma - 1} \\ \text{En molaires : } C_{pm} = R \frac{\gamma}{\gamma - 1} \text{ et } C_{vm} = R \frac{1}{\gamma - 1} \end{cases}$$

○ Les lois de Laplace pour une transformation isentropique.

$$\begin{cases} pV^\gamma = cste \\ TV^{\gamma-1} = cste \\ T^\gamma p^{1-\gamma} = cste \end{cases}$$

III-6) Intérêt énergétique des diagrammes



Le diagramme (p, h) permet d'obtenir facilement Δh , par conséquent :

- Si $\Delta(e_c + e_p) = 0$, on obtient $w_u + q$

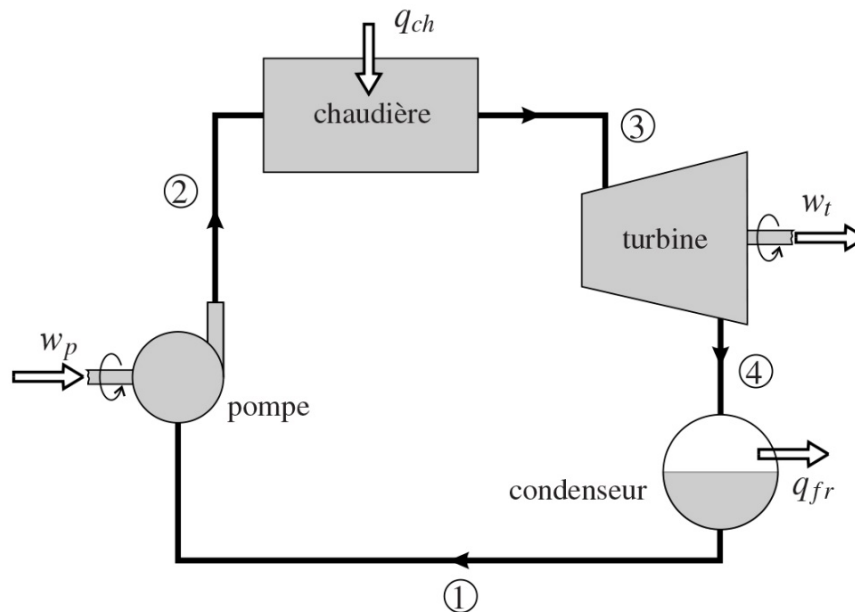
Le diagramme (T, s) permet d'obtenir facilement q , en effet :

- Si la transformation est réversible : $ds = \frac{\delta q}{T}$

$$\Rightarrow q = \int_A^B T ds = \pm \text{Aire sous la courbe}$$

IV – Centrale électrique thermique

IV-1) Cycle de Rankine



Le fluide circule en régime **stationnaire** dans la machine et passe par quatre états successifs :

- Etat 1 : le fluide sort du condenseur à l'état liquide saturant à la température T_1 et la pression $p_1 = p_{sat}(T_1) = 0,2bar$, pression de vapeur saturante à la température $T_1 = 333K$;
 - o Transformation $1 \rightarrow 2$: dans la pompe le liquide subit une compression adiabatique et réversible.
- Etat 2 : le fluide est à l'état liquide à la pression $p_2 = 100bar > p_1$ et à une température $T_2 \sim T_1$;
 - o Transformation $2 \rightarrow 3$: dans la chaudière le fluide reçoit du transfert thermique à pression constante, il monte en température, est totalement transformé en vapeur et monte encore en température ;
- Etat 3 : le fluide est à l'état de vapeur sèche à la température $T_3 = 613K > T_2$ et à la pression $p_3 = p_2$;
 - o Transformation $3 \rightarrow 4$: dans la turbine le fluide subit une détente adiabatique et réversible ;
- Etat 4 : le fluide est à l'état de mélange liquide-vapeur de titre massique en vapeur x_4 , à température $T_4 = T_1$ et à la pression $p_4 = p_1 = p_{sat}(T_1)$;
 - o Transformation $4 \rightarrow 1$: dans le condenseur la vapeur se condense totalement de manière isobare et isotherme.

Ce cycle de transformation est appelé **cycle de Rankine**.

IV-2) Application des deux principes

On applique les deux principes en supposant que $\Delta(e_c + e_p) \ll \Delta h$:

$$\begin{cases} h_s - h_e = w_u + q \\ s_s - s_e = s_{éch} + s_c \end{cases}$$

- Pompe :

La transformation est isentropique d'où :

$$\begin{cases} h_2 - h_1 = w_p \\ s_2 = s_1 \end{cases}$$

- Chaudière :

Pas de travail utile d'où :

$$\begin{cases} h_3 - h_2 = q_{ch} \\ s_3 - s_2 = \frac{q_{ch}}{T_{ch}} + s_{c,ch} \end{cases}$$

- Turbine :

Détente isentropique d'où :

$$\begin{cases} h_4 - h_3 = w_t \\ s_4 = s_3 \end{cases}$$

- Condenseur :

Pas de travail utile d'où :

$$\begin{cases} h_4 - h_3 = q_{fr} \\ s_4 - s_3 = \frac{q_{fr}}{T_{fr}} + s_{c,fr} \end{cases}$$

IV-3) Rendement

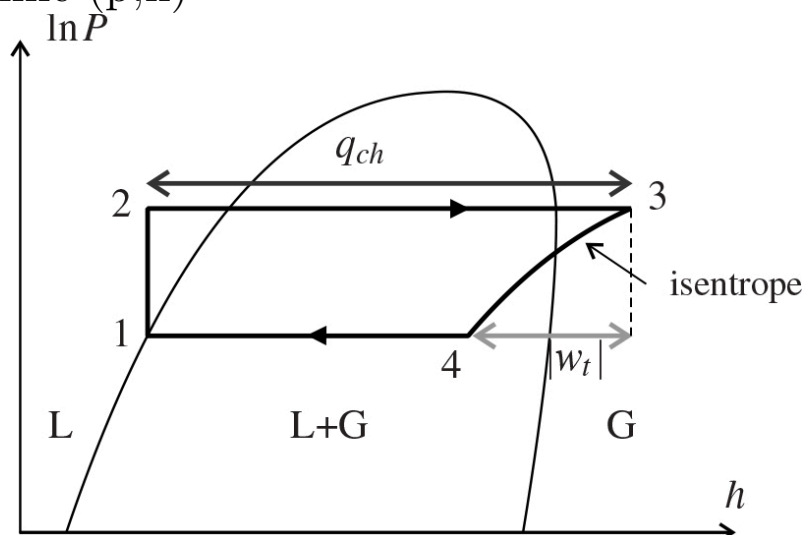
La machine proposée est motrice ainsi le rendement vaut :

$$r = - \frac{w_t + w_p}{q_{ch}}$$

Le rendement est inférieur à la limite de Carnot :

$$r < r_c = 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}}$$

IV-4) Diagramme (p,h)



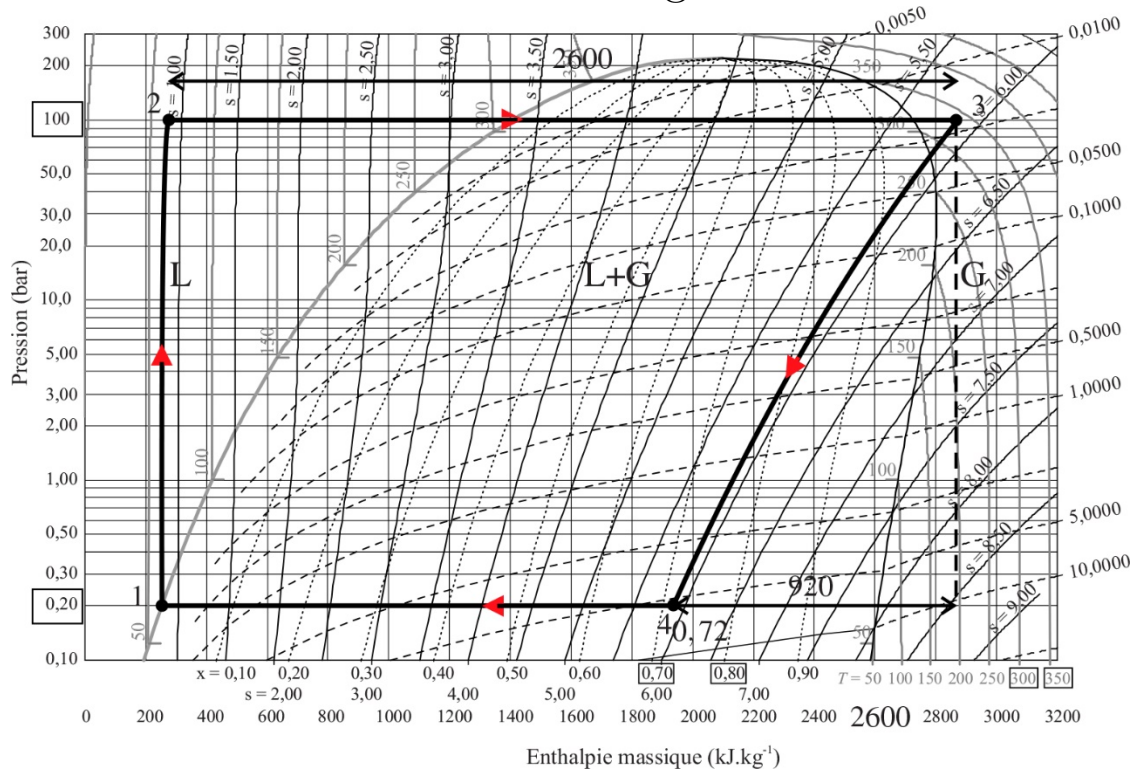
On a affaire à de l'eau, or pour une transformation isentropique : $dh = v dp$

$$\Rightarrow h_2 - h_1 = v_{eau}(p_2 - p_1) \sim 10 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$\Rightarrow w_p = 10 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

On vérifie sur le diagramme que $w_p \ll -w_t$.

Calculons le rendement à l'aide du diagramme de l'eau :

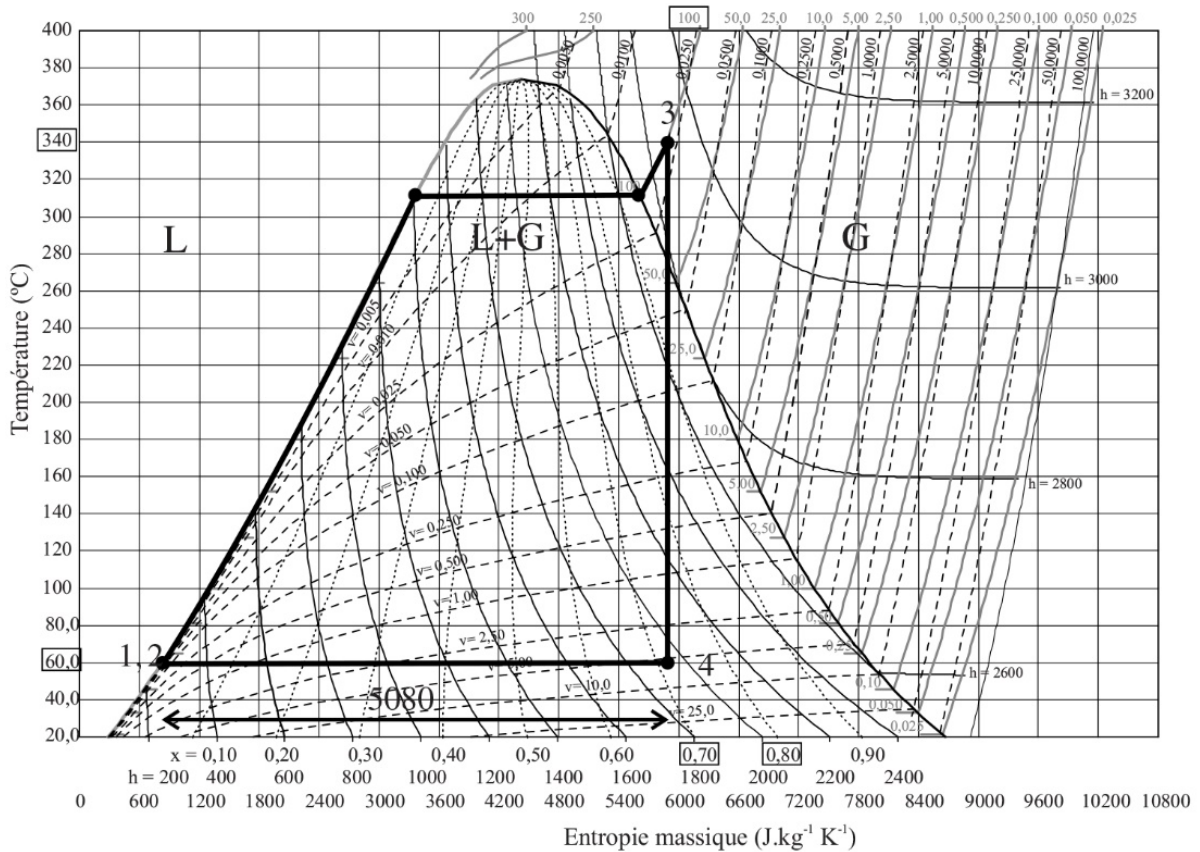


On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} r = -\frac{w_T + w_p}{q_{ch}} = -\frac{1950 - 2870 + 10}{2870 - 270} = 35\% \\ r_c = 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}} = 1 - \frac{333}{613} = 46\% \end{array} \right.$$

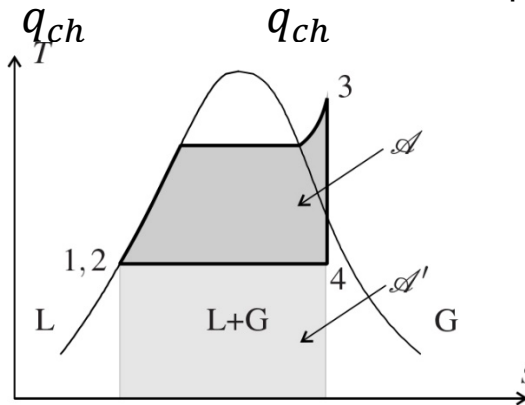
On remarque que $x_4 = 0,72$, le taux de liquide est non négligeable, dans certaines centrales on rajoute un surchauffeur afin que la détente reste en dehors de la zone liquide-vapeur. Cela protège les ailettes de la turbine de l'eau liquide à haute vitesse. On nomme dans ce cas, le cycle : cycle de Hirn.

IV-5) Diagramme (T,s)



Vu que $T_2 \sim T_1$, les deux points sont quasiment confondus dans ce diagramme. On peut retrouver le rendement du cycle à l'aide des chaleurs échangées :

$$r = - \frac{w_T + w_p}{q_{ch}} = \frac{q_{ch} + q_{fr}}{q_{ch}} = 1 + \frac{q_{fr}}{q_{ch}}$$



$$\Rightarrow r = 1 - \frac{A'}{A + A'} = \frac{A}{A + A'}$$

$$\text{où } \begin{cases} A' = 333 * 5080 = 1,69.10^6 \\ A = \frac{5080 + 2500}{2} (310 - 60) = 0,947.10^6 \end{cases} \Rightarrow r = 36\%$$

Bien entendu, on retrouve le même rendement par les deux méthodes de calcul.

IV-6) Coefficient de performance

$$\begin{aligned} \text{Moteur : } r &= -\frac{w_{\text{utile}}}{q_{\text{ch}}} \text{ et } r_c = 1 - \frac{T_{\text{fr}}}{T_{\text{ch}}} = \frac{T_{\text{ch}} - T_{\text{fr}}}{T_{\text{ch}}} \\ \text{Machine frigorifique : } COP &= \frac{q_{\text{fr}}}{w_{\text{utile}}} \text{ et } COP_c = \frac{T_{\text{fr}}}{T_{\text{ch}} - T_{\text{fr}}} \\ \text{Pompe à chaleur : } COP &= -\frac{q_{\text{ch}}}{w_{\text{utile}}} \text{ et } COP_c = \frac{T_{\text{ch}}}{T_{\text{ch}} - T_{\text{fr}}} \end{aligned}$$

Dans le cas d'un moteur on utilise aussi le terme de rendement et dans la cas d'une machine frigorifique (ou pompe à chaleur), on parle aussi d'efficacité.