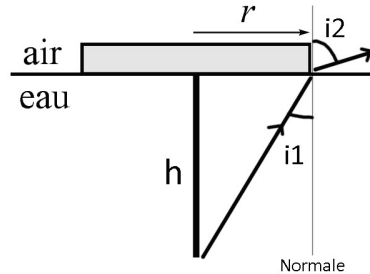


TD1C – Optique géométrique

A – Travaux dirigés

101 - Réflexion totale



1°) Soit :

$$n \sin(i_1) = \sin(i_2) \quad \text{et} \quad \sin(i_1) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

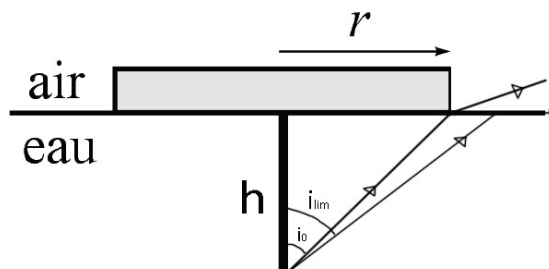
$$\text{Or } i_1 < i_{\text{lim}} = 48,7^\circ \Rightarrow \sin(i_1) < \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sin(i_1) &= \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} < \frac{1}{n} \\ \Leftrightarrow \frac{r^2}{r^2 + h^2} &< \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow r^2 + h^2 > n^2 r^2 \Leftrightarrow h^2 > n^2 r^2 - r^2 \\ \Rightarrow h_0 &= r\sqrt{n^2 - 1} \Leftrightarrow h_0 = 8,77 \text{ cm} \end{aligned}$$

2°) On a $h=10$ cm, par conséquent la tête d'épingle est visible de l'extérieur. Celle-ci va définir un angle de 45° (triangle rectangle isocèle). Donc :

$$i_0 = 45^\circ < i_1 < i_{\text{lim}} = 48,7^\circ$$



102 - Méthode de Bessel

1°) En adoptant les notations définies dans la relation de Descartes, $p = \overline{OA}$ et $p' = \overline{OA'}$, on obtient deux équations :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \text{ et } D = \overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'} = p' - p$$

D'où en combinant ces deux équations :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+D} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} &\Leftrightarrow \frac{p - (p+D)}{(p+D)p} = \frac{1}{f'} \Leftrightarrow \frac{-D}{p^2 + pD} = \frac{1}{f'} \\ &\Leftrightarrow -Df' - p^2 - pD = 0 \Leftrightarrow p^2 + pD + Df' = 0 \end{aligned}$$

Cette équation n'admet de solutions réelles que pour $\Delta > 0$

$$D^2 - 4Df' > 0$$

Pour former l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente il faut remplir la condition :

$$D > 4f' \Leftrightarrow f' < \frac{D}{4}$$

2°) Dans ce cas il existe deux racines et donc deux positions possibles de la lentille : $p = -\frac{D}{2} \pm$

$$\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - Df'}$$

Chacune de ces solutions correspond bien à une valeur de p' positive (image réelle) et inférieure à D (objet réel). Elles conviennent donc toutes les deux.

3°) Ils ont tous les deux un grandissement négatif mais l'un supérieur à un et l'autre inférieur à un.

$$\begin{aligned} \text{En effet : } \gamma = \frac{p'}{p} = \frac{D+p}{p} = 1 + \frac{D}{p} &= 1 + \frac{D}{-\frac{D}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - Df'}} = 1 + \frac{1}{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{f'}{D}}} \\ &= 1 - \frac{2}{1 \pm \sqrt{1 - 4Df'}} = 1 - \frac{2}{1 \pm \alpha_{0 < \alpha < 1}} \end{aligned}$$

Si on prend la solution « + » alors : $-1 < \gamma < 0$.

Si on prend la solution « - » alors : $-\infty < \gamma < -1$.

$$4°) \text{ Soit } d = |p_1 - p_2| = \sqrt{D^2 - 4Df'} \Rightarrow f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$$

103 - Optique de l'œil

1. a) L'objet est réel et l'image se formant sur la rétine (qui joue le rôle d'écran) est donc réelle elle-aussi. La seule possibilité d'objet réel donnant une image réelle correspond au cas d'une lentille convergente (ici le cristallin de l'œil), avec l'objet avant F et l'image après F' et dans ce cas l'image est renversée.

b) On connaît les distances de l'objet ($\overline{OA} = -D$) et de l'image au centre optique, donc on utilise la formule de grandissement avec origine en O :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{d}{D} = 11.10^{-3}$$

On en déduit la taille de l'image : $\overline{A'B'} = \gamma \overline{AB} = 1,1 \text{ mm}$.

c) Pour calculer la vergence du système, on applique la relation de Descartes :

$$V = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{d} - \frac{1}{-D} = 92 \delta$$

2. a) On ne peut se servir des résultats des questions précédentes. Le fait que la position de la rétine (position de l'image) soit inchangée alors que la position de l'objet ait changée implique que la vergence V de la lentille ait évolué. Le raisonnement est le même qu'à la question (a) : image réelle renversée puisqu'elle se forme sur un écran (la rétine) et que l'objet est réel.

b) On applique de nouveau la loi de Descartes :

$$V = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{11.10^{-3}} - \frac{1}{-25.10^{-2}} = 491 \delta$$

On trouve que le cristallin s'est contracté (la vergence a augmenté) pour voir plus près. La taille de l'image est obtenue par l'expression du grandissement :

$$\overline{A'B'} = \gamma \overline{AB} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \overline{AB} = \frac{0,11}{-0,25} 0,1 = -4,4 \text{ mm}$$

3. a) On calcule tout d'abord la vergence V du cristallin de l'œil myope. L'image d'un objet à l'infini se forme dans le plan focal image de la lentille donc à une distance f' de O soit $f' = 11 - 0,5 = 10,5 \text{ mm}$ soit $V = 95,2 \delta$. On appelle L_D le verre de lunette et R le point d'intersection de l'axe optique avec la rétine. Pour que le myope voit net l'objet à l'infini, on doit avoir la suite de conjugaison suivante : $\infty \xrightarrow{L_D} F'_D \xrightarrow{\text{cristallin}} R$. Il s'agit donc de trouver la position de l'antécédent de R par le cristallin. Avec $\overline{OR} = d$, la relation de Descartes donne :

$$V = \frac{1}{d} - \frac{1}{\overline{OF'_D}} \Rightarrow \overline{OF'_D} = \frac{d}{1 - Vd} = -23,3 \text{ cm}$$

On remarque que F'_D est à 23,3 cm avant O donc à 21,3 cm avant L_D ce qui correspond bien à une lentille divergente de distance focale image $f'_D = -21,3 \text{ cm}$, donc de vergence $V' = 1/f'_D = -4,7 \delta$.

b) Dans ce cas, la vergence du cristallin a changé par rapport à la question précédente, puisque l'œil n'observe plus à l'infini. On sait cependant que l'image finale A' est sur la rétine ($\overline{OA'} = d$). On calcule la position de l'image intermédiaire A_i par la formule Descartes appliquée à L_D :

$$\frac{1}{\overline{O'A_i}} - \frac{1}{\overline{O'A}} = V' \Rightarrow \overline{O'A_i} = \frac{\overline{O'A}}{1 + \overline{O'A} V'} = -17,5 \text{ cm}$$

On en déduit $\overline{OA_i} = -19,5 \text{ cm}$.

Le grandissement de l'ensemble est le produit des grandissements :

$$\gamma = \frac{\overline{O'A_i}}{\overline{O'A}} \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA_i}} = -0,01$$

104 - Aberrations chromatiques d'une lentille simple

1. Un objet A a pour image A_1 par L_1 et A' par l'ensemble des deux lentilles. Si les lentilles sont accolées, on peut confondre leurs deux centres qu'on note O dans la suite. Les relations de conjugaison donnent $\frac{1}{OA_1} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'_1}$ et $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'_2}$ soit en sommant les deux $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$ qui est la formule de conjugaison d'une lentille de vergence $V = \frac{1}{f'} = V_1 + V_2 = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$.

2. Par application de la relation proposée, on a

$$V_F - V_C = (n_F - 1)A - (n_C - 1)A = (n_F - n_C)A$$

Or la formule du pouvoir dispersif permet d'écrire $n_F - n_C = \frac{n_D - 1}{\nu}$. On en déduit $V_F - V_C = \frac{n_D - 1}{\nu}A = \frac{V_D}{\nu}$. En remplaçant la vergence par la distance focale, on a $\frac{1}{f'_F} - \frac{1}{f'_C} = \frac{1}{\nu f'_D}$. En supposant que $f'_D \simeq f'_C \simeq f'_F$, on peut écrire $\frac{f'_C - f'_F}{f'_C f'_F} \simeq \frac{f'_C - f'_F}{f'^2_D} = \frac{1}{\nu f'_D}$ soit $f'_C - f'_F = \frac{f'^2_D}{\nu} = 6,0 \text{ mm}$. Cette valeur est très faible devant f'_D donc l'approximation est justifiée.

3. Les conséquences sont une irisation de l'image mais une moins bonne netteté.

4. On souhaite $V_F = V_C$ soit $V_{1F} + V_{2F} = V_{1C} + V_{2C}$ qui s'écrit en explicitant les expressions de la vergence $A_1(n_{1F} - n_{1C}) = A_2(n_{2C} - n_{2F})$ avec $A_i = \frac{V_{iD}}{n_{iD} - 1}$. Après simplification, on obtient

$$\frac{V_{1D}}{\nu_1} + \frac{V_{2D}}{\nu_2} = 0.$$

5. On n'a rendu le doublet de lentilles achromatique uniquement pour les raies C et F . Les autres ne le sont pas mais on a réduit l'écart. On pourra considérer le système comme approximativement achromatique.

6. On veut $V_{1D} + V_{2D} = 2,0$ et $\frac{V_{1D}}{\nu_1} + \frac{V_{2D}}{\nu_2} = 0$. La résolution de ce système donne $V_{1D} = \frac{2\nu_2}{\nu_2 - \nu_1} = 4,0$ et $V_{2D} = \frac{2\nu_1}{\nu_1 - \nu_2} = -2,0$ soit $f'_1 = -50 \text{ cm}$ et $f'_2 = 25 \text{ cm}$.

B – Exercices supplémentaires

105 - La loupe

a) La vergence est positive donc la lentille est convergente. Pour un objet AB situé entre le foyer objet et la lentille, l'image est virtuelle, agrandie et droite (Fig. 32).

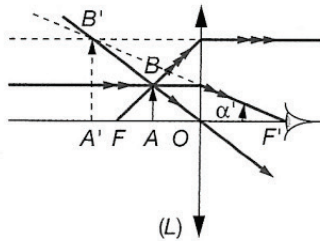


Figure 32

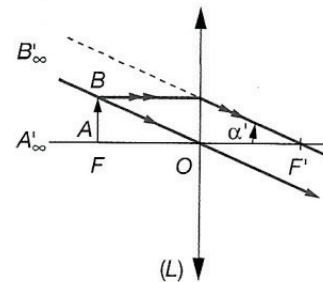
b) Le rayon parallèle à l'axe, issu du point B sur le bord de l'objet, est rabattu sur le foyer F' où se trouve la pupille de l'œil. Il entre en faisant un angle $\alpha' \simeq R / f'$ (conditions de Gauss). Cette construction exploite un rayon incident parallèle à l'axe optique : elle donne le même angle quelle que soit la position de l'objet dans l'intervalle $[F, O]$.

c) L'image doit se trouver entre l'infini et la distance d ; on utilise la relation de Newton :

$$\overline{FA} = - \frac{f'^2}{\overline{F'A'}}$$

avec $\overline{F'A'}$ compris entre $-\infty$ et $-d$. L'objet doit donc se trouver entre le foyer F et le point situé sur le segment $[F, O]$ à distance $f'^2 / d \simeq 2,6$ cm de F .

Dans le cas où l'objet est en F (Fig. 33), l'œil n'accommode pas, ce qui procure un confort de lecture.



d) La limite de résolution angulaire de l'œil humain est approximativement $\theta_m = 3.10^{-4}$ rad. L'angle $\alpha' \simeq R / f'$ varie de cette valeur lorsque R varie de $\theta_m f' = 2,4.10^{-5}$ m, c'est-à-dire quelques dizaines de microns.

106 - Agrandisseur-Réducteur d'image

1.a) L'image devant être réelle ainsi que l'objet, si on n'utilise qu'une seule lentille, elle doit nécessairement être convergente.

Le grandissement est égal au rapport $p' / p = \overline{OA'} / \overline{OA}$: il faut donc placer la lentille à égale distance des plans P et P' . Dans ce cas, $p' = -p = 2f'$: la distance focale est égale au quart de la distance entre les plans : $f' = D / 4 = 0,107$ m.

b) Deux rayons parmi les 3 représentés sur la figure 27 suffisent.

2.a) Soit A_1 l'image d'un point A par L_1 , son image A' par L_2 est située sur P' :

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'.$$

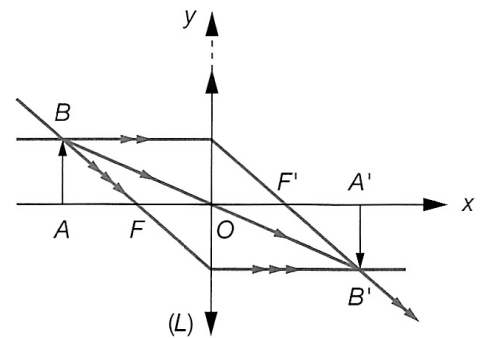


Figure 27

La relation de conjugaison de Descartes, écrite pour A_1 et A' ($\overline{O_2A'} = d$) donne :

$$\overline{O_2A_1} = p_2 = \frac{df'_2}{f'_2 - d} = 0,0667 \text{ m.}$$

A_1 est donc situé derrière L_2 , à 0,133 m devant P' .

b) L_1 doit conjuguer A et A_1 , donc $\frac{1}{f'_1} = \frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{-d}$.

On aboutit à $f'_1 = 0,0638$ m \simeq 6,4 cm.

c) $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \cdot \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = -1,4$.

Ce grandissement a une valeur absolue proche de $\sqrt{2}$, il s'agit probablement du changement de format A_5 en A_4 ou A_4 en A_3 .

3.a) En inversant complètement les positions des lentilles, c'est-à-dire en disposant L_2 à la distance d de P puis L_1 à distance d de P' , on échange les rôles de l'objet et de l'image. La conjugaison demeure et le grandissement devient l'inverse $1 / \gamma$.

b) La vergence de lentilles accolées s'ajoute, donc $V_1 = V_2 + V_3$:

$$f'_3 = \frac{f'_1 f'_2}{f'_2 - f'_1} = 0,039 \text{ m.}$$

c) On place les deux lentilles divergentes L_2 à la distance d des plans P et P' et on laisse la lentille L_3 mobile entre elles. Lorsque L_3 est accolée à la lentille L_2 la plus proche de P , on retrouve la configuration de la question **2.** : le facteur de grandissement est $\sqrt{2}$.

Si on fait glisser L_3 jusqu'à être accolée à la lentille L_2 la plus proche de P' , c'est la configuration inversée de la question **3.a)** qui est obtenue : le grandissement devient $1 / \sqrt{2}$.

107 - Association lentille-miroir plan

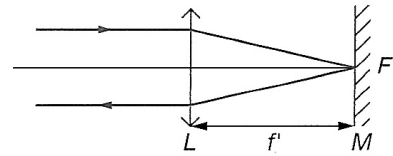
a) Le faisceau incident émane d'un point A_∞ situé sur l'axe, son image par L est donc au foyer F' . F' joue à son tour le rôle d'objet pour M : on construit alors son image F'' en effectuant une symétrie plane par rapport au plan du miroir. Après réflexion sur le miroir, F'' joue le rôle d'objet pour la lentille L . Or on souhaite que les rayons ressortent parallèles à l'axe optique : il faut donc placer F'' au foyer de L . Mais pour une progression de la lumière dans le sens inverse, les foyers de la lentille sont échangés : c'est F' qui joue le rôle de point focal objet ! Il faut finalement placer F'' au foyer de la lentille L : $F'' = F'$.

Ces conjugaisons successives par L , puis M et enfin L dans le sens inverse, peuvent se schématiser à l'aide d'un schéma sagittal simple :

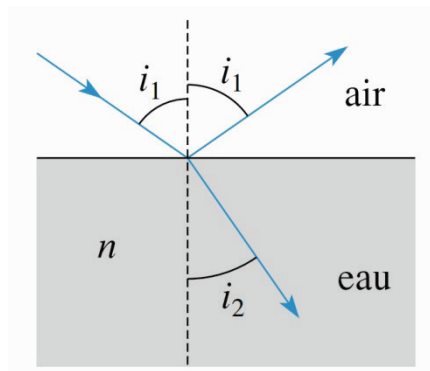
$$A_\infty \xrightarrow{L} F' \xrightarrow{M} F'' \xrightarrow{L} A_\infty.$$

Les points F' et F'' étant confondus, F' est son propre conjugué par M : il est nécessairement situé sur le miroir. La distance lentille-miroir doit donc être égale à la distance focale de la lentille : $OM = f'$.

b) Dans la configuration retenue, on peut tracer la marche d'un rayon incident parallèle à l'axe (Fig. 42) : il se réfléchit sur le miroir au point F' et traverse à nouveau la lentille pour donner un rayon parallèle à l'axe.



108 - Incidence de Brewster



On a :

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2) \Leftrightarrow \sin(i_1) = n \sin(i_2)$$

$$\text{Or } i_1 + i_2 = \frac{\pi}{2} \text{ d'où } \sin(i_1) = n \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_1\right)$$

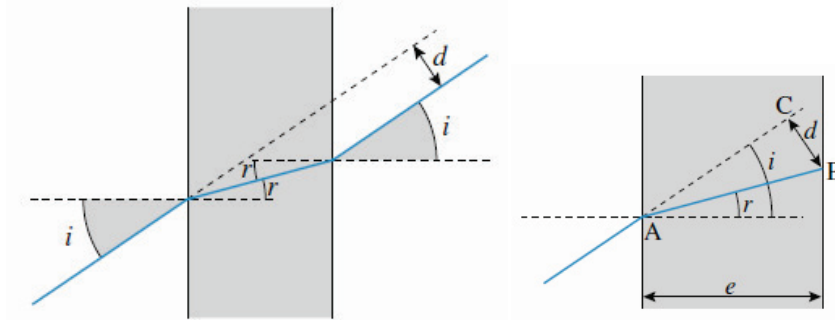
$$\Rightarrow \tan(i_1) = n = 1,5$$

$$\Rightarrow i_1 = 56^\circ$$

109 - Déplacement d'un rayon lumineux

La construction montre que le rayon sort de la lame sans avoir été dévié, mais décalé de la distance d .

d.



Sur le schéma notons $d=CB$ alors :

$$d = AB \sin(i - r) \text{ où } r = i_2 \text{ tel que } \sin(i_1) = n \sin(i_2)$$

De plus : $AB = \frac{e}{\cos(i_2)}$

D'où :

$$d = e \frac{\sin(i_1 - i_2)}{\cos(i_2)} = 1,65 \text{ mm}$$

110 - Fibre optique

En I, il faut qu'il y est réflexion totale d'où : $\sin(i) > \frac{n_2}{n_1}$

Or $i + \theta_1 = \frac{\pi}{2}$

d'où $\cos(\theta_1) = \sin(i) \Leftrightarrow \sqrt{1 - \sin^2(\theta_1)} > \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow \sin^2(\theta_1) > \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - 1$

De plus : $n_1 \sin(\theta_1) = \sin(\theta_0)$

Donc $\frac{\sin^2(\theta_0)}{n_1^2} > \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - 1 \Leftrightarrow n_1^2 - n_2^2 > \sin^2(\theta_0)$

$$\Rightarrow 0 < \theta_0 < \theta_f \text{ où } \theta_f = \text{Arcsin} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

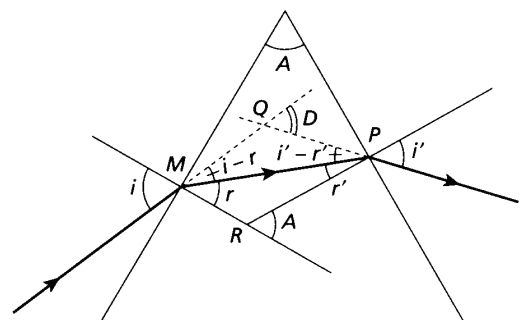
111 - Prisme de petit angle sous faible incidence

1°) A l'aide la figure on voit que :

- Dans PRM : $\pi = A + (\pi - r - r') \Rightarrow A = r + r'$
- Dans PQM : $\pi - D + (i - r) + (i' - r') = \pi \Rightarrow D = i + i' - A$

Les lois de Descartes en M et P donnent les deux dernières relations :

- En M : $\sin(i) = n \sin(r)$
- En P : $\sin(i') = n \sin(r')$



2°) Si A est petit et si l'incidence est rasante : i petit on peut utiliser les approximations des petits angles d'où :

$$D = i + i' - A = nr + nr' - A = (n-1)A$$