

OD6 – Physique du laser

A – Travaux dirigés

OD61 – Coefficients d'Einstein

1. Dans le processus d'émission spontanée, un atome passe spontanément du niveau 2 en niveau 1 en émettant un photon d'énergie $h\nu = E_2 - E_1$. Les ondes émises ne sont pas cohérentes.

Il ne faut pas confondre avec l'émission stimulée qui est une émission cohérente. Le coefficient d'Einstein A_{21} pour l'émission spontanée est défini comme la probabilité d'émission spontanée par atome et par unité de temps.

Pendant dt , la variation de la population du niveau 2 est :

$$dN_2 = -A_{21}dtN_2$$

On en déduit l'équation différentielle :

$$\frac{dN_2}{dt} + A_{21}N_2 = 0$$

On intègre cette équation différentielle sachant qu'à $t = 0$, $N_2 = N_2^0$:

$$N_2 = N_2^0 \exp(-A_{21}t)$$

2. On définit la constante de temps de l'équation différentielle :

$$\frac{dN_2}{dt} + \frac{1}{\tau}N_2 = 0 \text{ en posant :}$$

$$\tau = \frac{1}{A_{21}}$$

Le temps de demi-vie $t_{1/2}$ est le temps au bout duquel la moitié de N_2 a disparu :

$$N_2(t_{1/2}) = \frac{N_2^0}{2} = N_2^0 \exp(-A_{21}t_{1/2})$$

On en déduit : $\ln 2 = A_{21}t_{1/2}$, soit :

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{A_{21}}$$

3. Dans une lampe à vapeur de sodium, les atomes sont excités par une décharge électrique. Le temps $\tau = \frac{1}{A_{21}}$ traduit une incertitude fondamentale

sur l'instant auquel a été émise la radiation. Comme $\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau}$, on en déduit la largeur spectrale du spectre émis par la lampe à vapeur de sodium. L'ordre de grandeur de la durée de vie moyenne d'un niveau excité correspond au temps de cohérence :

$$\tau = \frac{1}{A_{21}} = 1,93 \times 10^{-12} \text{ s}$$

La longueur de cohérence est la distance que parcourt la lumière dans le vide pendant la durée τ , soit :

$$L_c = c\tau = 0,58 \text{ mm}$$

OD62 - Laser à trois niveaux

1°) Les équations d'évolution sont :

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\Gamma N_1 + A_{21}N_2 + B_{21}u(\nu)N_2 - B_{12}u(\nu)N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N_2 - B_{21}u(\nu)N_2 + B_{12}u(\nu)N_1 + \frac{N_3}{\tau} \\ \frac{dN_3}{dt} = \Gamma N_1 - \frac{N_3}{\tau} \end{cases}$$

2°) On somme les trois relations précédentes et on obtient :

$$\frac{dN}{dt} = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 + N_3 = \text{cste}$$

3°) De la troisième relation :

$$\begin{aligned} \frac{dN_3}{dt} = 0 &\Rightarrow \Gamma N_1 - \frac{N_3}{\tau} = 0 \\ &\Rightarrow N_1 = \frac{N_3}{\Gamma \tau} \end{aligned}$$

De la première relation :

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} = 0 &\Rightarrow -\Gamma N_1 + A_{21}(N_1 + \Delta N) + B_{21}u(\nu)(N_1 + \Delta N) - B_{12}u(\nu)N_1 = 0 \\ &\Rightarrow N_1(-\Gamma + A_{21} + B_{21}u(\nu) - B_{21}u(\nu)) = \Delta N(-A_{21} - B_{21}u(\nu)) \\ &\Rightarrow \frac{N_3}{\Gamma \tau}(-\Gamma + A_{21}) = -\Delta N(A_{21} + B_{21}u(\nu)) \\ &\Rightarrow \Delta N = \frac{\Gamma - A_{21}}{A_{21} + B_{21}u(\nu)} \frac{N_3}{\Gamma \tau} \end{aligned}$$

4°) Pour réaliser une inversion de population il faut $\Delta N > 0$

$$\Rightarrow \Gamma > A_{21}$$

B – Exercices supplémentaires

OD63 – Cavité résonante

1°) Notons : $\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$, l'onde incidente.

Elle se réfléchit, une première fois, en $z=0$ à $t_1 = \frac{l}{c}$ d'où :

$$\vec{E}_r = r E_0 e^{i(\omega(t-t_1) + kz)} \vec{u}_x$$

Cette onde n'existe que pour $t > t_1 = \frac{l}{c}$.

Cette onde se réfléchit à nouveau en $z=-l$ et $t_2 = \frac{2l}{c}$ d'où :

$$\vec{E}_1 = r^2 E_0 e^{i(\omega(t-t_2) - kz)} \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = r^2 E_0 e^{i(\omega(t - \frac{2l}{c}) - kz)} \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = R E_0 e^{i(\omega t - kz - \phi)} \vec{u}_x \text{ où } \begin{cases} R = r^2 \\ \phi = \frac{2l\omega}{c} = 2kl \end{cases}$$

2°) Par analogie :

$$\begin{cases} \vec{E}_2 = R^2 E_0 e^{i(\omega t - kz - 2\phi)} \vec{u}_x \\ \vec{E}_3 = R^3 E_0 e^{i(\omega t - kz - 3\phi)} \vec{u}_x \\ \vec{E}_n = R^n E_0 e^{i(\omega t - kz - n\phi)} \vec{u}_x \end{cases}$$

3°) On en déduit le champ résultant. D'après l' enonc e :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \sum_{n=0}^{\infty} \vec{E}_n \\ \Leftrightarrow \vec{E} &= E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x \sum_{n=0}^{\infty} (1 + R e^{-i\phi} + \dots + (R e^{-i\phi})^n + \dots) \\ \Leftrightarrow \vec{E} &= E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x \frac{1}{1 - R e^{-i\phi}} \end{aligned}$$

Car on reconnaît une suite géométrique de raison $R e^{-i\phi}$

D'où l'amplitude :

$$A = E_0 \frac{1}{1 - R e^{-i\phi}}$$

- On calcule l'intensité I :

D'après l'énoncé : $I = \underline{A} \underline{A}^*$

$$\begin{aligned}\Rightarrow I &= I_0 \frac{1}{1 - Re^{-i\phi}} \frac{1}{1 - Re^{+i\phi}} \\ \Rightarrow I &= I_0 \frac{1}{1 + R^2 - R(e^{-i\phi} + e^{+i\phi})} \\ \Rightarrow I &= I_0 \frac{1}{1 + R^2 - 2R(\cos \phi)}\end{aligned}$$

- On cherche le contraste :

Par définition :

$$\begin{aligned}C &= \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{\frac{1}{(1-R)^2} - \frac{1}{(1+R)^2}}{\frac{1}{(1-R)^2} + \frac{1}{(1+R)^2}} \\ &\Rightarrow C = \frac{4R}{2(1+R^2)} \\ &\Rightarrow C = \frac{2R}{(1+R^2)}\end{aligned}$$

Pour $R=0,96$, on obtient : $C = 0,999$ et $\frac{I_{max}}{I_0} = 625$

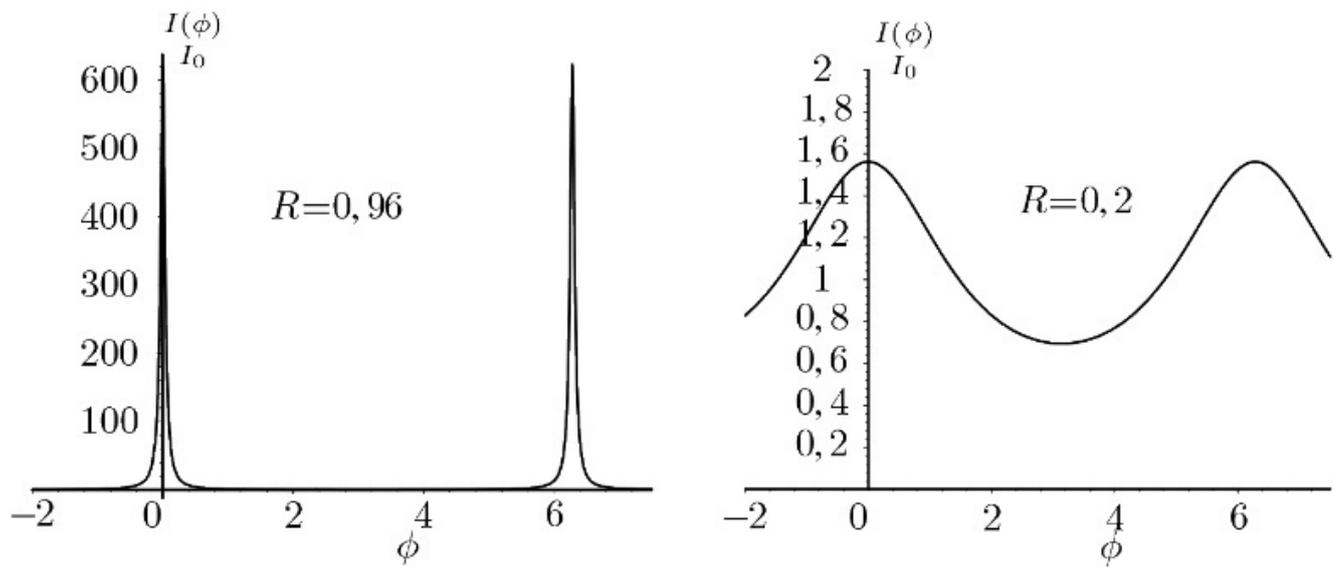
Pour $R=0,2$, on obtient : $C = 0,38$ et $\frac{I_{max}}{I_0} = 1,56$

4°) Pour avoir une intensité non négligeable, il faut une superposition d'ondes constructives d'où :

$$\begin{aligned}\phi &= 2kl = 2N\pi \\ \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} l &= N\pi \\ \Leftrightarrow \frac{2\pi}{c} lv &= N\pi \\ \Leftrightarrow v &= \frac{c}{2l} N\end{aligned}$$

Pour $N=1$ on obtient : $v_1 = 500 \text{ MHz}$

Vu la forme des courbes proposées :



On voit très bien que seules les fréquences correspondantes donneront une intensité non négligeable si la cavité est très sélective. Il faudra adapter une de ces fréquences avec les modes de fonctionnement du laser.

OD64 – LIDAR

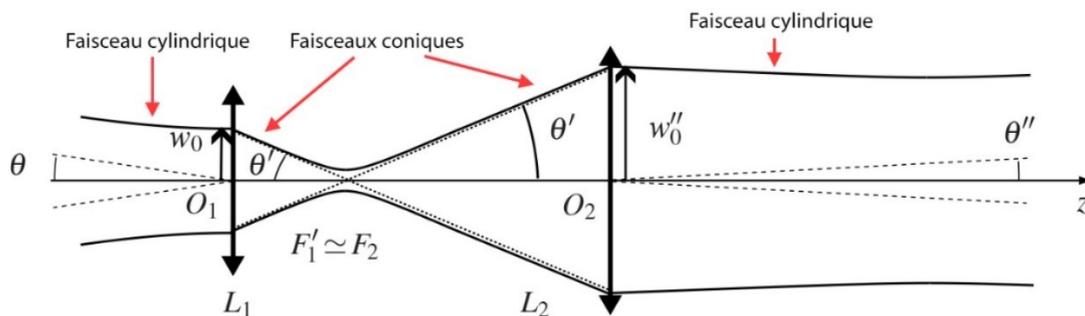
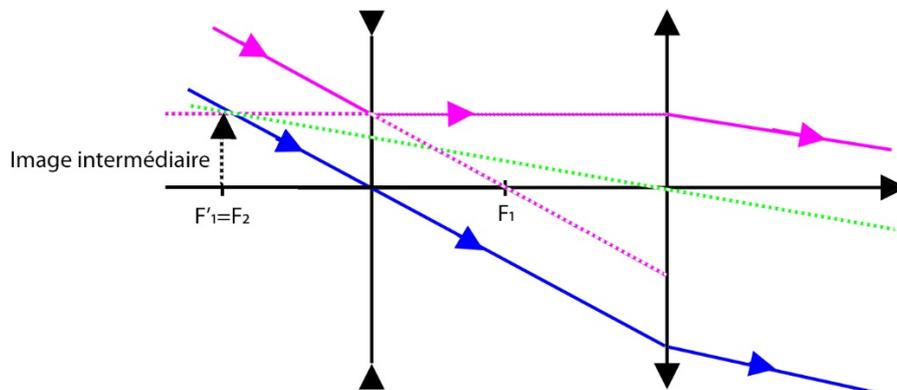
1°) $\lambda_0 = 1,06\mu m \Rightarrow IR$

2°) Soit : $\theta = \frac{\lambda_0}{\pi w_0} = 8,4 \cdot 10^{-4} rad$ et $Z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda_0} = 0,47m$

Par conséquent : $w_{1500} = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} = 1,26m$

Il faut donc réduire la taille du faisceau pour effectuer une mesure précise. Il faut donc le collimater.

3a) On réalise le schéma optique proposé, mais pour plus de clarté on rappelle celui du cours.



La distance entre les deux lentilles vaut : $d = |f_2'| - |f_1'| = 180mm$.

L'intérêt d'utiliser une lentille divergente est de réduire la taille du dispositif.

3b) On a $Z_r \gg f_1'$, on considère donc une onde plane et le faisceau gaussien converge au foyer image de la première lentille. Son waist est donc positionné au niveau de l'image intermédiaire. La divergence à la sortie de la première lentille est :

$$\theta' = \frac{w_0}{|f_1'|} = 0,02 \text{ rad}$$

A la sortie de la deuxième lentille on a : $\theta' = \frac{w_0''}{f_2'} = 0,02 \text{ rad} \Rightarrow w_0'' = 4 \text{ mm}$

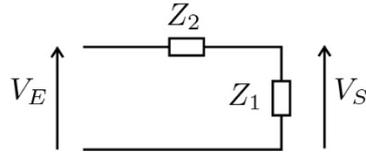
D'où la longueur de Rayleigh du faisceau gaussien émergent :

$$Z_R'' = \frac{\pi w_0''^2}{\lambda_0} = 47 \text{ m} \Rightarrow \theta'' = \frac{\lambda_0}{\pi w_0''} = 8,4 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

3c) Donc : $w_{1500, \text{ collimaté}} = w_0'' \sqrt{1 + \left(\frac{z}{Z_R''}\right)^2} = 0,126 \text{ m}$

OD65 – Oscillateur à pont de Wien

1°) Calcul de la fonction de transfert :



On a le schéma équivalent en définissant :

- $\underline{Z}_2 = R + \frac{1}{jC\omega}$ association série de la résistance et du condensateur
- $\underline{Z}_1 = \frac{R \frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$ association parallèle de la résistance et du condensateur

On reconnaît un diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \left(\frac{1+jRC\omega}{R}\right)}$$

$$\text{On a alors : } \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{(1+jRC\omega)^2}{jRC\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega} + 2 - \frac{1}{j}RC\omega}$$

Finalement, on obtient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

$$\text{L'identification donne : } H_0 = \frac{1}{3} ; \frac{Q}{\omega_0} = \frac{RC}{3} \text{ et } Q\omega_0 = \frac{1}{3RC}.$$

En faisant le quotient des deux dernières équations, on a $\omega_0^2 = \frac{1}{(RC)^2}$, soit

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \text{ et } Q = \omega_0 \frac{RC}{3} = \frac{1}{3}.$$

C'est un filtre passe-bande dont la pulsation de résonance est $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

La largeur de la bande passante à -3 dB est : $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$

Comme $Q = \frac{1}{3}$, le filtre n'est pas très sélectif. La résonance est floue.

Obtention de l'équation différentielle :

On multiplie la fonction de transfert par $jRC\omega$ au numérateur et dénominateur pour faire apparaître des termes en $(jRC\omega)^n$ avec $n \geq 0$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)} = \frac{jRC\omega}{3jRC\omega + (jRC\omega)^2 + 1} = \frac{V_S}{V_E}$$

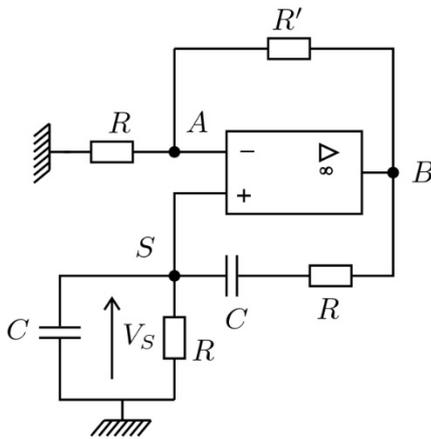
On a alors : $(3jRC\omega + (jRC\omega)^2 + 1) V_S = jRC\omega V_E$.

On en déduit l'équation différentielle en remplaçant formellement $j\omega V_S$ par

$$\frac{dV_S}{dt} \text{ et } (j\omega)^2 V_S \text{ par } \frac{d^2V_S}{dt^2} : 3RC \frac{dV_S}{dt} + (RC)^2 V_S + V_S = RC \frac{dV_E}{dt},$$

$$\text{d'où : } \ddot{V}_S + \frac{3}{RC} \dot{V}_S + \frac{V_S}{(RC)^2} = \frac{\dot{V}_E}{RC} \text{ (eq.1)}$$

2.



L'ALI est idéal, donc $V_+ = V_- = V_S = V_A$.

On applique le théorème de Millman au point A :

$$V_A = \frac{\frac{V_B}{R'}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}} = \frac{R}{R + R'} V_B = V_S$$

D'où $V_B = \frac{R + R'}{R} V_S = K V_S$.

D'après la question précédente : $\ddot{V}_S + \frac{3}{RC} \dot{V}_S + \frac{V_S}{(RC)^2} = \frac{\dot{V}_B}{RC} = \frac{K \dot{V}_S}{RC}$

car $i^+ = 0$. On a alors : $\ddot{V}_S + \frac{3 - K}{RC} \dot{V}_S + \frac{V_S}{(RC)^2} = 0$ (eq.2)

On a vu que le terme d'amortissement correspond au terme en \dot{V}_S dans l'équation différentielle (1).

Avec le montage avec l'ALI, l'équation différentielle devient (eq.2). Le terme d'amortissement peut s'annuler pour $K = 3$.

On a alors $\ddot{V}_S + \omega_0^2 V_S = 0$ et la possibilité d'avoir un signal sinusoïdal en sortie. Ce signal sera alors de pulsation ω_0 .

Lorsqu'on réalise le montage en travaux pratiques, $V_S = 0$ à $t = 0$. Pour observer des oscillations, il faut avoir $K > 3$. Avec un oscilloscope à mémoire, on observe la naissance des oscillations avec un régime pseudo périodique divergent. La saturation de l'ALI limite la croissance de l'amplitude des oscillations. On a ensuite une succession de phases d'amplification et d'amortissement. Si K est proche de 3, on observe un signal quasi sinusoïdal.

L'étage d'amplification dans le montage électronique est le montage non inverseur (ALI avec les deux résistances R et R').

La **non-linéarité** de l'ALI est donc indispensable pour obtenir des oscillations quasi sinusoïdales à la pulsation.

On retrouve des analogies entre l'oscillateur à pont de Wien et le laser qui est un exemple d'oscillateur dans le domaine optique.

On trouve trois éléments fondamentaux dans un laser :

- Un milieu actif (ou milieu amplificateur) qui permet d'amplifier le rayonnement.
- Un dispositif de pompage qui produit l'inversion de population dans le milieu actif.
- Une **cavité** qui joue le rôle de **résonateur optique** (voir exercice « Cavité résonante »). Elle est limitée par des faces partiellement réfléchissantes entre lesquelles est placé le milieu actif. Les ondes « piégées » entre les deux miroirs réalisent un grand nombre d'allers et retours à l'intérieur de la cavité avant de s'en échapper, provoquant ainsi une amplification de l'émission stimulée. On a vu que la cavité de longueur L ne sélectionne que certaines fréquences : $\nu = N \frac{c}{2L}$ avec N un entier. Chaque fréquence ainsi définie et contenue dans la bande de fréquence de la raie due à l'émission stimulée définit un mode du laser.

On a dans tout **laser un résonateur optique avec une amplification du signal d'entrée.**

OD66 – Diode Laser

1. D'après le graphe fourni, on constate que les fréquences de résonance observées s'étendent sur un intervalle de 1500 GHz, centré sur la fréquence centrale f_0 . La largeur de cet intervalle correspond à l'intervalle de fréquences où la gain non saturé de la cavité est supérieur aux pertes.

2. On peut mesurer sur la figure fournie, l'écart de fréquence qui sépare les fréquences de résonance. On obtient : $\Delta f = 143$ GHz. Or $\Delta f = \frac{c}{2n\ell}$. On en déduit l'indice optique du milieu semi-conducteur : $n = \frac{c}{2\ell\Delta f}$, ce qui donne : $n = 3,13$.

3. La formule d'Airy montre que l'intensité est égale à la moitié de l'intensité maximale lorsque : $\sin^2\left(\frac{n\ell}{c}(\Delta f)_{1/2}\right) = \frac{(1-R)^2}{4R}$, soit : $\sin\left(\frac{n\ell}{c}(\Delta f)_{1/2}\right) = \frac{(1-R)}{2\sqrt{R}}$. Comme $1-R$ est proche de zéro, l'argument du sinus est proche de zéro et il est possible de linéariser l'expression obtenue. D'où : $\frac{n\ell}{c}(\Delta f)_{1/2} = \frac{1-R}{2\sqrt{R}}$. Sur le graphe montrant le détail d'un pic, on estime que $(\Delta f)_{1/2} = 1,5$ GHz. On en déduit que $R \simeq 0,99$.

4. Après un aller-retour dans la cavité, l'onde électromagnétique subit deux réflexions sur les miroirs et parcourt deux fois le milieu amplificateur. À chaque réflexion, l'amplitude du champ électrique est multipliée par \sqrt{R} . À chaque passage dans le milieu amplificateur, cette même amplitude est multipliée par le facteur g . Si l'on souhaite que cette amplitude reste inchangée après un aller-retour dans la cavité, alors il faut que $Rg^2 = 1$, soit $g = \frac{1}{\sqrt{R}} = 1,005$.