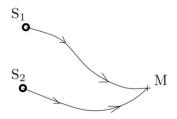
OP3 – Superposition d'ondes lumineuses

1.2. Superposition d'ondes lumineuses		
Superposition de deux ondes quasi- monochromatiques non synchrones ou incohérentes entre elles.	Justifier et utiliser l'additivité des intensités.	On démontrera Fresnel pour commencer
Superposition de deux ondes quasi- monochromatiques cohérentes entre elles : formule de Fresnel.	Établir la formule de Fresnel. Identifier une situation de cohérence entre deux ondes et utiliser la formule de Fresnel.	
Contraste.	Associer un bon contraste à des ondes d'intensités voisines.	
Superposition de N ondes quasimonochromatiques cohérentes entre elles, de même amplitude et dont les phases sont en progression arithmétique dans le cas $N >> 1$.	Expliquer qualitativement l'influence de N sur l'intensité et la finesse des franges brillantes observées. Établir, par le calcul, la condition d'interférences constructives et la demi-largeur $2\pi/N$ des franges brillantes. Établir et utiliser la formule indiquant la direction des maxima d'intensité derrière un réseau de fentes rectilignes parallèles.	

I – Superposition de deux ondes lumineuses

I-1) Cas général



Supposons deux sources lumineuses et utilisons l'additivité des vibrations :

$$s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t)$$

$$avec \begin{cases} s_1(M,t) = A_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \\ s_2(M,t) = A_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \end{cases}$$

D'où l'éclairement :

$$\varepsilon(M) = K\langle s^2(M) \rangle = K(\langle s_1^2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle + 2 \langle s_1 s_2 \rangle)$$

Or:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = K < s_1^2 > = \frac{KA_1^2}{2} \\ \varepsilon_2 = K < s_2^2 > = \frac{KA_2^2}{2} \end{cases}$$

Et:

$$2K\langle s_1 s_2 \rangle = 2KA_1A_2 \langle \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M))\cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle$$
Or: $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

$$\Rightarrow 2K\langle s_1 s_2 \rangle$$

$$= KA_1A_2\langle\cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M))$$

$$+ \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M))\rangle$$

Or $\langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = 0$ si $\omega \neq 0$, par conséquent :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_{12}$$
où $\varepsilon_{12} = 2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} < \cos\left((\omega_1 - \omega_2)t - (\varphi_1(M) - \varphi_2(M))\right) >$

La superposition de deux ondes lumineuses produit un éclairement :

 $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_{12}$ où $\varepsilon_{12} =$ terme d'interférences

On dit que les deux ondes sont cohérentes si leur superposition conduit à un terme d'interférences non nul : $\varepsilon_{12} \neq 0$, sinon elles sont incohérentes.

I-2) Notion de cohérence

a) Cohérence temporelle

Si $\omega_1 - \omega_2 \neq 0$, le terme dit d'interférences est nul et on a :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Condition de cohérence temporelle :

Il n'y a pas d'interférences entre deux ondes de pulsations différentes. Elles sont incohérentes et leurs éclairements (ou intensités lumineuses) s'ajoutent :

$$\begin{cases} \varepsilon(M) = \varepsilon_1(M) + \varepsilon_2(M) \\ I(M) = I_1(M) + I_2(M) \end{cases}$$

- b) Importance de la polarisation
- Si on note $\overline{E(M,t)}$ au lieu de s(M,t) on remarque que le terme d'interférence est nul si les deux ondes sont de polarisations orthogonales : $2K < \overline{E_1}.\overline{E_2} > = 0$.

Cohérence de polarisation :

Deux ondes de polarisations orthogonales sont incohérentes et ne donnent pas lieu à des interférences.

c) Sources synchrones

Supposons $\omega_1 - \omega_2 = 0$ alors le terme d'interférence s'écrit :

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1I_2} < cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) >$$

Or:

$$\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = k((S_2M) - (S_1M)) + \varphi_{S_2} - \varphi_{S_1}$$

Cependant $\varphi_{S_2} - \varphi_{S_1}$ varie de manière aléatoire et cela conduit à une valeur moyenne nulle. Pour qu'il n'en soit pas ainsi, il faudrait pouvoir synchroniser les deux sources. Dans la pratique, on ne sait pas synchroniser deux sources lumineuses (on sait le faire avec des émetteurs radio). Pour parvenir au résultat recherché, on engendre deux trains d'onde à partir d'un seul provenant d'un point unique d'une source lumineuse.

Sources synchrones:

Pour que deux ondes lumineuses puissent interférer, il faut qu'elles proviennent du même point d'une source lumineuse. On parle d'ondes synchrones.

d) Longueur de cohérence

Comme il n'est pas possible de faire interférer deux sources distinctes, il faut réaliser deux sources S_1 et S_2 « jumelles » pour espérer observer des interférences. Les dispositifs interférentiels que nous étudierons permettent en quelque sorte de « cloner » une source primaire S en deux sources secondaires S_1 et S_2 , dites mutuellement cohérentes, qui délivrent la même séquence de trains d'ondes.

Les figures suivantes donnent une illustration simplifiée de la situation envisagée selon que : $\delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$ soit supérieure ou inférieure à la longueur de cohérence l_c , qui, rappelons-le, correspond à l'extension spatiale moyenne d'un train d'ondes.

Dans le cas où $\delta < l_c$, on constate qu'au point M se superposent un train d'ondes issu de S_1 et sa réplique issue de S_2 . Les deux ondes qui se superposent en M sont synchrones : le déphasage entre les deux ondes est constant. Les sources sont mutuellement cohérentes.

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}} = \mathcal{C}^{\mathsf{T}}$$
 $\mathcal{L}_{\mathcal{C}} = \mathcal{C}^{\mathsf{T}}$ $\mathcal{L}_{\mathcal{C}} = \mathcal{C}^{\mathsf{T}}$

Dans le cas où $\delta > l_c$, on constate qu'au point M se superposent un train d'ondes issu de S_1 et un train d'ondes différent issu de S_2 .

On se retrouve dans la situation de deux sources distinctes : le terme d'interférences est nul. Les sources ne sont plus mutuellement cohérentes.

$$C_c = CT$$

Superposition d'un train d'onde issue de S_1 et d'un train d'onde différent issue de S_2

Dans le cas intermédiaire, les deux trains d'ondes issus d'un même train d'ondes primaires ne se superposent que partiellement en M. Les deux ondes sont partiellement cohérentes. Les interférences existent mais avec un contraste plus faible.

I-3) Formule de Fresnel

Si les vibrations lumineuses vérifient les conditions de cohérence :

- Cohérence temporelle : $\omega_1 = \omega_2$
- Sources synchrones (Cohérence de phase) : $\varphi_{S_2} = \varphi_{S_1}$
- Sources mutuellement cohérentes : $\delta\!(M) \ll l_c$
- Cohérence de polarisation : $\overrightarrow{E_{01}}$. $\overrightarrow{E_{02}} \neq 0$ Alors l'intensité au point M est donnée par la formule de Fresnel :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta \varphi(M))$$

Avec:

$$\Delta \varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} [(S_2 M) - (S_1 M)]$$

Laurent Pietri $\sim 5 \sim$ Lycée Joffre - Montpellier

I-4) Interférences constructives et destructives

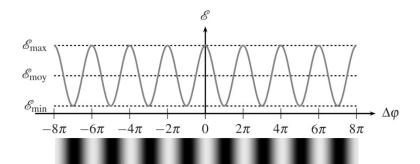
Interférences constructives	Interférences destructives	
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	
Les deux ondes arrivent en phase d'où : $ \Delta \varphi(M) = 2m\pi \\ et \ \delta(M) = m\lambda $ Avec : $ I = I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} $	Les deux ondes arrivent en opposition de phase d'où : $ \varDelta \varphi(M) = \left(m + \frac{1}{2}\right) 2\pi $ $ et \ \delta(M) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda $	
Le point M est brillant, on parle de franges brillantes	Avec : $I = I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2}$ Le point M est sombre, on parle de franges sombres	

Le rapport $p = \frac{\Delta \varphi(M)}{2\pi} = \frac{\delta(M)}{\lambda}$ est appelée ordre d'interférence, il est entier dans le cas des interférences constructives et demi-entier dans les cas des interférences destructives.

I-5) Figures d'interférences

a) Interfrange

Le déphasage $\Delta \varphi(M)$ dépend de la position du point M. Si on observe l'éclairement sur un écran plan il va y avoir alternance des franges brillantes et sombres. Le long d'une frange l'ordre p est contant, les franges sont donc des lignes équiphases. (Le déphasage entre les ondes qui se superposent y est constant)



On appelle interfrange la distance entre deux franges successives de même nature correspondant à $\Delta p=1$.

b) Contraste

Le contraste est par définition :
$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Démontrons qu'il est maximal pour $I_2 = I_1 = I_0$:

On a:

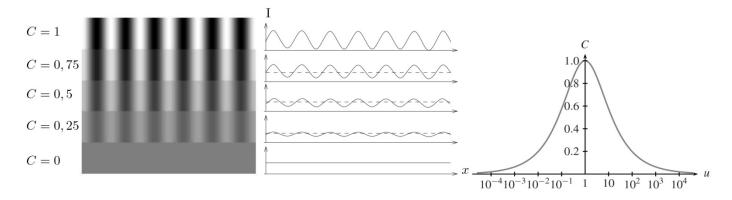
$$C = \frac{4\sqrt{I_1I_2}}{2(I_1 + I_2)} = 2\frac{\sqrt{u}}{1+u} \text{ où } u = \frac{I_2}{I_1}$$

Or:

$$C'(u) = \frac{2\left[\frac{1}{2\sqrt{u}}(1+u) - \sqrt{u}\right]}{(1+u)^2} = \frac{2\left[\frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{\sqrt{u}}{2}\right]}{(1+u)^2} = \frac{\sqrt{u}\left[\frac{1}{u} - 1\right]}{(1+u)^2}$$

Donc C est extrêmal pour u=1 : c'est un maximum et il vaut 1. L'expression de I se simplifie en :

$$Si\ I_1 = I_2 = I_0:\ I(M) = 2I_0(1 + \cos(\Delta \varphi(M)))$$



II – Superposition de N Ondes lumineuses

II-1) Vibration lumineuse résultante

Nous supposons que :

- Les N ondes qui viennent interférer en M sont émises par N sources $S_1, S_2,..., S_p,..., S_N$.
- La différence de phase en M des ondes émises par les sources S_{p+1} et S_p est une constante :

$$\varphi_{p+1}(M) - \varphi_p(M) = \varphi$$

- Les N ondes ont la même amplitude au point M.

Dans ces conditions, la vibration lumineuse rayonnée par la source S_p (et S_{p+1}) s'écrit au point M ainsi :

$$\begin{cases} \underline{s}_{p}(M,t) = s_{0}e^{i\left(\omega t - \varphi_{p}(M)\right)} \\ \underline{s}_{p+1}(M,t) = s_{0}e^{i\left(\omega t - \varphi_{p+1}(M)\right)} = \underline{s}_{p}(M,t)e^{-i\varphi} \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \underline{s}_{2}(M,t) = \underline{s}_{1}(M,t)e^{-i\varphi} \\ \underline{s}_{p}(M,t) = \underline{s}_{1}(M,t)e^{-i(p-1)\varphi} \end{cases}$$

Donc:

$$\underline{s}(M,t) = \sum_{p=1}^{N} \underline{s}_{1}(M,t)e^{-i(p-1)\varphi}$$

Il s'agit d'une progression géométrique d'où:

$$\underline{s}(M,t) = \underline{s}_1(M,t) \frac{1 - e^{-iN\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}}$$

II-2) Intensité lumineuse résultante

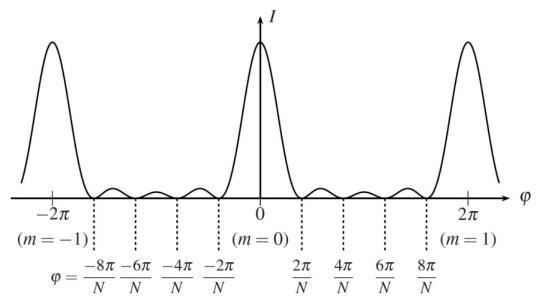
Par conséquent : $I(M,t) = \frac{1}{2}Re(\underline{s}\underline{s}^*)$

$$I(M,t) = I_1 \left(\frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right)^2 \ avec \ I_{max} = N^2 I_1$$

D'où:

$$\frac{I(M,t)}{I_{max}} = \left(\frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right)^{2}$$

Dont le tracé est donné ci-dessous

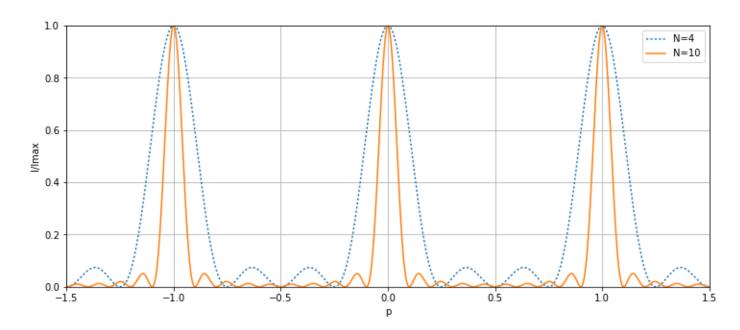


II-3) Utilisation de python

A l'aide d'un programme python, on va étudier l'influence de

N:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def I(N,p):
   phi=2*np.pi*p
   A=np.sin(N*phi/2)/(N*np.sin(phi/2))
   return A*A
p = np.linspace(-3,3,5000)
I1 = I(4,p)
I2=I(10,p)
plt.figure(figsize=(12,5))
plt.plot(p,I1,':',label="N=4")
plt.plot(p,I2,'-',label="N=10")
plt.xlabel("p")
plt.ylabel('I/Imax')
plt.legend()plt.axis([-3,3,0,1])
plt.grid()
plt.show()
```



On remarque ainsi:

- La représentation de I fait apparaître une série de pics, au centre desquels I prend sa valeur maximale.
- Chacun de ces pics correspond à une frange brillante correspondant à des interférences totalement constructives.
- On voit aussi apparaître des annulations de l'éclairement : ce sont les franges sombres qui correspondent aux interférences totalement destructives.
- On voit aussi apparaître des franges secondaires, moins brillantes, correspondant à des interférences partiellement constructives. Mais ces franges secondaires deviennent de moins en moins visibles au fur et à mesure que N augmente.

On constate les franges brillantes sont d'autant plus fines que N est grand. On dit que la finesse des franges les plus brillantes augmente avec N

II-4) Finesse

On définit la demi-largeur d'une frange brillante comme la largeur d'un pic secondaire :

$$\delta \varphi_{1/2} = \frac{2\pi}{N}$$

La largeur $\delta \phi$ du pic principal vérifie :

$$\delta \varphi = \frac{2\pi}{N} - \left(-\frac{2\pi}{N} \right) = 2\delta \varphi_{1/2} = \frac{4\pi}{N}$$

La finesse ${\mathcal F}$ d'un pic est définie comme étant le rapport :

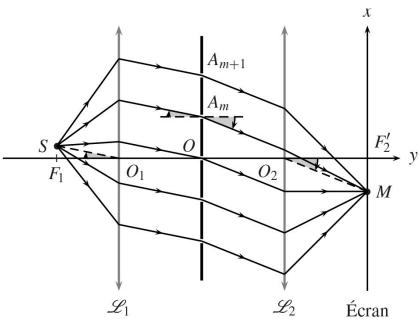
$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{\delta\varphi} = \frac{N}{2}$$

La finesse des pics croît avec N. Cette propriété importante est mise à profit pour faire de la spectroscopie (par réseau...), c'est-à-dire pour mesurer des longueurs d'onde comme nous le verrons ultérieurement.

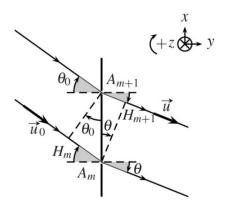
II-5) Le réseau

a) Montage de Fraunhofer

On considère un ensemble de N trous d'Young équidistants, dans la configuration du montage de Fraunhofer. On suppose que la source ponctuelle, émet une radiation monochromatique de longueur d'onde λ .



b) Différence de marche



Le plan orthogonal aux rayons incidents sur le plan des trous d'Young et contenant les points H_m et A_{m+1} est un plan d'onde relativement à la source S.

Le plan orthogonal aux rayons émergents et qui contient les points H_{m+1} et A_m est un plan d'onde relativement à une source fictive qui serait placée en M.

D'où la différence de marche :

$$\delta(M) = (H_{m+1}A_{m+1}) - (H_mA_m)$$

$$\Leftrightarrow \delta(M) = na\sin(\theta_p) - nasin(\theta_0)$$

Pour le réseau par transmission on a donc :

- Différence de marche : $\delta(M) = na\left(sin(\theta_p) sin(\theta_0)\right)$
- Différence de phase : $\Delta \varphi(M) = \frac{2\pi na}{\lambda_0} \left(sin(\theta_p) sin(\theta_0) \right)$
- Ordre d'interférences : $p(M) = \frac{na}{\lambda_0} \left(sin(\theta_p) sin(\theta_0) \right)$
- c) Interférences constructives

Les maximas d'éclairement correspondent aux cas où p est un entier donc :

L'éclairement est maximal si on vérifie :

$$sin(\theta_p) - sin(\theta_0) = p \frac{\lambda_0}{na}$$
 où p entier

d) Réseau par réflexion

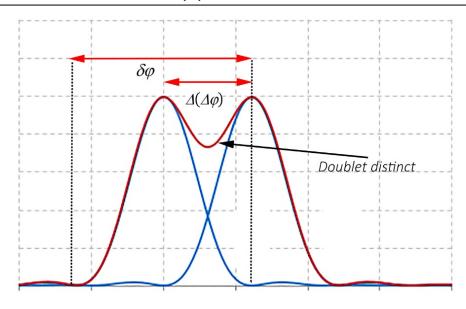
L'éclairement est maximal si on vérifie :

$$sin(\theta_{p}) + sin(\theta_{0}) = p \frac{\lambda_{0}}{na}$$
 où p entier

e) Critère de Rayleigh

Le critère de Rayleigh impose, afin de bien visualiser les pics de « diffraction » que :

$$\Delta(\Delta\varphi) \ge \delta\varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{N}$$



f) Pouvoir de résolution

On définit le pouvoir de résolution par :

$$P_R = \frac{\lambda}{\delta \lambda_{min}}$$

Où $\delta \lambda_{min}$ est la différence minimale de longueurs d'onde que le système arrive à séparer.

Une raie spectrale de longueur d'onde λ est déviée d'un angle θ_p telle que :

$$sin(\theta_{\rm p}) - sin(\theta_{\rm 0}) = p \frac{\lambda_{\rm 0}}{na}$$

Ainsi:

$$\begin{cases} sin(\theta_{p,1}) - sin(\theta_{0}) = p \frac{\lambda_{1}}{na} \\ sin(\theta_{p,2}) - sin(\theta_{0}) = p \frac{\lambda_{2}}{na} \end{cases}$$
$$\Rightarrow sin(\theta_{p,2}) - sin(\theta_{p,1}) = p \frac{\lambda_{2} - \lambda_{1}}{na} = p \frac{\delta \lambda}{na}$$

Pour la partie pic principal-première annulation on vérifie :

$$sin(\theta_{\max,1}) - sin(\theta_{\min,1}) = \Delta p \times \frac{\lambda_1}{na} \text{ où } \Delta p = \frac{1}{N}$$
$$\Rightarrow sin(\theta_{\max,1}) - sin(\theta_{\min,1}) = \frac{\lambda_1}{Nna}$$

$$Or: \Delta(\Delta \varphi) \ge \delta \varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{\delta \varphi}{2}$$

$$\Rightarrow sin(\theta_{p,2}) - sin(\theta_{p,1}) > sin(\theta_{max,1}) - sin(\theta_{min,1})$$

$$\Rightarrow p \frac{\delta \lambda}{na} > \frac{\lambda_1}{Nna}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta \lambda}{\lambda_1} \ge \frac{1}{pN}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{\delta \lambda} \le pN$$

Par conséquent le pouvoir de résolution s'écrit :

$$P_R = \frac{\lambda}{\delta \lambda_{min}} = pN$$

Le pouvoir de résolution d'un doublet peut s'écrire :

$$P_R = \frac{\lambda}{\delta \lambda_{min}} = pN$$