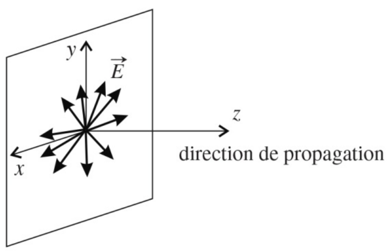
OP2 - Modèle scalaire des ondes lumineuses

1.1. Modèle scalaire des ondes lumineuses		
Modèle de propagation dans l'approximation de l'optique géométrique. Vibration lumineuse.	Associer la grandeur scalaire de l'optique à une composante d'un champ électrique.	
Chemin optique. Déphasage dû à la propagation.	Exprimer le retard de phase en un point en fonction de la durée de propagation ou du chemin optique.	
Modèle d'émission. Largeur spectrale. Cohérence temporelle.	Classer différentes sources lumineuses (lampe spectrale basse pression, laser, source de lumière blanche…) en fonction du temps de cohérence de leurs diverses radiations. Citer quelques ordres de grandeur des longueurs de cohérence temporelle associées à différentes sources. Relier, en ordre de grandeur, le temps de cohérence et la largeur spectrale de la radiation considérée.	
Réception d'une onde lumineuse. Récepteurs. Intensité lumineuse.	Comparer le temps de réponse d'un récepteur usuel (œil, photodiode, capteur CCD) aux temps caractéristiques des vibrations lumineuses. Relier l'intensité lumineuse à la moyenne temporelle du carré de la grandeur scalaire de l'optique. **Mettre en œuvre un capteur optique.**	On verra le capteur optique en TP dans l'acquisition d'interfranges.

I – Le modèle scalaire de la lumière

I-1) Structure de l'onde lumineuse

L'électromagnétisme nous apprend que la lumière est une onde électromagnétique. Une onde électromagnétique se compose de deux champs de vecteurs couplés, le champ électrique et le champ magnétique. Dans le cas d'une onde plane, ces vecteurs sont perpendiculaires entre eux et à la direction de propagation que nous supposerons être celle du vecteur $\overrightarrow{u_z}$.



Dans le cas de la lumière naturelle, la direction du champ électrique change de manière aléatoire au cours du temps ; la durée moyenne entre deux changements est le temps de cohérence. Ce temps τ_c est extrêmement bref par rapport à la durée d'une expérience. Ainsi il n'est pas possible d'attribuer une direction au champ électrique.

On dit que la lumière naturelle est non polarisée.

On s'aperçoit que l'on ne peut pas définir de direction de polarisation de l'onde. Il sera donc judicieux de caractériser l'onde par une grandeur scalaire.

I-2) Modélisation de l'onde lumineuse

Pour une lumière non polarisée, les deux composantes Ex et Ey du champ électrique dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation sont parfaitement équivalentes.
On appelle vibration lumineuse une composante quelconque du champ électrique par rapport à un axe perpendiculaire à la direction de propagation.

On la notera :

$$s(M,t) = A(M)\cos\big(\omega t - \varphi(M)\big)$$

$$où \begin{cases} A(M)\ amplitude\ de\ la\ vibration\ au\ point\ M \\ \varphi(M)\ phase\ initiale\ de\ l'onde\ au\ point\ M \\ \omega\ la\ pulsation\ de\ l'onde \end{cases}$$

La vibration lumineuse se propage dans les milieux transparents, le long des rayons lumineux, à la vitesse $v = \frac{c}{n}$.

Si plusieurs vibrations $s_i(M,t)$ se propagent simultanément dans l'espace, chacune se propage comme si elle était seule et la vibration résultante en un point M est :

$$s(M,t) = \sum_i s_i(M,t)$$

II – Eclairement et intensité lumineuse

II-1) Les récepteurs

Les récepteurs sont caractérisés par leur temps de réponse τ qui est le temps minimum qui doit séparer deux signaux pour qu'ils soient perçus individuellement.

Récepteurs	Temps de réponse
Œil	$0{,}04s$ à $0{,}1s$
Pellicule photographique	Durée d'exposition : 10^{-4} à $10^{-2}s$ ($ou\ plus$)
Photodiode	$10^{-6}s$
Photorésistance	$10^{-2}s$
Thermopile	$1s$
Capteur CCD	$10^{-2}s$

Le choix du récepteur est aussi lié à sa sensibilité, par exemple celle de la photodiode est de $0{,}1A\,W^{-1}$ alors que pour la photorésistance, elle est de $100A\,W^{-1}$

II-2) Eclairement (Intensité lumineuse)

Les photorécepteurs sont sensibles à la valeur moyenne temporelle de la puissance lumineuse captée sur leur surface pendant leur temps de réponse qui est beaucoup plus long que la période de vibration de l'onde lumineuse.

On appelle éclairement la puissance lumineuse surfacique moyenne reçue par une surface :

$$\underbrace{\varepsilon(M)}_{Wm^{-2}\,ou\,lux} = K\langle s(M,t)^2\rangle$$

où K est une constante positive.

On parle aussi d'intensité vibratoire telle que :

$$I(M) = \langle s(M,t)^2\rangle$$

Dans la suite du cours d'optique, la valeur de K ne sera pas utilisée. On n'interprétera que l'éclairement relatif $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ où ε_0 est un éclairement de référence.

Si l'observation se fait sur un écran, on considère que chaque point de l'écran se comporte comme une source lumineuse secondaire, renvoyant une intensité proportionnelle à l'éclairement reçu.

On parle donc d'éclairement ou d'intensité I(M) émise par un point de M de l'écran, seule la constante K change.

II-3) Lumière monochromatique

a) Notation complexe

On représente la vibration lumineuse monochromatique par la vibration complexe :

$$\underline{s}(M,t) = A(M)e^{i(\omega t-\varphi(M))}$$

On définit l'amplitude complexe par :

$$\underline{s}(M,t) = \underline{a}(M)e^{i\omega t} \text{ où } \underline{a}(M) = A(M)e^{-i\varphi(M)}$$

b) Expression de l'éclairement

L'éclairement s'écrit en lumière monochromatique :

$$\varepsilon(M) = K\langle s(M,t)^2\rangle = K\langle A(M)^2 \cos^2(\omega t - \varphi(M))\rangle$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(M) = \frac{KA(M)^2}{2}$$

L'éclairement (et l'intensité lumineuse) sont donc proportionnels au carré de l'amplitude de la vibration.

En notation complexe obtient l'éclairement par l'une des formules suivantes :

$$\varepsilon(M) = \frac{1}{2}K\left|\underline{a}(\mathrm{M})\right|^2 \; ou \; \varepsilon(M) = \frac{1}{2}K\left|\underline{s}(\mathrm{M,t})\right|^2$$

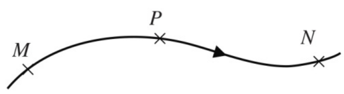
> En lumière monochromatique l'éclairement s'exprime par :
>
> $$\varepsilon(M) = \frac{1}{2}K\left|\underline{a}(M)\right|^2 = \frac{1}{2}KA(M)^2$$

III - Chemin optique

III-1) Définition

a) Milieu homogène

On a vu que la vibration lumineuse se propage le long des rayons lumineux. Considérons un rayon lumineux passant par M puis par N.



> Le chemin optique parcouru par la lumière entre M et N est par définition :
>
> $$(MN) = \; c * t_{MN}$$

Si le milieu est homogène, on a :

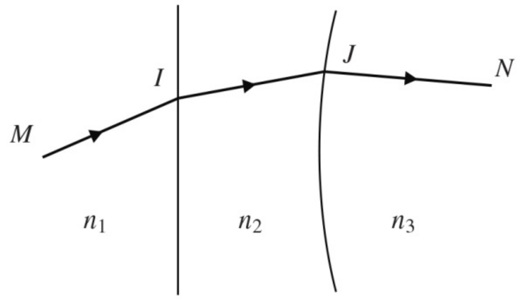
$$t_{MN} = \frac{l_{MN}}{v} \Rightarrow (MN) = c\frac{l_{MN}}{v}$$

$$\Rightarrow (MN) = n\, l_{MN}$$

que l'on nomme aussi épaisseur optique

Dans le cas de différents milieux d'indice différent :

$$(MN) = (\mathrm{MI}) + (\mathrm{IJ}) + (\mathrm{JN}) = n_1 MI + n_2 IJ + n_3 JN$$



b) Milieu non homogène

Dans ce cas les rayons ne se propagent plus en ligne droite et le chemin optique se définit par :

$$(MN) = \int_M^N n\, ds$$

où s représente l'abscisse curviligne.

III-2) Retard de phase associée

Lors de se propagation de M à N, l'onde subit un retard de phase :

$$\varphi_{\mathrm{MN}} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(\mathrm{MN}) = \frac{2\pi}{\lambda_0} nMN = \frac{2\pi}{\lambda_n} MN$$

Le retard de phase accumulé par la vibration lumineuse croît proportionnellement au chemin optique qu'elle parcourt selon la relation :

$$\varphi_N - \varphi_M = \frac{2\pi}{\lambda_0}(MN) = \frac{2\pi}{\lambda_n} MN$$

λ_0 : longueur d'onde dans le vide

λ_n : longueur d'onde dans un milieu d'indice n

Cependant lors d'une réflexion sur une surface métallique il faudra rajouter un déphasage de π :

$$\varphi_N = \varphi_M + \frac{2\pi}{\lambda_0}(MN) + \varphi_{Réflexion}$$

III-3) Différence de marche

On appelle différence de marche entre deux points M et N la différence de chemin optique entre deux trajets possibles pour la lumière entre M et N d'où :

$$\delta = (MN)_2 - (MN)_1 \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda}$$

IV) Les différentes ondes

IV-1) Surface d'onde

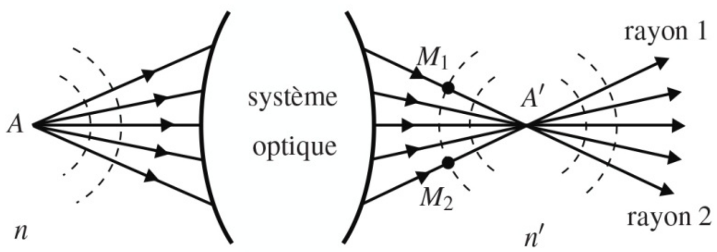
La surface d'onde issue d'une source ponctuelle S est l'ensemble des points M tels que (SM)=cste à t donné. Si l'onde est monochromatique, c'est une surface équiphase :

$$\Rightarrow \varphi(M) = cste$$

IV-2) Théorème de Malus

Les rayons lumineux sont perpendiculaires aux surfaces d'ondes, quelque soit le nombre de réflexions ou réfractions subies.

Conséquence :



Avant le système optique, les rayons lumineux sont des droites passant par A. Les surfaces d'onde doivent être orthogonales à ces droites d'après le théorème de Malus ; ce sont donc des sphères de centre A. Pour une raison analogue les surfaces d'ondes, après le système optique, sont des sphères de centre A'.

On veut comparer le chemin optique de A à A' le long de deux rayons différents numérotés 1 et 2.

Soient M_1 et M_2 des points situés sur ces rayons, après le système optique et sur une même surface d'onde. Par définition des surfaces d'ondes, on a

$$(AM_1) = (AM_2)$$

De plus, M_1 et M_2 se trouvant sur une sphère de centre A', d'après le principe de retour inverse de la lumière on peut écrire :

$$(M_1A') = (M_2A')$$

On trouve donc :

$$(AA')_1 = (AA')_2$$

Lorsque deux points A et A' sont conjugués par un système optique, le chemin optique (AA') est le même le long de tous les rayons allant de A à A'. (Stigmatisme rigoureux)

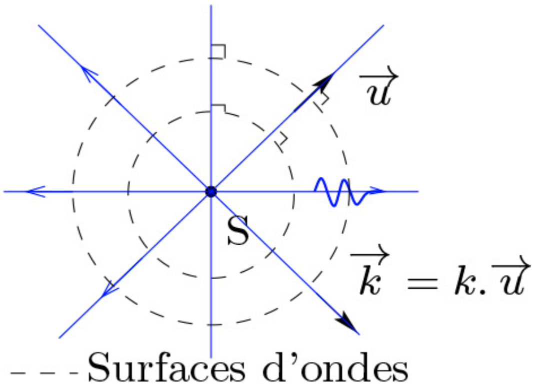
IV-3) Onde plane et sphérique

a) Onde sphérique

L'onde sphérique divergente est la modélisation de l'onde émise par une source ponctuelle S lorsque cette onde se propage dans un milieu homogène.

Une onde sphérique se caractérise par :

- Rayons lumineux = Droites concourantes en S
- Surfaces d'onde = Sphères centrées en S



Une onde sphérique monochromatique s'écrit :

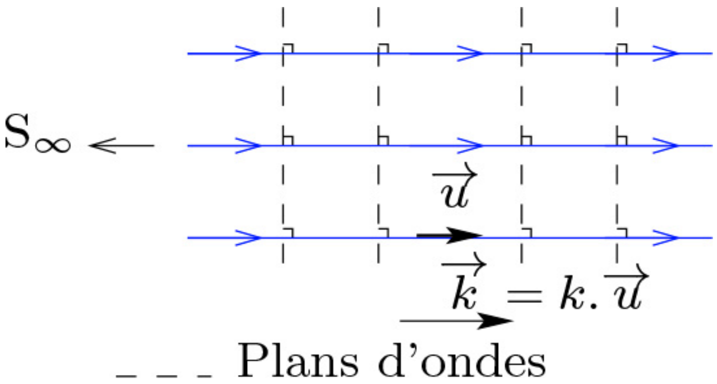
$$s(M,t) = \frac{\alpha}{r}\cos\big(\omega t - \varphi(M)\big)$$

Exemples : Onde émise par une source ponctuelle à distance finie (ampoule, étoile, soleil,...)

b) Onde plane

L'onde plane est la modélisation à grande distance d'une onde émise par une source ponctuelle dans un milieu homogène. Une onde plane se caractérise par :

- Rayons lumineux : Droites parallèles entre elles
- Surfaces d'onde : Plans parallèles entre eux orthogonaux aux rayons lumineux.



Exemples : Onde d'un faisceau laser, lumière provenant d'une source très éloignée

Si le milieu est transparent, l'amplitude de l'onde reste constante le long de la propagation. Une onde plane monochromatique peut s'écrire :

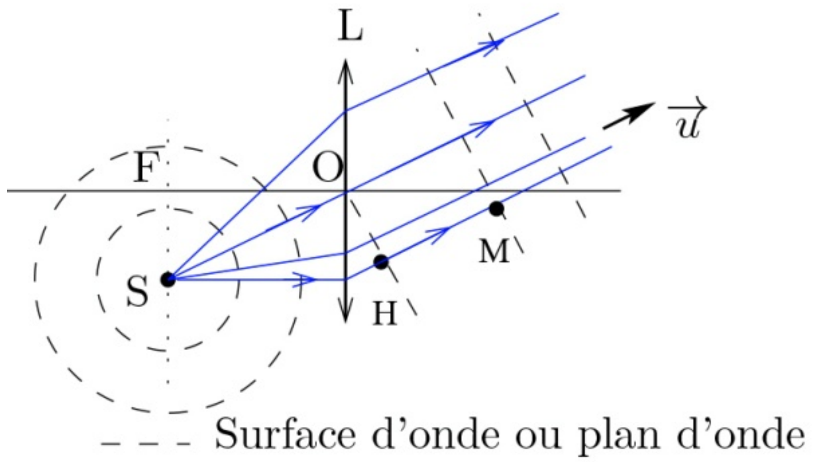
$$s(M,t) = A_0 \cos\big(\omega t - \varphi(M)\big)$$

c) Effet d'une lentille mince dans l'approximation de gauss

Dans l'approximation de Gauss, une lentille permet de transformer une onde sphérique en une onde plane et inversement.

En prenant une source placée en un foyer secondaire (ou principal) on crée une onde sphérique qui lors de la traversée de la lentille devient une onde plane.

En prenant une source placée à l'infini, on obtient après traversée de la lentille une onde sphérique dont le centre est un foyer secondaire (ou principal).



d) Expression d'une onde plane

L'onde sphérique initiale issue de S s'écrit en O :

$$s(O,t) = \frac{\alpha}{r_0} cos\big(\omega t - \varphi(O)\big) = A_0\, cos\big(\omega t - \varphi(O)\big)$$

Recherchons la forme de l'onde plane après la lentille.

$$s(M,t) = \mathrm{A}_0 \cos\big(\omega t - \varphi(M)\big)$$

Soit :

$$\varphi(M) - \varphi(S) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SM) et\ \varphi(O) - \varphi(S) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SO)$$

$$\Rightarrow \varphi(M) - \varphi(O) = \frac{2\pi}{\lambda_0}[(SM) - (SO)]$$

Avec : $(SM) - (SO) = (SH) + (HM) - (SO)$

O et H sont dans le même plan d'onde, donc d'après le théorème de Malus :

$$(SH) = (SO) \Rightarrow (SM) - (SO) = (HM)$$

Or, HM est la projection de $\overrightarrow{OM}$ sur le rayon lumineux passant par M :

$$\Rightarrow HM = \vec{u}.\overrightarrow{OM}$$

où $\vec{u}$ est le vecteur directeur normé donnant la direction de propagation de l'onde d'où :

$$\varphi(M) - \varphi(O) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(HM) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n\, HM = \frac{2\pi}{\lambda_0} n\, \vec{u}.\overrightarrow{OM}$$

Or :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n\, \vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda_n}\, \vec{u} \text{ où } \lambda_n = \frac{\lambda_0}{n}$$

Où λ_n : longueur d'onde dans le milieu d'indice n.

Donc :

$$\varphi(M) = \varphi(O) + \vec{k}.\overrightarrow{OM}$$

Conclusion :

Une onde plane monochromatique se propageant dans la direction $\vec{u}$ au sein d'un milieu d'indice n est de la forme

$$s(M,t) = A_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} - \varphi(O)\right) \text{ où } \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda_n}\,\vec{u}$$

En notation complexe :

$$\underline{s}(M,t) = A_0 e^{i\left(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} - \varphi(O)\right)} = \underline{A_0} e^{i\omega t}$$

$$\text{où } \underline{A_0} = A_0 e^{-i\left(\vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi(O)\right)} = A_0 e^{-i\varphi(M)}$$

e) Expression d'une onde sphérique

De même, pour une onde sphérique on a :

$$s(M,t) = \frac{\alpha}{r} \cos\left(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} - \varphi(O)\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} divergente : s(M,t) = \dfrac{\alpha}{r}\cos\left(\omega t - kr - \varphi(O)\right) \\ convergente : s(M,t) = \dfrac{\alpha}{r}\cos\left(\omega t + kr - \varphi(O)\right) \end{cases}$$

V – Sources lumineuses réelles

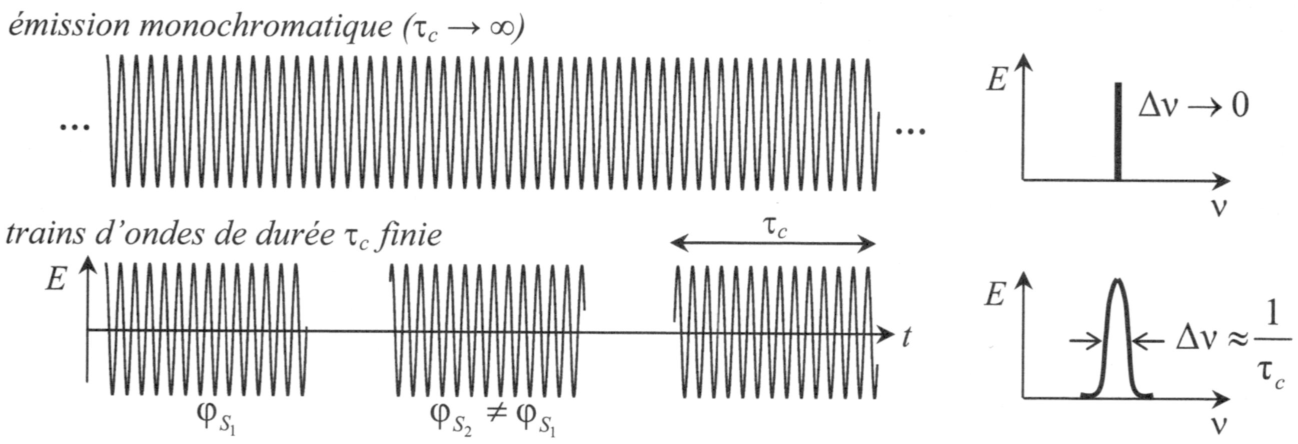
V-1) Durée de cohérence

Aucune source lumineuse ne peut émettre une onde de phase bien déterminée pendant un temps infini. Dans le modèle des trains d'onde, la vibration émise par une source de pulsation ω en S s'écrit : $s(S,t) = A_0 \cos\left(\omega t - \varphi(S)\right)$ où la phase $\varphi(S)$ reste constante pendant une durée moyenne finie τ_C appelée durée de cohérence, puis l'émission est stoppée et reprend avec une phase différente et aléatoire (perte de cohérence de phase).

Par analyse de Fourier on associe à un train d'onde de durée τ_C (aussi appelée durée de train d'onde) un élargissement spectral tel que :

$$\boxed{\Delta\nu\, \tau_c \sim 1}$$

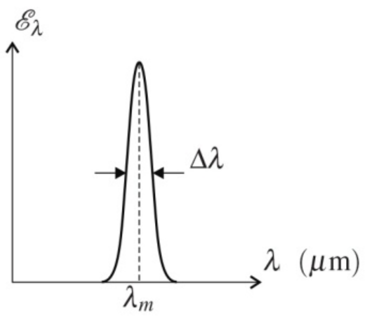
Un train d'onde infini correspond donc à une onde parfaitement monochromatique. Plus le train d'onde est court, plus le spectre s'élargit.



Vibration E(t) émise par la source

Spectre E(ν) correspondant

V-2) Raie spectrale



On sait mesurer le profil fin des raies spectrales. Ces raies ont une allure voisine de la figure ci-dessus et sont caractérisées par :

- La longueur d'onde λ_m correspondant au maximum d'émission,
- La largeur à mi-hauteur $\Delta\lambda$ qui est telle que $\Delta\lambda \ll \lambda_m$,

En termes de fréquences, la raie est caractérisée :
- Par la fréquence moyenne $\nu_m = \frac{c}{\lambda_m}$
- Et la largeur $\Delta\nu$.

Or :

$$\Delta\nu = \Delta\left(\frac{c}{\lambda}\right) = c\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda_1\lambda_2}$$

$$\Rightarrow \Delta\nu \sim \frac{c\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \; car \; \Delta\lambda \ll \lambda_m$$

Or :

$$\frac{c}{\lambda_m} = \nu_m$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu_m} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m}$$

Les ordres de grandeurs habituels sont :
- Pour une lampe spectrale : $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_m} \sim 10^{-3}$
- Pour un laser : $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_m} \sim 10^{-7}$

V-3) Longueur de cohérence

On appelle longueur de cohérence L_c la distance que parcourt la lumière dans le vide pendant la durée τ_C d'un train d'onde soit :

$$L_c = c\;\tau_c$$

- En un point M donné le passage du train d'onde dure en moyenne un temps τ_c.
- A un instant t donné, le train d'onde a une extension spatiale moyenne le long de la direction de propagation égale à L_c.

Le tableau ci-dessous donne quelques exemples de valeurs de largeur de raie, temps de cohérence et longueur de cohérence de différentes sources.

source	λ_m (nm)	$\Delta\lambda$ (nm)	$\Delta\nu$ (Hz)	τ_c (s)	L_c
lumière blanche	575	350	3.10^{14}	3.10^{-15}	$0,9\ \mu$m
lampe au mercure	546,1	1,0	1.10^{12}	10^{-12}	$0,3$ mm
lampe étalon au Kr^{86}	605,6	$1,2.10^{-3}$	10^9	10^{-9}	30 cm
laser He-Ne stabilisé	632,8	10^{-6}	$7,5.10^5$	$1,3\times10^{-6}$	$\sim$ 400 m

En fonction de la longueur d'onde, on peut obtenir une expression utile de la longueur de cohérence en optique :

$$L_c = c\ \tau_c \sim \frac{c}{\Delta\upsilon} = \frac{c}{\nu_m}\frac{\lambda_m}{\Delta\lambda}$$

$$\Rightarrow L_c = \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$$

On appelle longueur de cohérence L_c la distance que parcourt la lumière dans le vide pendant la durée τ_c d'un train d'onde soit :

$$L_c = c\ \tau_c \sim \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$$