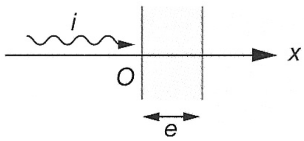
OD5 – Interface entre deux milieux

A – Travaux dirigés

OD51 - Transmission d'une onde sonore au travers d'un mur

Un mur, d'épaisseur e et masse volumique μ_m, est atteint par une onde sonore incidente se propageant dans l'air de masse volumique μ_0 et célérité sonore c. L'impédance acoustique de l'air est notée Z.



a) Donner les formes des ondes sonores de pression et vitesse incidentes qui sont des ondes planes progressives monochromatiques, de pulsation ω. On note A l'amplitude de la surpression et on utilisera la notation complexe.

b) Faire de même avec les ondes réfléchie et transmise. On note $\underline{r}$ et $\underline{t}$ les coefficients de réflexion et transmission en pression dans l'air derrière le mur.

c) On suppose que le mur vibre en bloc. Qu'est-ce que cela signifie sur son épaisseur e ? Expliquer pourquoi, lors de l'écriture des relations de passage de part et d'autre du mur, on peut supposer le mur d'épaisseur quasi nulle.

d) Qu'en déduire sur les vitesses particulaires avant et après le mur ?

e) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique au mur.

f) En déduire l'expression de $\underline{t}$.

g) Calculer le coefficient de transmission en puissance T. On rappelle que : $< f\ g > = \frac{1}{2}\ R\ e\ (\underline{f}\ \underline{g}^*)$.

h) Commenter son expression. Comment le mur se comporte-t-il aux basses et hautes fréquences ? Comment doit-on s'y prendre pour que le mur atténue efficacement les ondes sonores ?

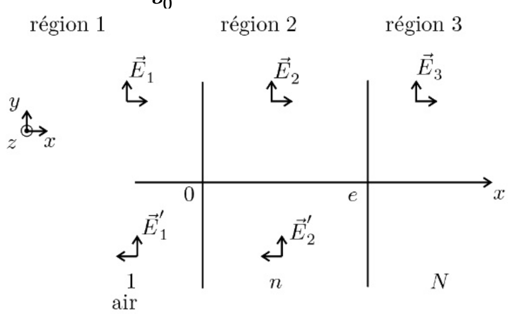
i) Application numérique pour $f = 100\ Hz, Z = 410\ kg.m^{-2}.s^{-1}, e = 15\ cm, \mu_m = 2\ 000\ kg.m^{-3}\ (béton)$. Pour un son extérieur de niveau 80 dB, quel est le niveau sonore à l'intérieur ?

Rép : a) … b) … c) $e \ll \lambda_{air}$ d) $\underline{r} + \underline{t} = 1$ e) $\frac{i\omega\mu_m e \underline{t}}{\underline{Z}} = 1 + \underline{r} - \underline{t}$ f) $\underline{t} = \frac{2}{2+\frac{i\omega\mu_m e}{\underline{Z}}}$ g) $T = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega\mu_m e}{2Z}\right)^2}$ i) $T=1{,}9.10^{-5}$

OD52 – Couche antireflet

Un milieu transparent, d'indice N est limité par une surface plane. Cette surface est recouverte par une couche mince transparente d'indice n et d'épaisseur uniforme e. Une onde plane progressive monochromatique (1) tombe sur la surface x=0 sous incidence normale. Elle donne naissance à une onde réfléchie $\overrightarrow{\underline{E_1'}}$ et une onde transmise $\overrightarrow{\underline{E_2}}$. L'onde $\overrightarrow{\underline{E_2}}$ tombe sur la surface x=e. Elle donne naissance à une onde réfléchie $\overrightarrow{\underline{E_2'}}$ et une onde transmise $\overrightarrow{\underline{E_3}}$. On rappelle les relations de passage :

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ n_{1\to 2}\ ;\ \overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \overrightarrow{J_s} \wedge \overrightarrow{n_{1\to 2}}$$



1°) A l'aide des relations de passage en x=0 et x=e démontrer que :

$$\begin{cases} \underline{E_1} + \underline{E_1'} = \underline{E_2} + \underline{E_2'} \\ \underline{E_1} - \underline{E_1'} = n\left(\underline{E_2} - \underline{E_2'}\right) \\ \underline{E_2}e^{-j\varphi_2} + \underline{E_2}'e^{+j\varphi_2} = \underline{E_3}e^{-j\varphi_3} \\ n\left(\underline{E_2}e^{-j\varphi_2} - \underline{E_2}'e^{j\varphi_2}\right) = N\underline{E_3}e^{-j\varphi_3} \end{cases}$$

Où l'on précisera les valeurs de $\varphi_2\ et\ \varphi_3$ en fonction de $k_2, k_3\ et\ e$.

2°) Comment doit-on choisir n en fonction de N pour éliminer les pertes de lumière par réflexion ?
Application numérique : N = 1,8.
3°) Déterminer l'épaisseur minimale e_{min} qui remplit les conditions de couche antireflet.
Rép : 1°) $\varphi_2 = k_2 e \; et \; \varphi_3 = k_3 e$ 2°) $n = \sqrt{N} = 1{,}34$ 3°) $e_{min} = \frac{\lambda_0}{4n}$

B – Exercices supplémentaires

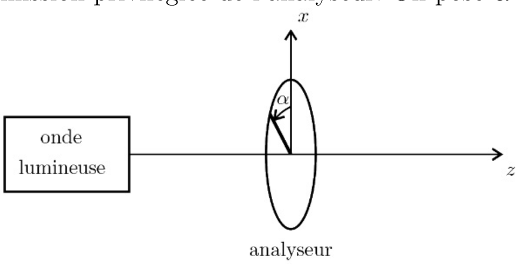
OD53 – Interface atmosphère - ionosphère

L'ionosphère peut être assimilée à un plasma neutre. On étudie la propagation des ondes radio à l'interface atmosphère - ionosphère supposée plane. L'ionosphère est dans la région z>0 et l'atmosphère dans la région z<0. Le champ incident est : $\underline{\vec{E}_i} = E_0 \, e^{i(\omega t - kz)} \overrightarrow{u_x}$. Lorsque l'onde arrive sur l'interface, une partie est réfléchie et l'autre partie est transmise. L'indice de réfraction de l'ionosphère est $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$. La fréquence plasma vaut $f_p = 6{,}9 \; MHz$. On admet la continuité du champ électromagnétique en z=0.

1°) Déterminer les coefficients de réflexion r et de transmission t en amplitude pour le champ électrique. En déduire les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance. Quelle est la relation entre R et T ?
2°) Quelle est la valeur de R lorsque $\omega < \omega_p$? Dans ce cas, à quoi peut-on assimiler l'interface atmosphère-ionosphère ?
3°) On se place maintenant dans le cas d'une incidence oblique, et on désigne par i l'angle d'incidence. A quelles conditions une onde peut-elle être transmise dans l'ionosphère ?
4°) Un poste émetteur, au niveau de la mer, émet une onde radio de fréquence 12 MHz vers l'ionosphère, dans une direction faisant l'angle i avec la normale à l'interface. En supposant que l'onde arrive sur l'interface précédente sous forme d'onde plane, calculer l'angle i, à partir duquel l'onde incidente ne traversera plus l'interface.
Rép : 1°) $R = \left|\frac{1-n}{1+n}\right|^2 \; et \; T = \frac{4n^2}{(1+n)^2}$ 2°) R=1 3°) Si $f < f_p$:réflexion totale, si $f > f_p$: $i > \lambda = Arcsin(n)$ pour réflexion totale 4°) λ=55°

OD54 - Polarisation des ondes

On étudie le montage de la figure suivante. Un analyseur est placé dans le plan z = 0. On appelle $\vec{u}$ le vecteur unitaire donnant la direction de transmission privilégiée de l'analyseur. On pose $\alpha = (\overrightarrow{u_x}, \vec{u})$



1°) On considère une onde polarisée rectilignement dont le champ électrique se met sous la forme :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k_o z) \vec{u}_x$$

Déterminer l'éclairement $\varepsilon = K < \|\vec{E}\|^2 >$ de l'onde lumineuse en sortie de l'analyseur en fonction de α et E_0. Comment est appelée cette loi ?
2°) On considère une onde polarisée elliptiquement dont le champ électrique se met sous la forme :

$$\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - k_o z) \vec{u}_x + E_{0y} \sin(\omega t - k_o z) \vec{u}_y$$

Déterminer l'éclairement de l'onde lumineuse en sortie de l'analyseur en fonction de α, E_{ox} et E_{oy}.
3°) On remplace l'analyseur par une lame quart d'onde, d'épaisseur *e*. Pour une onde plane progressive monochromatique incidente polarisée rectilignement suivant Ox, l'indice de la lame est n_x. Pour une onde plane progressive monochromatique incidente polarisée rectilignement suivant Oy, l'indice de la lame est n_y. L'axe lent coïncide avec l'axe Ox et l'axe rapide coïncide avec l'axe Oy. Donner une relation d'ordre entre les indices $n_x \; et \; n_y$. Quelle relation a-t-on entre $e, n_x, n_y \; et \; \lambda$ pour une onde plane progressive monochromatique incidente ?
4°) L'onde incidente est l'onde étudiée dans la question 2. Donner l'expression du champ électrique à la sortie de la lame quart d'onde.
Rép : 1°) $\varepsilon = \frac{K}{2} E_0^2 \cos^2\alpha$ 2°) $\varepsilon = \frac{K}{2}\left(E_{0x}^2 \cos^2\alpha + E_{0y}^2 \sin^2\alpha\right)$ 3°) $\frac{\lambda}{4} = (n_x - n_y)e$ 4°) $\vec{E}_{sortie} = \left(E_{0x}\vec{u}_x + E_{0y}\vec{u}_y\right)\cos(\omega t - k_o z)$

OD55 – Coefficients de réflexion et transmission

On considère une onde plane progressive monochromatique acoustique se propageant dans le sens des x > 0 dans le milieu 1. La vitesse particulaire est notée $\underline{u_i} = u_{io}\, e^{i\,(\omega t - k_1 x)}$. Elle arrive à l'interface entre deux milieux de surface S à l'abscisse x = 0.

On note $\mu_1, c_1, \mu_2, c_2, Z_{a1}$ et Z_{a2} les masses volumiques, célérités du son et impédances acoustiques dans les milieux 1 et 2.

On pose : $Z_{a1} = \mu_1 c_1$ et $Z_{a2} = \mu_2 c_2$ et $\alpha = \frac{Z_{a2}}{Z_{a1}}$

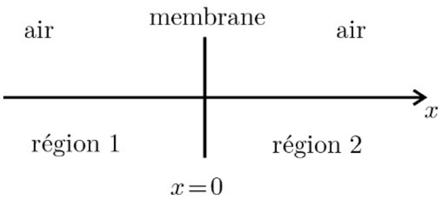
1°) Montrer qu'il existe une onde réfléchie et exprimer $\underline{u_r}$ et $\underline{u_t}$ en fonction de r et t les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour la vitesse. En déduire $\underline{p_i}, \underline{p_r}$ et $\underline{p_t}$ puis r et t en fonction de α .

2°) Définir le vecteur de Poynting sonore et l'expression de la puissance sonore à travers la surface S. Calculer les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance moyenne en fonction de α. Calculer R + T et interpréter physiquement. Que se passe-t-il si $Z_{a2} \gg Z_{a1}$?

Rép : 1°) $r = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ et $t = \frac{2}{1+\alpha}$ 2°) $R = r^2$ et $T = \alpha t^2$

OD56 – Transmission à travers une membrane

On considère une membrane infiniment fine de masse surfacique σ. On note $c = 340\ m.s^{-1}$ la célérité du son dans l'air, $\mu_0 = 1{,}3\ kg.m^{-3}$ la masse volumique de l'air. L'impédance acoustique de l'air est $Z_a = \mu_0 c$. Une onde acoustique se propage dans le sens des $x > 0$ dans la région 1. La surpression de l'onde incidente est : $p_i = p_{io} e^{i(\omega t - kx)}$. Elle arrive à l'interface $x = 0$. On suppose que l'on a continuité de la vitesse particulaire pour x = 0 et que la vitesse de la membrane est égale à la vitesse de l'onde transmise. On définit r et t les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour la surpression. On définit T le coefficient de transmission en puissance et $T_{dB} = 10 \log T$.



1°) À cause de la membrane, on n'a pas continuité de la pression. Appliquer le théorème de la quantité de mouvement à la membrane en supposant qu'elle vibre en bloc. Déterminer r et t en fonction de ω, μ_0, c et σ.

2°) Déterminer T le coefficient de transmission en puissance en fonction de ω et ω_0. Exprimer ω_0 en fonction de μ_0, c et σ.

3°) Calculer σ pour atténuer de 70 dB un signal sinusoïdal de fréquence 2000 Hz.

Rép : 1°) $1 - \underline{r} = \underline{t} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$ 2°) $\sigma = \frac{\mu_0 c}{\pi f_0} = 222\ kg\ m^{-3}$

OD57 - Réflexion sur un conducteur parfait

Une onde plane monochromatique se propage dans le vide. Le champ électrique de l'onde incidente est de la forme : $\overrightarrow{E_i}(x,t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \overrightarrow{u_x}$. On note c la vitesse de la lumière dans le vide. On rappelle les relations de passage :

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} n_{1\to 2}\ ;\ \overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \overrightarrow{J_s} \wedge \overrightarrow{n_{1\to 2}}\ et\ \mu_0 \overrightarrow{J_s} = \overrightarrow{n_{1\to 2}} \wedge \left(\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1}\right)$$

1°) L'onde rencontre en z = 0 un plan métallique parfait et l'espace z > 0 est occupé par un métal parfait. Montrer qu'il y a une onde réfléchie. On note : $\overrightarrow{E_r}(x,t) = E_{r0} e^{i(\omega t + kz)} \overrightarrow{u_x}$ le champ réfléchi. Établir l'expression de E_{r0}.

2°) Déterminer le champ magnétique dans la région z < 0. De quel type d'ondes s'agit-il ?

3°) On place en z=-l, un second plan métallique identique au premier. En introduisant un entier N préciser les fréquences des ondes stationnaires qui peuvent s'établir entre les deux plans. Qu'implique les relations de passage en z=0 et z=l concernant le champ magnétique ?

4°) Quelle est la densité moyenne d'énergie volumique ? Quelle est l'expression de l'énergie électromagnétique moyenne localisée dans un cylindre de section S de longueur l de génératrices parallèles à Oz ?

Rép : 1°) $E_{r0} = -E_0$ 2°) $\vec{B}(x,t) = \frac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\cos(kz)\overrightarrow{u_y}$ 3°) $\overrightarrow{J_s} = -\frac{2E_0}{c\mu_0}\cos(\omega t)\cos(N\pi)\overrightarrow{u_x}$ 4°) $U_{em} = \varepsilon_0 E_0^2 S l$

OD58 – Plasma

A - Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

Un plasma neutre est constitué d'électrons libres et d'ions chargés positivement, beaucoup plus lourds que les électrons (on les considérera donc fixes). Les électrons, de masse m, de charge -e, sont en nombre n_0 par unité de volume.

1°) Le milieu est soumis à un champ électrique $\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}e^{i(\omega t)}$. Déterminer la vitesse des électrons et en déduire que l'on peut associer au plasma une conductivité complexe $\underline{\gamma}$ à exprimer.

2°) Le champ électrique est maintenant celui d'une OPPH : $\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$. A quelle(s) condition(s) le résultat de la question 1 est-il encore valable ? On supposera cette (ces) condition(s) vérifiée(s) dans la suite de l'exercice.

Écrire les équations de Maxwell dans le plasma. Montrer que tout revient à remplacer dans les calculs habituels de l'onde plane dans le vide ε_0 *par* $\varepsilon = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$ où ω_p, appelée pulsation plasma, est une constante à déterminer en fonction de n_0, e, m *et* ε_0.

On suppose : $\omega \neq \omega_p$, en déduire, sans calculs, la relation entre ω et k (dite relation de dispersion). Étudier le cas $\omega > \omega_p$ *et* $\omega < \omega_p$.

B - Réflexion/Transmission d'une onde à la surface d'un plasma

Le plasma occupe le demi-espace x > 0. Une OPPH polarisée rectilignement se propage le vide (demi-espace x<0) et atteint sous incidence normale le plasma. Le champ électrique de cette onde est noté $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kx)}\overrightarrow{u_y}$. L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie et à une onde transmise.

1°) On note $\underline{r}E_0$ l'amplitude complexe du champ électrique réfléchi et $\underline{t}E_0$ celle du champ électrique de l'onde transmise. Calculer $\underline{r}$ et $\underline{t}$ et donner l'expression du champ électrique réel de chaque onde (on distinguera les cas $\omega > \omega_p$ *et* $\omega < \omega_p$).

2°) On définit de même les facteurs de réflexion (R) et de transmission (T) en énergie à partir du flux du vecteur de Poynting associé à chaque onde à travers une surface S du plan x=0. Calculer R et T. Commenter.

Rép : A- 1°) $\underline{\gamma} = -\frac{i n_0 e^2 \underline{\vec{E}}}{m\omega}$ 2°) $si\ \omega < \omega_p : k = \pm\frac{i}{c}\sqrt{{\omega_p}^2 - \omega^2}\ et\ si\ \omega > \omega_p : k = \frac{1}{c}\sqrt{-{\omega_p}^2 + \omega^2}$

B- 1°) $r = \frac{\omega - \sqrt{{\omega_p}^2 - \omega^2}}{\omega + \sqrt{{\omega_p}^2 - \omega^2}}$ et $t = \frac{2\omega}{\omega + \sqrt{{\omega_p}^2 - \omega^2}}$ 2°) $R = \left(\frac{\omega - \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{\omega + \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}\right)^2\ et\ T = \frac{4\omega^2}{\omega + \sqrt{{\omega_p}^2 - \omega^2}}$

OD59 - Cavité sans pertes

Une cavité sans pertes d'axe Ox et de longueur L est constituée par l'association de deux miroirs métalliques parfaits confondus respectivement avec les plans x=0 et x=L. On suppose qu'à l'intérieur de la cavité le champ électrique d'une onde monochromatique polarisée selon $\overrightarrow{e_z}$ a pour représentation complexe :

$$\vec{E}(x,t) = E_1 e^{i(\omega t - kx)}\overrightarrow{e_z} + E_2 e^{i(\omega t + kx)}\overrightarrow{e_z}$$

1°) On rappelle la relations de passage sur le champ électrostatique : $\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} n_{1\to 2}$. Sachant que le champ électrostatique est nul à l'intérieur d'un conducteur parfait en déduire les conditions aux limites imposées par la présence d'un métal parfait en x = 0 et x = L?

2°) En déduire l'expression de E_2 en fonction de E_1 et la suite f_n des valeurs possibles de la fréquence de telles ondes pouvant exister dans la cavité. On exprimera f_n en fonction d'une entier naturel n non nul et d'une fréquence particulière f_1 dépendant de L et de c. Ces fréquences correspondent aux modes propres de la cavité.

3°)

a) Etablir l'expression $\overrightarrow{E_n}(x,t)$ du champ électrique dans la cavité à la fréquence f_n en fonction de E_1, n, x, L et c.

b) Justifier l'expression d'onde stationnaire qu'on donne à ce type d'onde.

c) Montrer qu'il existe des abscisses x_p, où le champ électrique est constamment nul. Donner la distance entre deux valeurs consécutives de x_p.

d) En déduire le champ magnétique $\overrightarrow{B_n}(x,t)$ associé à cette onde. Expliciter les abscisses des points où le champ magnétique est constamment nul.

Rép : 1°) Le champ électrique est nul en x=0 et L 2°) $f_n = \frac{nc}{2L}$ 3°) a) $\overrightarrow{E_n}(x,t) = -2i\ E_{1n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{i\omega_n t}\overrightarrow{e_z}$

3b) $\overrightarrow{E_n}(x,t) = -2i\ E_{1n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin(\omega_n t)\,\overrightarrow{e_z}$ c) $x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda_n}{2}$ d) $x'_p = \frac{p\lambda_n}{2} + \frac{\lambda_n}{4}$