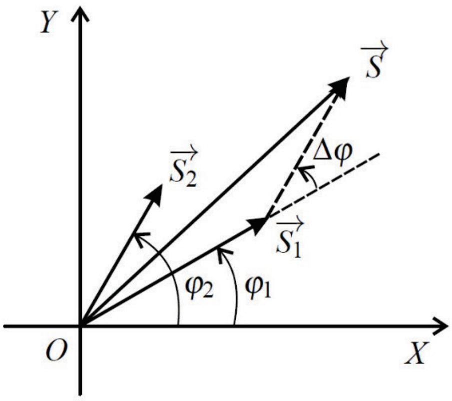
OP3 – Superposition d'ondes lumineuses

A – Travaux dirigés

OP31 – Méthode de Fresnel

1°)



Addition des vecteurs de Fresnel correspondant à deux signaux sinusoïdaux de même fréquence. Les vecteurs sont représentés à l'instant $t = 0$.

Soit les deux signaux : $s_1(t) = A_1cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2cos(\omega t + \varphi_2)$. On se rappelle que les normes des vecteurs $\overrightarrow{S_1}$ et $\overrightarrow{S_2}$ sont égales aux amplitudes des signaux.

On a représenté aussi le vecteur de Fresnel du signal somme $s(t)$ par $\vec{S}$ tel que :

$$S^2 = \left(\overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2}\right)^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\overrightarrow{S_1}.\overrightarrow{S_2} = S_1^2 + S_2^2 + 2S_1.S_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Donc :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

2°)

On a :

$$A^2 = 2A_1^2\left(1 + cos(\varphi_2 - \varphi_1)\right) = 4A_1^2cos^2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \Rightarrow A = 2A_1cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)$$

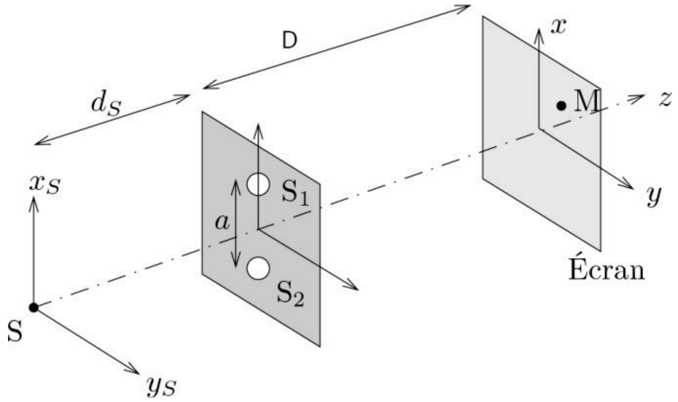
Soit $s(t) = s_1(t) + s_2(t) = A\left(\cos(\omega t + \varphi_1) + A\cos(\omega t + \varphi_2)\right)$

$$= 2Acos\left(\frac{2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)$$

$$car\ cosp + cosq = 2cos\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$D'où\ s(t) = \underbrace{2Acos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)}_{A}\cos(\omega t + \varphi_m)$$

OP32 – Interférences



Soit :

$$I(M) = K\left(\underline{s}\,\underline{s}^*\right)$$
$$= K\left(a_1 e^{j\left(\omega t - \varphi_1(x)\right)} + a_2 e^{j\left(\omega t - \varphi_2(x)\right)}\right)\left(a_1 e^{-j\left(\omega t - \varphi_1(x)\right)} + a_2 e^{-j\left(\omega t - \varphi_2(x)\right)}\right)$$
$$= Ka_1^2 + Ka_2^2 + Ka_1a_2\left(e^{j\left(\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right)} + e^{-j\left(\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right)}\right)$$
$$= Ka_1^2 + Ka_2^2 + 2Ka_1a_2\cos\left(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right)$$

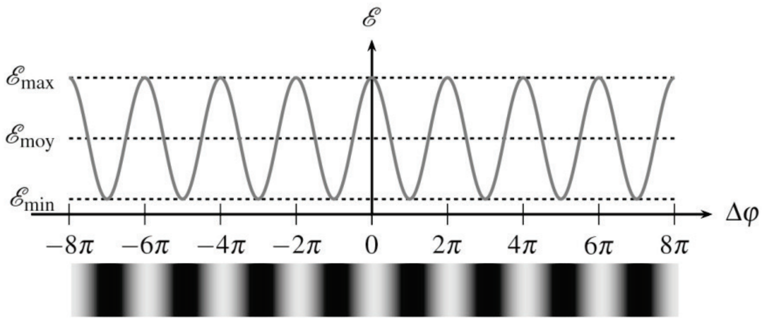
D'où

$$I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(\Delta\varphi(M)\right)$$

2°)
Or :

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\ et\ I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

Tel que :



3°) On a : $C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2(I_1 + I_2)}$

Or : $C = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2(I_1+I_2)} = 2\,\frac{\sqrt{u}}{1+u}$ où $u = \frac{I_2}{I_1}$

D'où :

$$C'(u) = \frac{2\left[\frac{1}{2\sqrt{u}}(1+u) - \sqrt{u}\right]}{(1+u)^2} = \frac{2\left[\frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{\sqrt{u}}{2}\right]}{(1+u)^2} = \frac{\sqrt{u}\left[\frac{1}{u} - 1\right]}{(1+u)^2}$$

Donc C est extrêmal pour u=1

4°) On a : $\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$

5°) Soit : $\delta = (S_2M) - (S_1M)$

Or :

$$\begin{cases} S_2M = \sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + y^2} = D\sqrt{1+\frac{y^2}{D^2}+\left(\frac{x}{D}+\frac{a}{2D}\right)^2} \\ S_1M = \sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + y^2} = D\sqrt{1+\frac{y^2}{D^2}+\left(\frac{x}{D}-\frac{a}{2D}\right)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S_2M \sim D\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{ax}{D^2}+\frac{y^2}{D^2}+\frac{a^2}{4D^2}+\frac{x^2}{D^2}\right)\right) \\ S_1M \sim D\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{ax}{D^2}+\frac{y^2}{D^2}+\frac{a^2}{4D^2}+\frac{x^2}{D^2}\right)\right) \end{cases}$$

Donc :

$$\delta \sim D \times \frac{ax}{D^2}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{ax}{D}$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax}{D}$$

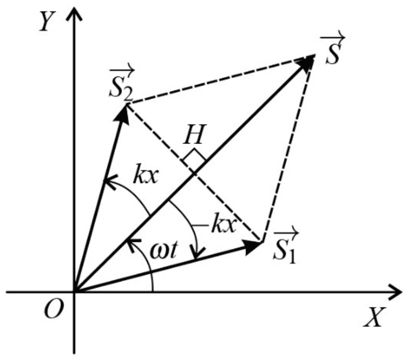
$$\Rightarrow I(M) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax}{D}\right)\right)$$

B – Exercices supplémentaires

OP33 – Superposition d'ondes

1. Les vecteurs de Fresnel associés à $s_1(x,t)$ et $s_2(x,t)$ sont représentés ci-contre, pour une valeur quelconque de x.
On a : $\|\overrightarrow{S_1}\| = \|\overrightarrow{S_2}\| = A_0$.
Le signal $s(x,t)$ est associé à $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2}$ et son amplitude est :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{S}\| &= 2OH \\ &= 2\|\overrightarrow{S_1}\||\cos(kx)| = 2A_0|\cos(kx)|.\end{aligned}$$



La figure ci-dessous montre les cas où l'amplitude du signal somme est maximale ou nulle.
Elle est maximale quand les vecteurs de Fresnel sont colinéaires, c'est-à-dire quand :

$$kx = 2n\pi \quad \text{ou} \quad kx = (2n+1)\pi,$$

soit quand :

$$x = n\lambda \quad \text{ou} \quad x = (n+\frac{1}{2})\lambda.$$

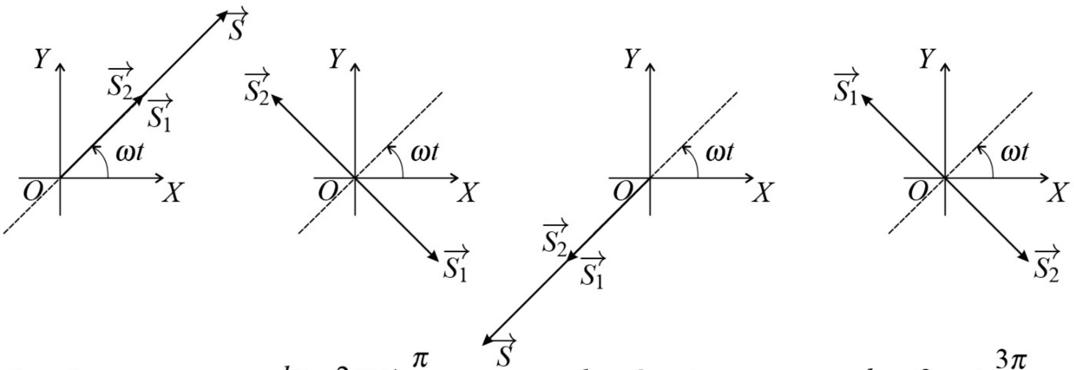
Elle est nulle si :

$$kx = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad kx = 2n\pi + \frac{3\pi}{2},$$

soit si :

$$x = n\lambda + \frac{\lambda}{4} \quad \text{ou} \quad x = n\lambda + \frac{3\lambda}{4}$$

.

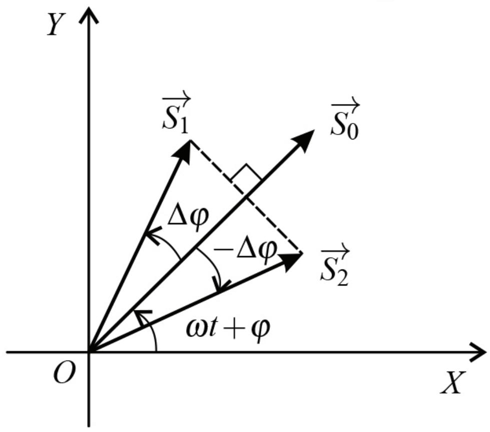


$kx = 2n\pi$ $kx = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ $kx = 2n\pi + \pi$ $kx = 2n\pi + \frac{3\pi}{2}$

2. Les vecteurs de Fresnel associés aux signaux $s_0(x,t)$, $s_1(x,t)$ et $s_2(x,t)$ sont disposés comme indiqué sur la figure. Le signal somme $s = s_0 + s_1 + s_2$ a pour amplitude :

$$A = \|\overrightarrow{S}\| = A_0 + 2rA_0\cos(\Delta\varphi).$$

La valeur maximale de A est $A_0(1+2r)$ et la valeur minimale $A_0|1-2r|$.



OP34 – Tube de Kundt

1. $p_{\mathrm{HP}}(x,t) = A_0 \cos(2\pi f t + kx)$ puisque cette onde se propage dans le sens négatif de (Ox).
2. $p_r(x,t) = rA_0 \cos(2\pi f f - kx + \varphi)$.
3. Le déphasage des deux ondes à l'abscisse x est : $\Delta\varphi(x) = \varphi - 2kx$. D'après la formule des interférences à deux ondes, l'amplitude en x de l'onde résultante est :

$$A(x) = \left(A_0^2 + r^2A_0^2 + 2rA_0^2\cos(\Delta\varphi(x))\right)^{\frac{1}{2}} = A_0\left(1 + r^2 + 2r\cos(\varphi - 2kx)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

4. **a.** $\alpha = \dfrac{V_{\max}}{V_{\min}} = \dfrac{A_{\max}}{A_{\min}} = \dfrac{1+r}{1-r}$. Cette relation s'inverse en : $r = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$.

b. Le premier minimum correspond à : $2kx - \varphi = \pi$, soit : $\varphi = \pi\left(\dfrac{4x_1}{\lambda} - 1\right)$.

c. L'application numérique donne :

f en Hz	460	750	845	1016	1042	1185	1400
r	0,639	0,662	0,669	0,670	0,678	0,663	0,669
ϕ	$-0,64\pi$	$-0,71\pi$	$-0,74\pi$	$-0,76\pi$	$-0,78\pi$	$-0,81\pi$	$-0,85\pi$

Le module du coefficient de réflexion dépend peu de la fréquence alors que sa phase augmente en valeur absolue avec la fréquence.

OP35 - Accord d'un piano

1. La dimension de la célérité est : $[c] = \mathrm{L.T^{-1}}$. Les dimensions des paramètres de la formule sont : $[\rho] = \mathrm{M.L^{-3}}$, $[d] = \mathrm{L}$ et $T = \mathrm{M.L.T^{-2}}$ (ceci se retrouve à partir du principe fondamental de la dynamique). Par suite :

$$[K\rho^\alpha d^\beta T^\gamma] = \mathrm{M}^{\alpha+\gamma}.\mathrm{L}^{-3\alpha+\beta+\gamma}.\mathrm{T}^{-2\gamma}.$$

La formule est homogène si et seulement si :

$$\alpha + \gamma = 0, \quad -3\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad \text{et} \quad -2\gamma = -1.$$

On en tire : $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $\beta = -1$ et $\gamma = \dfrac{1}{2}$. Et finalement : $c = K\dfrac{T^{\frac{1}{2}}}{\rho^{\frac{1}{2}}d}$.
Il est intuitif que c augmente avec la tension de la corde et diminue avec sa masse volumique et son diamètre.

2. **a.** On sait que la fréquence fondamentale d'une corde de longueur L, le long de laquelle les vibrations se propagent avec la célérité c est : $f_1 = \dfrac{c}{2L}$. c étant proportionnelle à $\sqrt{T}$ il en est de même pour f_1.

b. La fréquence des battements est égale à la différence de fréquence des deux vibrations. La plus petite fréquence de battement que l'on perçoit est, d'après l'énoncé : $\dfrac{1}{5\mathrm{s}} = 0{,}2$ Hz. Ainsi, la méthode permet d'égaliser les fréquences à 0,2 Hz près. Pour une fréquence de 440 Hz cela fait une précision relative de $\dfrac{0,2}{440} = 4,5.10^{-4}$.

c. Puisque $f_1 \propto T^{\frac{1}{2}}$, les variations relatives de ces grandeurs vérifient : $\dfrac{\Delta f_1}{f_1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta T}{T}$.
La précision relative sur T est donc : $\dfrac{\Delta T}{T} = 2 \times 4,5.10^{-4} = 9.10^{-4} \simeq 0,1\%$.

OP36 - Ecoute musicale et interférences

1. a. L'onde réfléchie parcourt en plus deux fois la distance D entre l'auditeur et le mur donc : $\tau = \dfrac{2D}{c}$.

b. C'est la seule cause de décalage entre les deux ondes puisque la réflexion sur le mur ne s'accompagne d'aucun déphasage. L'onde réfléchie présente donc par rapport à l'onde directe le déphasage : $\Delta\varphi = 2\pi f \tau = \dfrac{4\pi f D}{c}$.

c. Il peut y avoir atténuation de l'amplitude si les deux ondes sont en opposition de phase et ont une interférence destructrice. C'est le cas si :

$$\Delta\varphi = (2n+1)\pi \quad \text{soit} \quad f = (2n+1)\frac{c}{4D},$$

où n est un entier.
Le domaine audible s'étend de 20 Hz à 20 kHz. Aucune des fréquences précédentes ne se trouve dans le domaine audible si : $\dfrac{c}{4D} > 20$ kHz. Il faut pour cela que $D < \dfrac{342}{4 \times 20} = 4{,}3mm$.
Il faut que la tête de l'auditeur frôle le mur !

d. Pour D suffisamment grand, l'onde réfléchie par le mur a une amplitude très faible devant l'onde directe.

2. a. L'amplitude est maximale dans le cas d'une interférence constructrice et elle vaut $2A_0$. Sa valeur en décibels est :

$$A_{\text{dB}} = 20\log\frac{2A_0}{A_{\text{ref}}} = 20\log\frac{A_0}{A_{\text{ref}}} + 20\log 2 = A_{0,\text{dB}} + 6.$$

Sur la courbe l'amplitude maximale observée est 97dB, donc $A_{0,\text{dB}} \geq 91$dB.

b. L'écart moyen entre les fréquences pour lesquelles l'amplitude mesurée est minimale est $\Delta f = 2049$ Hz. D'après ce qui précède, $\Delta f = \dfrac{c}{4D}$, soit :

$$D = \frac{c}{4\Delta f} = \frac{342}{4 \times 20149} = 4,2,10^{-2}\text{ m}.$$

OP37 - Anharmonicité d'une corde de piano

1°) *Soit* $c = \dfrac{[\omega]}{[k]}$ donc c est une vitesse

Le terme sous la racine est sans dimension donc α à la dimension de $\frac{1}{k^2}$ soit $[\alpha] = T^2$

2. Les extrémités de la corde sont fixes donc sont des nœuds de vibration. Par suite, la longueur L de la corde est un multiple de la demi-longueur d'onde :

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} = n\frac{\pi}{k} \quad \text{soit} \quad k_n = \frac{n\pi}{L}.$$

En reportant dans la relation donnée par l'énoncé on trouve : $\omega_n = \dfrac{n\pi c}{L}\sqrt{1+\alpha\dfrac{n^2\pi^2}{L^2}}$. Finalement, la fréquence du mode propre d'ordre n est :

$$f_n = \frac{nc}{2L}\sqrt{1+\alpha\frac{n^2\pi^2}{L^2}}.$$

3. La raideur de la corde fait que les fréquences f_n ne sont pas des multiples entiers de la fréquence fondamentale f_1. Ceci altère la qualité du son. Le terme lié à la raideur est divisé par L^2 : il diminue si les cordes sont plus longues.