

## OD5 – Interface entre deux milieux

## A – Travaux dirigés

## OD51 – Transmission d'une onde sonore au travers d'un mur

a) L'onde incidente est de la forme :

$$p_{1i} = A \exp(i(\omega t - kx))$$

où  $k = \omega/c$ , et :

$$\vec{v}_{1i} = \frac{A}{Z} \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_x$$

où  $Z = \mu_0 c$  est l'impédance de l'air.

b) Similairement, pour l'onde réfléchie,

$$p_{1r} = r A \exp(i(\omega t + kx))$$

et :

$$\vec{v}_{1r} = -r \frac{A}{Z} \exp(i(\omega t + kx)) \vec{u}_x$$

En ce qui concerne l'onde transmise,

$$p_{1t} = t A \exp(i(\omega t - kx))$$

Et :

$$\vec{v}_{1t} = t \frac{A}{Z} \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_x$$

c) Tous les points du mur vibrent avec une unique vitesse. Comme la vitesse varie spatialement sur une longueur d'onde, on déduit ainsi  $e \ll \lambda$ . Il s'agit ici de la longueur d'onde dans le mur, qui est supérieure à celle dans l'air car  $\lambda = cT$ . Les fréquences sont les mêmes, mais les longueurs d'onde diffèrent. Comme la célérité du son dans le mur est supérieure à celle dans l'air, on peut se contenter de la condition  $e \ll \lambda_{\text{air}}$ .

Le second côté du mur possède une abscisse  $e$ , aux vibrations près. Quand on considère une onde de la forme  $\exp(i(\omega t - kx))$  en  $x = e$ , il est possible d'approximer :

$$\exp(i(\omega t - ke)) \simeq \exp(i\omega t)$$

car  $ke = \frac{2\pi}{\lambda} e \ll 2\pi$ .

d) La vitesse particulière est continue juste avant et après le mur, et est égale à la vitesse du mur :

$$\vec{v}_{1i}(x = 0^-, t) + \vec{v}_{1r}(x = 0^-, t) = \vec{v}_{\text{mur}} = \vec{v}_{1t}(x = e, t) \simeq \vec{v}_{1t}(x = 0^+, t).$$

On en déduit :

$$\frac{A}{Z} \exp(i\omega t) \vec{u}_x - r \frac{A}{Z} \exp(i\omega t) \vec{u}_x = t \frac{A}{Z} \exp(i\omega t) \vec{u}_x$$

soit  $1 - r = t$ .

e) On s'intéresse à la relation fondamentale appliquée à une section  $S$  de mur, de masse  $m = \mu_m S e$ , en projection sur l'axe horizontal :

$$\mu_m S e \frac{dv_{\text{mur}}}{dt} = (p(x = 0^-) - p(x = 0^+)) S.$$

D'après l'expression précédente de la vitesse du mur  $v_{\text{mur}}(t) = v_{1t}(x = 0^+, t)$ , on déduit :

$$\mu_m e(i\omega) t \frac{A}{Z} \exp(i\omega t) = p_{1i}(x = 0^-, t) + p_{1r}(x = 0^-, t) - p_{1t}(x = 0^+, t)$$

soit :

$$\mu_m e(i\omega) t \frac{A}{Z} \exp(i\omega t) = A(1 + r - t) \exp(i\omega t).$$

On conclut :

$$\frac{i\omega \mu_m e t}{Z} = 1 + r - t.$$

f) En associant les résultats des deux questions précédentes, on obtient :

$$\underline{t} = \frac{2}{2 + \frac{i\mu_m e \omega}{Z}}$$

g) On évalue les intensités sonores :

$$I_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p_{1i} v_{1i}^*) = \frac{A^2}{2Z}$$

puis :

$$I_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p_{1t} v_{1t}^*) = |\underline{t}|^2 \frac{A^2}{2Z}$$

On déduit :

$$T = \frac{I_t}{I_i} = |\underline{t}|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\mu_m e \omega}{2Z}\right)^2}$$

h) On vérifie déjà la relation  $T \leq 1$  : la puissance transmise est inférieure à celle incidente. On constate que les sons aigus sont moins bien transmis que les sons graves. Effectivement, les vibrations, par exemple dues à des passages de voiture, sont mieux transmises par les murs que des cris d'enfants.

Pour une bonne isolation, il faut diminuer le coefficient  $T$ . Pour cela, il faut prendre des murs épais ( $e$  importante) et de masse importante. On aurait pu s'en douter sans calcul !

i) On obtient  $T = 1,9 \cdot 10^{-5}$ .

Ainsi,  $I_{\text{int}} = T I_{\text{ext}}$  et  $I_{\text{dB, int}} = I_{\text{dB, ext}} + 10 \log T = 80 - 47 = 33 \text{ dB}$ . L'atténuation est importante.

## OD52 – Couche anti-reflet

1. On est dans le vide avec une onde plane progressive monochromatique (OPPM). On peut en déduire directement les différents champs électriques et magnétiques :

$$\vec{E}_1 = \underline{E}_1 \exp(j(\omega t - k_1 x)) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_1}{c} = \frac{\underline{E}_1}{c} \exp(j(\omega t - k_1 x)) \vec{u}_z$$

$$\vec{E}'_1 = \underline{E}'_1 \exp(j(\omega t + k_1 x)) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}'_1 = \frac{(-\vec{u}_x) \wedge \vec{E}'_1}{c} = \frac{-\underline{E}'_1}{c} \exp(j(\omega t + k_1 x)) \vec{u}_z$$

$$\vec{E}_2 = \underline{E}_2 \exp(j(\omega t - k_2 x)) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_2}{v_2} = \frac{\underline{E}_2}{c} n \exp(j(\omega t - k_2 x)) \vec{u}_z \text{ car } v_2 = \frac{c}{n}$$

$$\vec{E}'_2 = \underline{E}'_2 \exp(j(\omega t + k_2 x)) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}'_2 = \frac{(-\vec{u}_x) \wedge \vec{E}'_2}{v_2} = \frac{-n \underline{E}'_2}{c} \exp(j(\omega t + k_2 x)) \vec{u}_z$$

$$\vec{E}_3 = \underline{E}_3 \exp(j(\omega t - k_3 x)) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_3}{v_3} = \frac{\underline{E}_3}{c} N \exp(j(\omega t - k_3 x)) \vec{u}_z \text{ car } v_3 = \frac{c}{N}$$

On écrit les relations de passage du champ électrique et du champ magnétique pour  $x = 0$  :

$$\begin{cases} \underline{E}_1 + \underline{E}'_1 = \underline{E}_2 + \underline{E}'_2 \\ \underline{E}_1 - \underline{E}'_1 = n(\underline{E}_2 - \underline{E}'_2) \end{cases}$$

On écrit les relations de passage du champ électrique et du champ magnétique pour  $x = e$  :

$$\begin{cases} \underline{E}_2 e^{-j\varphi_2} + \underline{E}'_2 e^{+j\varphi_2} = \underline{E}_3 e^{-j\varphi_3} \\ n(\underline{E}_2 e^{-j\varphi_2} - \underline{E}'_2 e^{j\varphi_2}) = N \underline{E}_3 e^{-j\varphi_3} \end{cases} \text{ où } \varphi_2 = k_2 e \text{ et } \varphi_3 = k_3 e$$

2°) On suppose :  $\underline{E}'_1 = 0$  alors :

$$\begin{cases} \underline{E}_1 = \underline{E}_2 + \underline{E}'_2 \\ \underline{E}_1 = n(\underline{E}_2 - \underline{E}'_2) \end{cases} \Rightarrow \underline{E}_2 + \underline{E}'_2 = n(\underline{E}_2 - \underline{E}'_2) \Rightarrow \frac{\underline{E}'_2}{\underline{E}_2} = \frac{n-1}{n+1}$$

Des autres relations on obtient :

$$\begin{aligned} N(\underline{E}_2 e^{-j\varphi_2} + \underline{E}'_2 e^{+j\varphi_2}) - n(\underline{E}_2 e^{-j\varphi_2} - \underline{E}'_2 e^{j\varphi_2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (N-n)(\underline{E}_2 e^{-j\varphi_2}) + (N+n)(\underline{E}'_2 e^{j\varphi_2}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{E'_2}{E_2} = \frac{n - N}{n + N} e^{-2j\varphi_2}$$

Par conséquent on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \frac{n - N}{n + N} e^{-2j\varphi_2} &= \frac{n - 1}{n + 1} \\ \Leftrightarrow e^{-2j\varphi_2} &= \frac{n - 1}{n + 1} * \frac{n + N}{n - N} \end{aligned}$$

Les indices étant réels on forcément :  $\varphi_2 = 0 [\pi] \Rightarrow e^{-2j\varphi_2} = \pm 1$

1<sup>er</sup> cas :  $e^{-2j\varphi_2} = 1$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{n - 1}{n + 1} * \frac{n + N}{n - N} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{n^2 - n + nN - N}{n^2 - N + n - nN} = 1 \\ &\Rightarrow n^2 - n + nN - N = n^2 - N + n - nN \\ &\Rightarrow n(N - 1) = n(1 - N) \\ &\Rightarrow N = 1 \text{ ou } n = 0 \end{aligned}$$

Les deux solutions sont impossibles.

1<sup>er</sup> cas :  $e^{-2j\varphi_2} = -1$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{n - 1}{n + 1} * \frac{n + N}{n - N} = -1 \\ &\Rightarrow n^2 - n + nN - N = -n^2 + N - n + nN \\ &\Rightarrow n^2 - N = -n^2 + N \end{aligned}$$

Egalité réalisable si seulement si  $N = n^2 \Rightarrow n = \sqrt{N}$

3°) La condition :  $e^{-2j\varphi_2} = -1$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} 2k_2 e &= (2p + 1)\pi \\ \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_0} n e &= \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi \\ \Rightarrow e &= \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0}{2n} \end{aligned}$$

D'où :

$$e_{min} = \frac{\lambda_0}{4n}$$

# B – Exercices supplémentaires

## OD53 – Interface atmosphère – ionosphère

### 1. Onde incidente :

Le champ électrique incident s'écrit :  $\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$ .

On en déduit le champ magnétique incident :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{u}_i \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{\vec{u}_z \wedge E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x}{c} = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y$$

### Onde réfléchi :

Le champ électrique réfléchi s'écrit :  $\vec{E}_r = r E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x$ .

On en déduit le champ magnétique réfléchi :

$$\begin{aligned} \vec{B}_r &= \frac{-\vec{u}_z \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{-\vec{u}_z \wedge r E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x}{c} \\ &= \frac{-r E_0}{c} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_y \end{aligned}$$

### Onde transmise :

Il ne faut pas oublier l'indice  $n$  puisqu'on est dans le plasma.

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit :

$$\text{rot } \vec{E} = -i \vec{k}_t \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i \omega \vec{B},$$

d'où  $\vec{B} = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}}{\omega}$  avec  $\omega = k_t v = k_t \frac{c}{n}$ .

On a vu dans l'exercice sur le plasma que  $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ , soit

$$\omega = k \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}.$$

Le champ électrique transmis s'écrit :  $\vec{E}_t = t E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$ .

On en déduit le champ magnétique transmis :

$$\vec{B}_t = n \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_t}{c} = n \frac{\vec{u}_z \wedge t E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x}{c} = \frac{nt E_0}{c} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y$$

D'après l'énoncé, on admet la continuité du champ électromagnétique en  $z = 0$ .

### Côté 1 : $z = 0^-$

Le champ électrique est :  $\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r$ .

Le champ magnétique est :  $\vec{B}_1 = \vec{B}_i + \vec{B}_r$ .

### Côté 2 : $z = 0^+$

Le champ électrique est :  $\vec{E}_2 = \vec{E}_t$ .

Le champ magnétique est :  $\vec{B}_2 = \vec{B}_t$ .

On a donc pour  $z = 0$  :

$$\begin{cases} \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t \\ \vec{B}_i + \vec{B}_r = \vec{B}_t \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} E_0 + \underline{r}E_0 = \underline{t}E_0 \\ \frac{E_0}{c} - \frac{\underline{r}E_0}{c} = \frac{\underline{t}E_0}{c} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ 1 - \underline{r} = \underline{t} \end{cases}$$

On en déduit que  $1 - \underline{r} = n(1 - \underline{r})$ ,

$$\text{soit } \underline{r} = \frac{1-n}{1+n} \text{ et } \underline{t} = 1 + \underline{r} = 1 + \frac{1-n}{1+n} = \frac{2}{1+n}.$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \frac{1-n}{1+n} \\ \underline{t} &= \frac{2}{1+n} \end{aligned}$$

Le coefficient de réflexion en puissance vaut :

$$R = \frac{\text{puissance moyenne réfléchie}}{\text{puissance moyenne incidente}}$$

### Onde incidente :

Le vecteur de Poynting de l'onde incidente est :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_i &= \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x}{\mu_0} \wedge \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y \\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z \end{aligned}$$

La moyenne du vecteur de Poynting de l'onde incidente est :  $\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$

On considère une surface  $\vec{dS} = dS \vec{u}_z$ .

La puissance moyenne transportée par l'onde incidente est :

$$P_{moy,i} = \langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot dS \vec{u}_z = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} dS$$

### Onde réfléchie :

On pose  $\underline{r} = r \exp(i\phi)$  avec  $r$  réel positif.

Le vecteur de Poynting de l'onde réfléchie est :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_r &= \frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r}{\mu_0} \\ &= \frac{rE_0 \cos(\omega t + kz + \phi) \vec{u}_x}{\mu_0} \wedge \frac{-rE_0}{c} \cos(\omega t + kz + \phi) \vec{u}_y \end{aligned}$$

On a donc :

$$\vec{\Pi}_r = \frac{-r^2 E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + kz + \phi) \vec{u}_z$$

La moyenne du vecteur de Poynting de l'onde réfléchie est :

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{r^2 E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$$

On considère une surface  $\vec{dS} = -dS \vec{u}_z$  car l'onde se propage dans le sens  $(-\vec{u}_z)$ .

La puissance moyenne transportée par l'onde réfléchie est :

$$P_{moy,r} = \langle \vec{\Pi}_r \rangle \cdot (-dS \vec{u}_z) = r^2 \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} dS$$

### Onde transmise :

Dans la suite de l'exercice,  $\underline{t}$  est réel et sera noté  $t$ .

Le vecteur de Poynting de l'onde transmise est :

$$\vec{\Pi}_t = \frac{\vec{E}_t \wedge \vec{B}_t}{\mu_0} = \frac{t E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x}{\mu_0} \wedge \frac{nt E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{u}_y$$

On a donc :

$$\vec{\Pi}_t = \frac{nt^2 E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z$$

La moyenne du vecteur de Poynting de l'onde transmise est :

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = n \frac{t^2 E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$$

On considère une surface  $\vec{dS} = dS \vec{u}_z$ .

La puissance moyenne transportée par l'onde transmise est :

$$P_{moy,t} = \langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot dS \vec{u}_z = n \frac{t^2 E_0^2}{2\mu_0 c} dS$$

Le coefficient de réflexion en puissance est :

$$R = \frac{P_{moy,r}}{P_{moy,i}} = r^2 = |\underline{r}|^2 = \left| \frac{1-n}{1+n} \right|^2$$

Le coefficient de réflexion en amplitude peut être complexe (voir question 2). Il faut calculer le module de  $\underline{r}$  pour calculer  $R$ .

Le coefficient de transmission en puissance est :

$$T = \frac{P_{moy,t}}{P_{moy,i}} = nt^2 = n \left( \frac{2}{1+n} \right)^2$$

On calcule la somme  $R + T$  :

$$R + T = \left( \frac{1-n}{1+n} \right)^2 + \frac{4n}{(1+n)^2} = \frac{1+n^2-2n+4n}{(1+n)^2} = \frac{(1+n)^2}{(1+n)^2} = 1$$

On a bien  $R + T = 1$ . Cette relation traduit la conservation de la puissance : toute la puissance de l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchie et l'onde transmise.

2. On a vu que  $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ . L'indice est donc complexe.

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = i^2 \left( \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right). \text{ On a donc } n = \pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = \pm i X \text{ en}$$

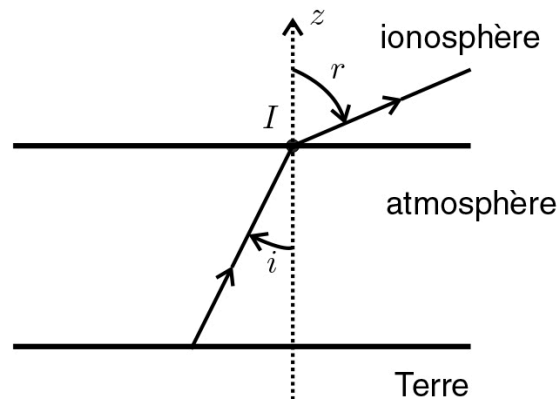
$$\text{posant } X = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}.$$

$$\text{Le coefficient } R \text{ vaut : } R = \left| \frac{1-n}{1+n} \right|^2 = \frac{1+X^2}{1+X^2} = 1. \text{ On a donc :}$$

$$R = 1$$

L'interface ionosphère-atmosphère peut être assimilée à une surface parfaitement réfléchissante (miroir plan).

3.



**Premier cas :**  $f < f_p$

On a vu qu'il y a toujours réflexion totale.

**Deuxième cas :**  $f > f_p$

On applique les lois de Descartes au point d'incidence  $I$  :  $\sin i = n \sin r$ ,

d'où  $\sin r = \frac{\sin i}{n}$ . On a réflexion totale si  $\frac{\sin i}{n} > 1$ .

On pose  $\lambda = \text{Arcsin}(n)$ .

Si  $i > \lambda$ , on a une réflexion totale.

Si  $i < \lambda$ , une onde de fréquence  $f$  peut traverser l'interface.

**ue :** l'indice  $n$  dépend de la fréquence de l'onde. On a dispersion de la

4. Application numérique :  $\lambda = \text{Arcsin}(n) = \text{Arcsin} \left( \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}} \right) = 55^\circ$

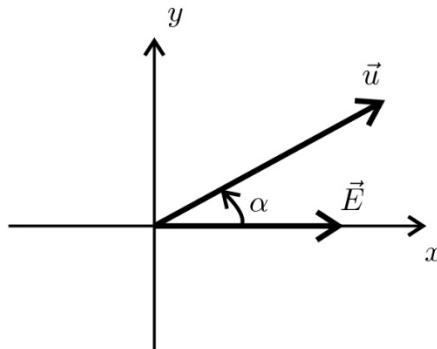
Si l'angle d'incidence est supérieur à  $55^\circ$ , l'onde incidente ne traversera plus l'interface et on aura réflexion totale.



## OD54 – Polarisation des ondes

1. Le champ électrique à l'entrée de l'analyseur en  $z = 0$  est :

$$\vec{E}_{\text{entrée}} = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$$



Le champ électrique à la sortie de l'analyseur en  $z = 0$  est :

$$\vec{E}_{\text{sortie}} = (\vec{E}_{\text{entrée}} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u} = E_0 \cos(\omega t) \cos \alpha \vec{u}$$

On obtient une onde polarisée rectilignement suivant  $\vec{u}$ . L'éclairement de l'onde en sortie est :

$$\varepsilon = K \left\langle \left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 \right\rangle$$

On a alors :

$$\left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 = (E_0 \cos(\omega t) \cos \alpha)^2$$

On en déduit la moyenne temporelle :  $\left\langle \left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 \right\rangle = \frac{1}{2} (E_0 \cos \alpha)^2$ .

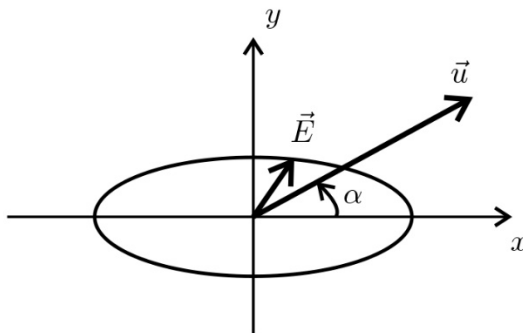
L'éclairement de l'onde en sortie est donc :

$$\varepsilon = \frac{K}{2} E_0^2 \cos^2 \alpha = \varepsilon_0 \cos^2 \alpha$$

Cette loi est appelée loi de Malus.

2. Le champ électrique à l'entrée de l'analyseur en  $z = 0$  est :

$$\vec{E}_{\text{entrée}} = E_{0x} \cos(\omega t) \vec{u}_x + E_{0y} \sin(\omega t) \vec{u}_y$$



Le champ électrique à la sortie de l'analyseur en  $z = 0$  est :

$$\vec{E}_{\text{sortie}} = (\vec{E}_{\text{entrée}} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u} = (E_{0x} \cos(\omega t) \cos \alpha + E_{0y} \sin(\omega t) \sin \alpha) \vec{u}$$

On obtient une onde polarisée rectilignement suivant  $\vec{u}$ .

L'éclairement de l'onde en sortie est :

$$\varepsilon = K \left\langle \left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 \right\rangle$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 &= (E_{0x} \cos(\omega t) \cos \alpha)^2 + (E_{0y} \sin(\omega t) \sin \alpha)^2 \\ &\quad + 2E_{0x} \cos(\omega t) \cos \alpha E_{0y} \sin(\omega t) \sin \alpha \end{aligned}$$

On en déduit la moyenne temporelle :

$$\left\langle \left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 \right\rangle = \frac{1}{2} (E_{0x} \cos \alpha)^2 + \frac{1}{2} (E_{0y} \sin \alpha)^2$$

L'éclairement de l'onde en sortie est donc :

$$\varepsilon = \frac{K}{2} (E_{0x}^2 \cos^2 \alpha + E_{0y}^2 \sin^2 \alpha)$$

**3.** Pour une onde plane progressive monochromatique (OPPM) polarisée rectilignement suivant  $Ox$ , la vitesse de l'onde est :  $v_x = \frac{c}{n_x}$ .

Pour une OPPM polarisée rectilignement suivant  $Oy$ , la vitesse de l'onde est :

$$v_y = \frac{c}{n_y}$$

Comme  $Oy$  est l'axe rapide, on a donc  $v_y > v_x$ , soit :

$$n_y < n_x$$

**Cours :** Les axes  $Ox$  et  $Oy$  sont appelés les lignes neutres de la lame. On pose  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

Avant la lame, on considère un champ électrique de la forme :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_{0y} \cos(\omega t - k_0 z + \phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans la lame, le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - n_x k_0 z) \\ E_{0y} \cos(\omega t - n_y k_0 z + \phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

À la sortie de la lame ( $z = e$ ), le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - n_x k_0 e) \\ E_{0y} \cos(\omega t - n_y k_0 e + \phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après la lame, le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - k_0(z - e) - n_x k_0 e) \\ E_{0y} \cos(\omega t - k_0(z - e) - n_y k_0 e + \phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc un déphasage entre la composante du champ électrique suivant  $Oy$  et la composante du champ électrique suivant  $Ox$  du au passage dans la lame d'épaisseur  $e$  :

$$\Delta\phi = n_x k_0 e - n_y k_0 e = \frac{2\pi}{\lambda} (n_x - n_y) e$$

Soit une différence de marche :

$$\delta = (n_x - n_y) e$$

Le champ électrique après la lame peut s'écrire en changeant l'origine des temps :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_{0y} \cos(\omega t - k_0 z + \phi + \Delta\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

La différence de chemin optique entre la composante du champ électrique suivant  $Oy$  et la composante du champ électrique suivant  $Ox$  est  $\frac{\lambda}{4}$ . On a donc :

$$\frac{\lambda}{4} = (n_x - n_y) e$$

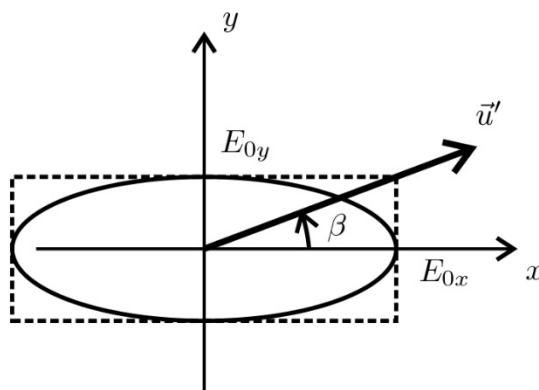
4. Pour la lame  $\frac{\lambda}{4}$ , on a un déphasage de  $\frac{\pi}{2}$  entre la composante du champ électrique suivant  $Oy$  et la composante du champ électrique suivant  $Ox$  au passage dans la lame, d'où :

$$\vec{E}_{\text{sortie}} = E_{0x} \cos(\omega t - k_0 z) \vec{u}_x + E_{0y} \sin\left(\omega t - k_0 z + \frac{\pi}{2}\right) \vec{u}_y$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{sortie}} &= E_{0x} \cos(\omega t - k_0 z) \vec{u}_x + E_{0y} \cos(\omega t - k_0 z) \vec{u}_y \\ &= \cos(\omega t - k_0 z) (E_{0x} \vec{u}_x + E_{0y} \vec{u}_y) \end{aligned}$$

C'est une OPPM polarisée rectilignement suivant le vecteur  $\vec{u}'$ .



L'angle  $\beta$  est défini par :

$$\begin{cases} \tan \beta = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \\ \cos \beta = \frac{E_{0x}}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}} \end{cases}$$

Comme les lignes neutres de la lame coïncident avec les axes de l'ellipse, la lame quart d'onde transforme une onde polarisée elliptiquement en une onde polarisée rectilignement.

## OD55 – Coefficients de réflexion et transmission

### 1. Onde incidente :

La vitesse particulière est :  $\underline{u}_i = u_{i0} \exp(i(\omega t - k_1 x))$ .

L'impédance acoustique est :  $Z_{a1} = \frac{p_{i0}}{u_{i0}} = \mu_1 c_1$ . On en déduit la surpression :

$$\underline{p}_i = \mu_1 c_1 u_{i0} \exp(i(\omega t - k_1 x))$$

avec  $\omega = k_1 c_1$ .

### Onde transmise :

La vitesse particulière est :  $\underline{u}_t = u_{t0} \exp(i(\omega t - k_2 x))$ .

L'impédance acoustique est :  $Z_{a2} = \frac{p_{t0}}{u_{t0}} = \mu_2 c_2$ . On en déduit la surpression :

$$\underline{p}_t = \mu_2 c_2 u_{t0} \exp(i(\omega t - k_2 x))$$

avec  $\omega = k_2 c_2$ .

On suppose qu'il n'existe pas d'onde réfléchie. Les relations de continuité de la vitesse particulière et de la pression s'écrivent en  $x = 0$  :

$$\begin{cases} \underline{u}_i(0, t) = \underline{u}_t(0, t) \\ \mu_1 c_1 \underline{u}_i(0, t) = \mu_2 c_2 \underline{u}_t(0, t) \end{cases}$$

On devrait donc avoir :  $Z_{a1} = Z_{a2}$  ce qui est impossible puisque les deux milieux sont différents. Il existe donc une onde réfléchie.

### Onde réfléchie :

La vitesse particulière est :  $\underline{u}_r = u_{r0} \exp(i(\omega t + k_1 x))$ .

L'impédance acoustique est :  $\frac{p_{r0}}{u_{r0}} = -Z_{a1} = -\mu_1 c_1$ . On en déduit la surpression :

$$\underline{p}_r = -\mu_1 c_1 u_{r0} \exp(i(\omega t + k_1 x))$$

On définit  $r$  et  $t$  les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour la vitesse :  $r = \frac{u_{r0}}{u_{i0}}$  et  $t = \frac{u_{t0}}{u_{i0}}$ .

Finalement, on a :

$$\begin{cases} \underline{u}_i = u_{i0} \exp(i(\omega t - k_1 x)) \\ \underline{p}_i = \mu_1 c_1 u_{i0} \exp(i(\omega t - k_1 x)) \\ \underline{u}_r = r u_{i0} \exp(i(\omega t + k_1 x)) \\ \underline{p}_r = -\mu_1 c_1 r u_{i0} \exp(i(\omega t + k_1 x)) \\ \underline{u}_t = t u_{i0} \exp(i(\omega t - k_2 x)) \\ \underline{p}_t = \mu_2 c_2 t u_{i0} \exp(i(\omega t - k_2 x)) \end{cases}$$

On écrit les conditions aux limites en  $x = 0$  : continuité de la vitesse particulière et de la surpression :

$$\begin{cases} \underline{u}_1(0, t) = \underline{u}_2(0, t) \\ \underline{p}_1(0, t) = \underline{p}_2(0, t) \end{cases}$$

On doit donc avoir :

$$\begin{cases} \underline{u}_i(0, t) + \underline{u}_r(0, t) = \underline{u}_t(0, t) \\ \underline{p}_i(0, t) + \underline{p}_r(0, t) = \underline{p}_t(0, t) \end{cases}$$

Finalement, on obtient un système à deux équations et deux inconnues permettant de calculer  $r$  et  $t$  :

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ \mu_1 c_1 - \mu_1 c_1 r = \mu_2 c_2 t \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ 1 - r = \alpha t \end{cases}$$

On fait la somme des deux équations :  $2 = t(1 + \alpha)$ . D'où :

$$t = \frac{2}{1 + \alpha}$$

Comme  $r = t - 1$ , on en déduit :  $r = \frac{2}{1 + \alpha} - 1$ . Finalement, on a :

$$r = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

## 2. Onde incidente :

Le vecteur de Poynting sonore pour l'onde incidente est :  $\vec{\Pi}_i = p_i u_i \vec{u}_x$

On a alors :  $\vec{\Pi}_i = \mu_1 c_1 u_{i0}^2 \cos^2(\omega t - k_1 x) \vec{u}_x$ .

Le signe + traduit la propagation de l'onde dans le sens des  $x > 0$ .

Comme la moyenne de la fonction  $\cos^2$  sur une période vaut  $\frac{1}{2}$ , on en déduit

la moyenne du vecteur de Poynting sonore :  $\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{1}{2} \mu_1 c_1 u_{i0}^2 \vec{u}_x$

La puissance moyenne de l'onde incidente est :

$$\langle P_i \rangle = \iint_S \langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot dS \vec{u}_x = \frac{1}{2} \mu_1 c_1 u_{i0}^2 S$$

## Onde réfléchie :

Le vecteur de Poynting sonore pour l'onde réfléchie est :  $\vec{\Pi}_r = -p_r u_r \vec{u}_x$

On a alors :  $\vec{\Pi}_r = -\mu_1 c_1 r^2 u_{i0}^2 \cos^2(\omega t + k_1 x) \vec{u}_x$ .

Le signe - traduit la propagation de l'onde dans le sens des  $x < 0$ .

La moyenne du vecteur de Poynting sonore est :  $\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{1}{2} \mu_1 c_1 r^2 u_{i0}^2 \vec{u}_x$

La puissance moyenne de l'onde réfléchie est :

$$\langle P_r \rangle = \iint_S \langle \vec{\Pi}_r \rangle \cdot (-dS \vec{u}_x) = \frac{1}{2} \mu_1 c_1 r^2 u_{i0}^2 S$$

## Onde transmise :

Le vecteur de Poynting sonore pour l'onde transmise est :  $\vec{\Pi}_t = p_t u_t \vec{u}_x$

On a alors :  $\vec{\Pi}_t = \mu_2 c_2 t^2 u_{i0}^2 \cos^2(\omega t - k_2 x) \vec{u}_x$ .

Le signe + traduit la propagation de l'onde dans le sens des  $x > 0$ .

La moyenne du vecteur de Poynting sonore est :

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{1}{2} \mu_2 c_2 t^2 u_{i0}^2 \vec{u}_x$$

La puissance moyenne de l'onde transmise est :

$$\langle P_t \rangle = \iint_S \langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot (dS \vec{u}_x) = \frac{1}{2} (\alpha \mu_1 c_1) t^2 u_{i0}^2 S$$

On en déduit le coefficient de réflexion  $R$  en puissance moyenne :  $R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = r^2$

Le coefficient de transmission  $T$  en puissance moyenne est :  $T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \alpha t^2$

On calcule la somme  $R + T$  :

$$R + T = \left( \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2} = \frac{1 + \alpha^2 - 2\alpha + 4\alpha}{(1 + \alpha)^2}$$

En simplifiant, on a :

$$R + T = \frac{(1 + \alpha)^2}{(1 + \alpha)^2} = 1$$

Cette relation traduit la conservation de la puissance à la surface  $S$  d'abscisse  $x = 0$  : la puissance de l'onde incidente se répartit entre l'onde réfléchie et l'onde transmise.

Cas particulier si  $Z_{a2} \gg Z_{a1}$  : on a  $\alpha \gg 1$ . On en déduit les expressions

approchées de  $r$  et  $t$  :  $r = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \approx -1$  et  $t = \frac{2}{1 + \alpha} \approx 0$ . Ce cas corres-

pond à la réflexion sur un mur. Toute la puissance de l'onde incidente est réfléchie. On vérifie que l'on a  $R = 1$  et  $T = 0$ .

## OD56 – Transmission à travers une membrane

### 1. Onde incidente :

La surpression est :

$$\underline{p}_i = p_{i0} \exp(i(\omega t - kx))$$

L'impédance acoustique est :  $Z_a = \frac{p_{i0}}{u_{i0}} = \mu_0 c$ . On en déduit la vitesse particulière :

$$\underline{u}_i = \frac{p_{i0}}{\mu_0 c} \exp(i(\omega t - kx))$$

avec  $\omega = kc$ .

### Onde réfléchie :

La surpression est :

$$\underline{p}_r = r p_{i0} \exp(i(\omega t + kx))$$

L'impédance acoustique est :  $\frac{p_{r0}}{u_{r0}} = -Z_a = -\mu_0 c$ . On en déduit la vitesse particulière :

$$\underline{u}_r = -\frac{r p_{i0}}{\mu_0 c} \exp(i(\omega t + kx))$$

avec  $\omega = kc$ .

### Onde transmise :

La surpression est :

$$\underline{p}_t = t p_{i0} \exp(i(\omega t - kx))$$

L'impédance acoustique est :  $Z_a = \frac{p_{i0}}{u_{i0}} = \mu_0 c$ . On en déduit la vitesse particulière :

$$\underline{u}_t = \frac{t p_{i0}}{\mu_0 c} \exp(i(\omega t - kx))$$

avec  $\omega = kc$ .

### Expressions de la surpression et de la vitesse particulière dans chaque milieu :

Dans le milieu 1, on a :  $\underline{p}_1 = \underline{p}_i + \underline{p}_r$ .

Dans le milieu 2, on a :  $\underline{u}_2 = \underline{u}_t$ .

### Continuité de la vitesse particulière pour $x = 0$ :

$$\underline{u}_1(0, t) = \underline{u}_2(0, t)$$

On a donc :

$$\underline{u}_i(0, t) + \underline{u}_r(0, t) = \underline{u}_t(0, t)$$

On obtient finalement :

$$1 - r = t$$

### Théorème de la quantité de mouvement à la membrane :

Bilan des actions :

- Forces de pression exercées par la région 1 :

$$\underline{p}_1 S \vec{u}_x = (\underline{p}_i(0, t) + \underline{p}_r(0, t)) S \vec{u}_x$$

- Forces de pression exercées par la région 2 :  $-\underline{p}_2 S \vec{u}_x = -(\underline{p}_t(0, t)) S \vec{u}_x$ .

La masse de la membrane est  $m = \sigma S$ .

La membrane vibre en bloc d'après l'énoncé, on a :

$$\vec{v}_{\text{membrane}} = \underline{u}_1(0,t) = \underline{u}_2(0,t) = \underline{u}_t(0,t)$$

On applique le théorème de la quantité de mouvement à la membrane :

$$m \frac{d\vec{v}_{\text{membrane}}}{dt} = (p_1 - p_2) S \vec{u}_x$$

On a donc :

$$\sigma S \frac{d\underline{u}_t(0,t)}{dt} = \left( \underline{p}_i(0,t) + \underline{p}_r(0,t) - \underline{p}_t(0,t) \right) S$$

On en déduit :

$$\sigma \frac{\underline{t}}{\mu_0 c} i\omega = (1 + \underline{r} - \underline{t})$$

**Équations pour déterminer  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$  :**

$$\begin{cases} 1 - \underline{r} = \underline{t} \\ 1 + \underline{r} = \underline{t} \left( 1 + i \frac{\sigma\omega}{\mu_0 c} \right) \end{cases}$$

On fait la somme des deux équations :

$$2 = \underline{t} \left( 2 + i \frac{\sigma\omega}{\mu_0 c} \right)$$

On en déduit le coefficient de transmission en amplitude pour la surpression :

$$\underline{t} = \frac{1}{1 + i \frac{\sigma\omega}{2\mu_0 c}} = \frac{1}{1 + i \frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec  $\omega_0 = \frac{2\mu_0 c}{\sigma}$ .

Le coefficient de transmission est donc un filtre passe-bas du premier ordre.

On pose :

$$\underline{t} = t \exp(i\phi)$$

avec

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Si la pulsation de l'onde incidente est trop grande, l'onde sonore ne traverse plus la membrane et toute la puissance de l'onde est réfléchi.

## 2. Onde incidente :

Le vecteur de Poynting sonore pour l'onde incidente est :

$$\vec{\Pi}_i = p_i u_i \vec{u}_x = \frac{p_{i0}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$$

La moyenne du vecteur de Poynting sonore pour l'onde incidente est :

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{p_{i0}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$$

La puissance moyenne de l'onde incidente est :

$$\langle P_i \rangle = \iint_S \langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot dS \vec{u}_x = \frac{1}{2} \frac{p_{i0}^2}{\mu_0 c} S$$

### Onde transmise :

Le vecteur de Poynting sonore pour l'onde transmise est :

$$\vec{\Pi}_t = p_t u_t \vec{u}_x = \frac{t^2 p_{i0}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx + \phi) \vec{u}_x$$

La moyenne du vecteur de Poynting sonore pour l'onde transmise est :

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{t^2 p_{i0}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$$

La puissance moyenne de l'onde transmise est :

$$\langle P_t \rangle = \iint_S \langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot dS \vec{u}_x = \frac{1}{2} \frac{t^2 p_{i0}^2}{\mu_0 c} S$$

Le coefficient de transmission en puissance est :

$$T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Le coefficient de transmission en puissance peut s'exprimer en décibels :

$$T_{\text{dB}} = 10 \log T = -10 \log \left( 1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 \right)$$

On cherche à avoir  $T_{\text{dB}} = -70$ , soit :

$$70 = 10 \log \left( 1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 \right)$$

On doit donc avoir :

$$1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 = 10^7$$

Soit :

$$f_0 = \frac{f}{\sqrt{10^7 - 1}}$$

D'après l'énoncé,  $f = 2000$  Hz. On en déduit :  $f_0 = 0,63$  Hz.

On a vu que :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\mu_0 c}{\sigma}$$

On a donc :

$$\sigma = \frac{2\mu_0 c}{2\pi f_0} = 222 \text{ kg.m}^{-2}$$



## OD57 - Réflexion sur un conducteur parfait

1. On remarque que le champ électrique est nul pour  $z = 0$ . La composante tangentielle du champ électrique doit être nulle pour  $z = 0$ .  
On doit donc avoir pour tout instant  $t$  :

$$E_0 \exp(i(\omega t)) = 0$$

Cette condition n'est pas réalisée si  $E_0 \neq 0$ . On a donc nécessairement une onde réfléchie. Elle se met sous la forme la plus générale :  
 $\vec{E}_r = \underline{E}_{r0} \exp(i(\omega' t + k' z)) \vec{u}_x$ .

La composante tangentielle du champ électrique doit être nulle pour  $z = 0$ .  
On doit donc avoir pour tout instant  $t$  :

$$E_0 \exp(i(\omega t)) + \underline{E}_{r0} \exp(i\omega' t) = 0$$

Pour que cette relation soit vérifiée pour tout instant  $t$ , on a nécessairement  $\omega = \omega'$  et comme la relation de dispersion est  $\omega = kc$ , alors  $k' = k$ .  
L'amplitude de l'onde réfléchie doit vérifier la relation :

$$\underline{E}_{r0} = -E_0$$

Le champ électrique de l'onde réfléchie est :

$$\vec{E}_r = -E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x$$

2.

**Onde incidente :**

On a une onde plane progressive monochromatique (OPPM) qui se propage dans le vide. La champ magnétique est donné par la relation :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{k\vec{u}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{\vec{u}_z \wedge E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x}{c}$$

Soit :

$$\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y$$

**Onde réfléchie :**

On peut utiliser le même formalisme pour l'onde réfléchie.

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{(-\vec{u}_z) \wedge (-E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x)}{c}$$

Soit :

$$\vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_y$$

**Calcul du champ électrique résultant :**

$$\begin{aligned} \underline{E} &= E_0 \exp(i(\omega t - kz)) - E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \\ &= E_0 \exp(i\omega t) [\exp(-ikz) - \exp(ikz)] \end{aligned}$$

D'où

$$\underline{E} = -2i E_0 \exp(i\omega t) \sin(kz) = 2E_0 \exp\left(i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right) \sin(kz)$$

On peut mettre le champ électrique complexe sous la forme :

$$\underline{E} = -2i E_0 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \sin(kz)$$

En notation réelle, on a :

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \vec{u}_x$$

**Calcul du champ magnétique résultant :**

$$\begin{aligned} \underline{B} &= \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kz)) + \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t + kz)) \\ &= \frac{E_0}{c} \exp(i\omega t) [\exp(-ikz) + \exp(ikz)] \end{aligned}$$

D'où :  $\underline{B} = \frac{2E_0}{c} \exp(i\omega t) \cos(kz)$

En notation réelle, on a :  $\vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{u}_y$

On obtient une **onde stationnaire**. Elle ne se propage pas car elle est de la forme  $f(z)g(t)$ .

**3.** On doit avoir en  $z = -\ell$  un champ électrique nul pour vérifier les conditions de passage pour le champ électrique :

$$\vec{E}(-\ell) = \vec{0} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(-k\ell) \vec{u}_x$$

soit  $k\ell = N\pi$  avec  $N$  entier.

$k$  est le module du vecteur d'onde, appelé module d'onde. On a :

$$k\ell = \frac{2\pi}{\lambda} \ell = N\pi$$

D'où :

$$\lambda = \frac{2\ell}{N}$$

La fréquence est notée  $f$  ou  $\nu$ . Elle est reliée à la longueur d'onde  $\lambda$  par la relation :

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = \frac{2\ell}{N}$$

La fréquence de l'onde doit vérifier la relation :

$$\nu = N \frac{c}{2\ell}$$

avec  $N$  entier positif.

**Relation de passage pour  $z = 0$  :**

On appelle côté 1 la région  $z = 0^+$  et côté 2 la région  $z = 0^-$ .

Le champ magnétique dans la région 1 est nul :  $\vec{B}_1 = \vec{0}$ .

Le champ magnétique dans la région 2 a été calculé précédemment.

Pour  $z = 0$ , on a :  $\vec{B}_2 = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_y$ .

La relation de passage s'écrit :  $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge (-\vec{u}_z)$

On peut également l'écrire sous la forme :  $\mu_0 \vec{j}_S = (-\vec{u}_z) \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)$

On obtient finalement :  $\vec{j}_S = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{u}_x$

**Relation de passage pour  $z = -\ell$  :**

$z = -\ell$  : On appelle côté 1 la région  $z = -\ell^-$  et côté 2 la région  $z = -\ell^+$ .

Le champ magnétique dans la région 1 est nul :  $\vec{B}_1 = \vec{0}$ .

Le champ magnétique dans la région 2 a été calculé précédemment.

Pour  $z = -\ell$ , on a :  $\vec{B}_2 = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(-k\ell) \vec{u}_y$ .

La relation de passage s'écrit :  $\mu_0 \vec{j}_S = (\vec{u}_z) \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)$ .

D'où :

$$\mu_0 \vec{j}_S = \vec{u}_z \wedge \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(-k\ell) \vec{u}_y = \frac{-2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(N\pi) \vec{u}_x$$

On obtient finalement :

$$\vec{j}_S = \frac{-2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \cos(N\pi) \vec{u}_x$$

**Interprétation physique**

On obtient des courants surfaciques pour  $z = 0$  et  $z = -\ell$ .

L'onde incidente qui arrive sur le métal met en mouvement les électrons qui sont à l'origine d'un champ réfléchi de même pulsation puisque les équations de Maxwell sont linéaires.

Comme le conducteur est parfait, les courants sont surfaciques.

4. La densité volumique d'énergie électromagnétique est :

$$\begin{aligned} u_{em} &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \\ &= \frac{4\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kz)}{2} + \frac{4E_0^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(kz)}{2\mu_0 c^2} \end{aligned}$$

soit :  $u_{em} = 2\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kz) + 2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(kz)$

La moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique est :

$$\langle u_{em} \rangle = 2\varepsilon_0 E_0^2 \frac{1}{2} \sin^2(kz) + 2\varepsilon_0 E_0^2 \frac{1}{2} \cos^2(kz)$$

Finalement, on obtient :  $\langle u_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2$

L'énergie électromagnétique moyenne localisée dans le cylindre de section  $S$  et de longueur  $\ell$  est :  $\langle U_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 S \ell$

## OD58 – Plasma

## A - Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

1. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron donne :  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$ , soit en régime forcé :  $im\omega \vec{v} = -e\vec{E}$ . Le vecteur densité de courant étant égal à  $\vec{j} = -ne\vec{v}$ , nous en déduisons :  $\vec{j} = \frac{-in_0e^2}{m\omega} \vec{E}$ . On peut donc associer au plasma la conductivité complexe :  $\underline{\gamma} = \frac{-in_0e^2}{m\omega}$ .

2. Maintenant, le champ électrique s'accompagne d'un champ magnétique. L'équation du mouvement d'un électron devient :  $m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -e\vec{E}(\vec{r}, t) - e \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B}(\vec{r}, t)$ .

Comme dans l'étude du modèle de l'électron élastiquement lié, cette équation se simplifie car les électrons ne sont pas relativistes :

- l'action du champ magnétique de l'onde est négligeable devant celle du champ électrique,
- le champ électrique apparaît comme uniforme à l'échelle du déplacement des électrons.

En effet,  $\|\vec{F}_m\| \sim evB$ , or  $\|\vec{B}\| \sim \frac{kE}{\omega}$  avec  $\frac{k}{\omega} \sim c$ , donc  $\frac{\|\vec{F}_m\|}{\|\vec{F}_e\|} \sim \frac{v}{c} \ll 1$ .

Et  $\frac{\|\vec{r}\|}{\lambda} \sim \frac{v}{\omega\lambda} \sim \frac{kv}{\omega} \sim \frac{v}{\frac{c}{\omega}} \ll 1$ , donc le terme  $\vec{k} \cdot \vec{r}$  peut être considéré comme constant et inclus dans la phase de  $\vec{E}_0$ .

L'équation du mouvement devient :  $m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -e\vec{E}_0 \exp i\omega t$ . C'est la même qu'à la question précédente. Le résultat de la question 1 est donc encore valable.

Il reste à étudier la densité volumique de charges. En combinant l'équation de Maxwell-Gauss, l'équation locale de conservation de la charge et la relation entre  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$  établie précédemment et en recherchant  $\rho$  sous la forme d'onde plane  $\underline{\rho} = \underline{\rho}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$ ,

nous obtenons :  $i\omega \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \underline{\rho}_0 = 0$  où  $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0e^2}{m\epsilon_0}}$ . Si  $\omega \neq \omega_p$  (ce que nous supposons dans la suite),  $\underline{\rho} = 0$ .

Les équations de Maxwell en notations complexes dans le plasma s'écrivent donc  $i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ ,  $-i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ ,  $-i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega\vec{B}$  et  $-i\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0\vec{j} + i\omega\epsilon_0\vec{E} = i\omega\mu_0\epsilon_0 \left(\frac{\underline{\gamma}}{i\epsilon_0\omega} + 1\right) \vec{E} =$

$i\omega\mu_0\underline{\epsilon}\vec{E}$ , où  $\underline{\epsilon} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$ . Elles prennent la même forme que dans le vide à condition de remplacer  $\epsilon_0$  par  $\underline{\epsilon}$ . La relation entre  $k$  et  $\omega$  est donc :  $k^2 = \underline{\epsilon}\mu_0\omega^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$ .

Pour  $\omega > \omega_p$  : le module d'onde  $k$  est réel. Il s'écrit :  $k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$ . Pour  $\omega < \omega_p$  : le vecteur d'onde est imaginaire pur, de la forme  $k = \pm ik''$  avec :  $k'' = \frac{1}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$ . L'onde ne se propage pas.

## B - Réflexion/Transmission d'une onde à la surface d'un plasma

1. Les équations étant linéaires, les ondes incidente, réfléchi et transmise ont même pulsation. Elles s'écrivent :

- Onde incidente :  $\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{e}_y$  et  $\vec{B}_i = \frac{k}{\omega} E_0 \exp(i(\omega t - kx))$  ;
- Onde réfléchi :  $\vec{E}_r = r E_0 \exp(i(\omega t + kx)) \vec{e}_y$  et  $\vec{B}_r = -\frac{k}{\omega} r E_0 \exp(i(\omega t + kx)) \vec{e}_z$  ;
- Onde transmise :  $\vec{E}_t = t E_0 \exp(i(\omega t - k_P x)) \vec{e}_y$  et  $\vec{B}_t = \frac{k_P}{\omega} t E_0 \exp(i(\omega t - k_P x)) \vec{e}_z$  ;

avec  $k = \frac{\omega}{c}$  (dans le vide) et  $k_P^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_P^2)$  (dans le plasma).

Le champ électrique est tangentiel, il est donc continu en  $x = 0$ . Le plasma est siège d'un courant volumique, il n'y a donc pas de densité surfacique de courant à l'interface et le champ magnétique est continu en  $x = 0$ . On en déduit :

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ k(1 - r) = k_P t \end{cases} \Rightarrow r = \frac{k - k_P}{k + k_P} \quad t = \frac{2k}{k + k_P}$$

Pour  $\omega > \omega_P$  :  $k_P$  est réel, égal à  $\frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_P^2}$ . Les coefficients de réflexion et de transmission

sont réels :  $r = \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - \omega_P^2}}{\omega + \sqrt{\omega^2 - \omega_P^2}}$  et  $t = \frac{2\omega}{\omega + \sqrt{\omega^2 - \omega_P^2}}$ . Les champs électriques réels des

ondes réfléchi et transmise s'écrivent  $\vec{E}_r = r E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$  et  $\vec{E}_t = t E_0 \cos(\omega t - k_P x) \vec{e}_y$ .

Pour  $\omega < \omega_P$  :  $k_P$  est imaginaire pur, égal à  $\pm i k'' = \pm \frac{i}{c} \sqrt{\omega_P^2 - \omega^2}$ . On choisi le signe + car l'onde doit d'atténuer au fur et à mesure de sa pénétration dans le plasma (l'amplitude des champs est en  $\exp(\mp k'' x)$ ). Les coefficients de réflexion et de transmission sont complexes :

$r = \frac{\omega - i \sqrt{\omega_P^2 - \omega^2}}{\omega + i \sqrt{\omega_P^2 - \omega^2}}$  et  $t = \frac{2\omega}{\omega + i \sqrt{\omega_P^2 - \omega^2}}$ . Le coefficient  $r$  est de module 1, on

l'écrit  $r = \exp(i\phi_r)$ , le coefficient  $t$  peut se mettre sous la forme  $t = |t| \exp(i\phi_t)$ . Les champs électriques réels des ondes réfléchi et transmise s'écrivent  $\vec{E}_r = E_0 \cos(i(\omega t + kx + \phi_r)) \vec{e}_y$  et  $\vec{E}_t = |t| E_0 \exp(-k'' x) \cos(\omega t + \phi_t) \vec{e}_y$ . Dans le plasma, le champ ne se propage pas ; son amplitude décroît exponentiellement avec  $x$ .

2. Les flux moyens des vecteurs de Poynting des ondes incidente, réfléchi et transmise peuvent

se calculer à partir des champs réels ou à partir de la formule :  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \vec{0}$ .

On trouve :  $R = r.r^* = |r|^2$  et  $T = t.t^* \text{Re} \left( \frac{k_P^*}{k} \right)$ .

Pour  $\omega > \omega_P$ ,  $R = \left( \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - \omega_P^2}}{\omega + \sqrt{\omega^2 - \omega_P^2}} \right)^2$  et  $T = \frac{4\omega^2}{\left( \omega + \sqrt{\omega^2 - \omega_P^2} \right)^2}$  :  $R + T = 1$ .

Pour  $\omega < \omega_P$ ,  $R = 1$  et  $T = 0$  car  $\text{Re} \left( \frac{k_P^*}{k} \right) = 0$  : le plasma se comporte comme un miroir parfait.

## OD59 – Cavité sans pertes

1. Le champ électrique proposé est tangent aux miroirs et le champ à l'intérieur d'un conducteur parfait est nul donc le champ électrique doit être nul en  $x = 0$  et  $x = L$ .

2. Donc  $E_1 + E_2 = 0$  et  $E_1 \exp(-ikL) + E_2 \exp(ikL) = 0$ . Ce système n'a de solution non nulle que si son déterminant est nul. Il vient  $\sin(kL) = 0$ . Nous en déduisons  $E_1 = -E_2$  et  $k_n = \frac{n\pi}{L}$ , ou encore  $f_n = n \frac{c}{2L} = nf_1$  avec  $f_1 = c/2L$ .

3. a. Les résultats précédents permettent d'écrire :

$$\vec{E}_n(x, t) = -2iE_{1n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp(i\omega_n t) \vec{e}_z \text{ où } \omega_n = 2n\pi f_1.$$

b. En notations réelles,  $\vec{E}_n(x, t) = E_{1n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin(\omega_n t) \vec{e}_z$ . L'onde ne se propage pas, c'est une onde stationnaire.

c. Le champ électrique est constamment nul aux points d'abscisse  $x_p$  tels que  $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0$ , soit :  $x_p = p \frac{L}{n} = p \frac{\lambda_n}{2}$  où  $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$  est la longueur d'onde de l'onde dans le mode  $n$ .  
 $x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda_n}{2}$

d. Pour calculer le champ magnétique, deux méthodes sont possibles : on part du champ résultant sous la forme donnée à la question 31, mais dans ce cas, comme ce n'est pas une onde plane progressive, il faut revenir à l'équation de Maxwell-Faraday, ou bien on utilise la forme donnée par l'énoncé sous forme d'une somme de deux ondes planes progressives et pour chacune d'elle, on utilise la relation de structure des OPP. On trouve :  
 $\vec{B}_n(x, t) = \frac{2E_{1n}}{c} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp(i\omega_n t) \vec{e}_z$ . Le champ magnétique est nul aux points d'abscisse  $x'_p$  tels que  $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0$ , soit :  $x'_p = (2p+1) \frac{L}{2n} = p \frac{\lambda_n}{2} + \frac{\lambda_n}{4}$ .