OD4 – Phénomènes de propagation linéaire

A – Travaux dirigés

OD41 – Onde de marée

La relation de dispersion d'une onde à la surface d'une eau de profondeur h est donnée par :

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma}{\mu}k^3\right)\tanh(kh)$$

où g est l'accélération de la pesanteur, μ la masse volumique de l'eau et γ la constante de tension superficielle à l'interface eau-air.

1°) Déterminer la dimension de γ.

2°) Déterminer la distance caractéristique l_c, appelée longueur capillaire, qui permet de comparer les effets de la tension superficielle (Second terme) et ceux de la pesanteur (Premier terme).

3°) Comment se simplifie l'équation de dispersion si la longueur d'onde λ est très inférieure à l_c ? Si elle est très supérieure à l_c ?

Donner dans chaque cas la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g dans un milieu de faible profondeur ($h \gg \lambda$) puis dans un milieu de grande profondeur ($h \ll \lambda$). Quand a-t-on dispersion ?

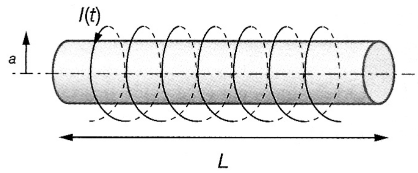
4. On donne $\gamma = 7{,}3 \times 10^{-2} Jm^{-2}$

Calculer l_c. Calculer v_φ et v_g pour une onde de marée dans l'océan (on prendra $\lambda = 1000km$ et $h = 5km$), une houle de longueur d'onde 5 m dans un océan profond, puis pour une onde dans une cuve à onde ($\lambda = 3cm$ et $h = 1mm$).

Rép : 1°) $En\, Jm^{-2}$ 2°) $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu g}}$ 3°) $v_g = v_\varphi$ si $\lambda \gg l_c$ et $\lambda \gg h$ 4°) $v_\varphi(\text{onde de marée}) = 2{,}8 ms^{-1}$ et $v_\varphi(\text{cuve}) = 10\ cm\ s^{-1}$

OD42 - Effet de peau dans un cylindre métallique

Un cylindre métallique de rayon a et grande longueur L, et de conductivité γ, est placé à l'intérieur d'un solénoïde de très grande longueur parcouru par un courant $I = I_0\cos(\omega t)$ à la fréquence f = 1 kHz.



a) Quelle est l'unité de $\delta = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\gamma\omega}}$? Calculer cette quantité.

b) On observe un échauffement du cylindre. Expliquer.

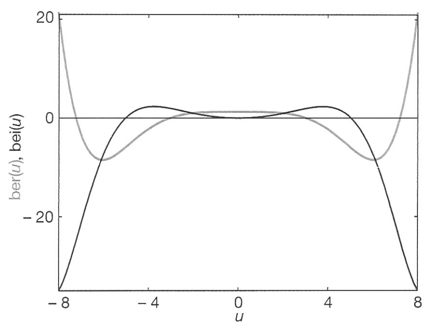
c) Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère prend une forme simplifiée dans le cylindre métallique. En déduire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par le champ magnétique dans le cylindre métallique.

d) Quelle est la forme du champ magnétique $\vec{B}$ dans le cylindre ? Montrer que son amplitude complexe $\underline{\vec{B}}$ obéit à l'équation :

$$\frac{d}{du}\left(u\,\frac{d\underline{B}}{du}\right) = iu\underline{B}$$

où u est une variable qu'on définira.

e) La solution est une fonction de Bessel-Kelvin, dont les parties réelle ber et imaginaire bei sont tracées ci-dessous. Commenter.



f) Que dire des courants ?
On donne : $\gamma = 10^8 \Omega^{-1} m^{-1}$, et en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \; et \; \overrightarrow{\Delta A} = \begin{pmatrix} \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \\ \Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$$

Rép : a) Longueur de 1,1mm b) Effet Joule c) $\vec{\Delta}\vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ d) $u = \frac{r}{\delta}$ e) Effet de peau… f) Même comportement.

B – Exercices supplémentaires

OD43 – Ondes planes progressives harmoniques dans un conducteur métallique

Dans un conducteur métallique, les électrons assurent la conduction et nous admettrons que leur mouvement est régi par l'équation : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E}$ où τ est un temps caractéristique reflétant l'interaction des électrons avec le réseau cristallin. La densité volumique d'électrons est notée n.

1°) Montrer qu'il est possible de définir une conductivité complexe du métal si n est une constante. Donner le lien entre γ_0 conductivité en régime indépendant du temps et τ.

Par la suite, la densité volumique d'électrons notée n est supposée uniforme et constante et on étudie la propagation d'une onde plane progressive monochromatique en notation complexe.

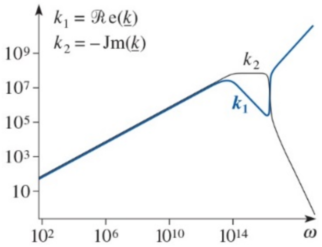
2°)

a) Montrer que, si la densité volumique de charges est nulle, on a affaire à des ondes transverses.
b) Montrer que l'équation de propagation s'écrit : $\Delta\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \underline{\vec{j}}}{\partial t}$
c) En déduire la relation de dispersion en fonction de $\underline{\gamma}$.
d) On pose : $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}$. Exprimer k^2 en fonction de τ, ω et ω_p.

Dans le cas du cuivre : $n = 10^{29} m^{-3}, \tau = 10^{-14} s, e = 1{,}6\ 10^{-16} C \; et \; m = 9{,}1\ 10^{-31} kg$.

e) Calculer les pulsations caractéristiques $\frac{1}{\tau} \; et \; \omega_p$. À quel domaine d'ondes correspondent-elles ?

3°) On pose $\underline{k} = k_1 - j\,k_2$. On a représenté l'évolution de $k_1 \; et \; k_2$ dans un diagramme « log − log » en fonction de ω. En déduire l'existence de trois régimes asymptotiques dont on précisera les caractéristiques.



4°) On se place à basse fréquence $\omega \ll \frac{1}{\tau}$:

a) Donner une expression simplifiée de $\underline{k}$. Exprimer les champs électrique et magnétique pour une OPPM se propageant selon les z croissants et polarisées selon (Ox).
b) Montrer que l'onde s'atténue rapidement avec une profondeur caractéristique dont on donnera l'expression en fonction ω de et γ_0. Calculer le vecteur de Poynting et sa valeur moyenne. Que remarque-t-on à la limite du très bon conducteur ?

5°) On se place à haute fréquence $\omega \gg \frac{1}{\tau}$:

a) Montrer que suivant les valeurs de ω, l'onde peut ou ne peut pas se propager. À quel domaine d'ondes correspond la transparence ?
b) Dans le cas où il n'y a pas propagation, caractériser l'onde en exprimant ses champs pour une onde plane monochromatique s'atténuant selon les z croissants et polarisée selon (Ox). Calculer son vecteur de Poynting et sa valeur moyenne. Comparer au résultat de 4b).

Rép : 1°) $\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$ 2a) Maxwell-Gauss… 2b) MF et MA 2c) $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0\gamma\omega$ 2d) $k^2 = \frac{1}{c^2}\left(\omega^2 - \frac{\omega_p^2}{1+\frac{1}{j\omega\tau}}\right)$ 2e) $\omega_p : UV, \frac{1}{\tau} : IR$
3°) Cf correction 4a) $k^2 \sim j\mu_0\gamma_0\omega$ 4b) Onde réfléchie sans perte d'énergie 5a) $k^2 = \frac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_p^2)$ 5b) Onde évanescente

OD44 - Propagation dans l'ionosphère, influence du champ magnétique terrestre

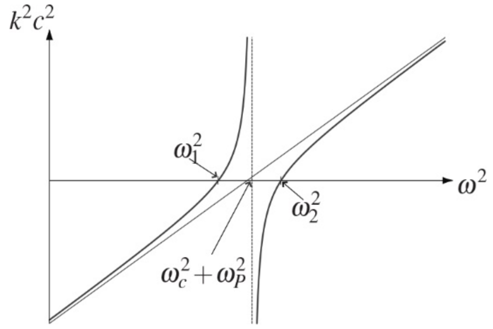
Un plasma peu dense, est plongé dans un champ magnétique statique $\overrightarrow{B_0}$. Une onde électromagnétique plane polarisée rectilignement se propage dans ce plasma dans une direction perpendiculaire à $\overrightarrow{B_0}$. On note m la masse des électrons du plasma, e la charge élémentaire et n_0 la densité volumique d'électrons dans le plasma.

1°) La relation de dispersion du plasma est-elle modifiée lorsque les directions du champ électrique $\vec{E}$ de l'onde et le champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ sont parallèles ou perpendiculaires ?

Dans le cas où elle est modifiée, on montre que la relation de dispersion s'écrit :

$$k^2c^2 = \frac{\left(\omega^2-\omega_p^2\right)^2 - \omega_c^2\omega^2}{\omega^2-\omega_p^2-\omega_c^2} \text{ où } \omega_c = \frac{eB_0}{m} \; et \; \omega_p^2 = \frac{n_0e^2}{m\varepsilon_0}$$

2°) On fournit le tracé de la courbe $k^2c^2 = f(\omega^2)$ en déduire le(s) domaine(s) de pulsation pour le(s)quel(s) l'onde peut se propager dans le plasma.



3°) L'ionosphère se comporte comme un plasma de densité uniforme n_0. On envoie verticalement une onde depuis la Terre. Lorsque l'émission de l'onde est telle que le champ électrique est parallèle au champ magnétique terrestre, il y a écho (donc réflexion) pour une longueur d'onde émise supérieure à $\lambda_0 = 42{,}70\ m$. Lorsque ces deux directions sont perpendiculaires, l'écho se produit pour une longueur d'onde supérieure à $\lambda_1 = 38{,}90\ m$.

a) En déduire les valeurs numériques de la densité volumique d'électrons n_0 et du champ magnétique terrestre B_0.

b) Le champ magnétique terrestre décroît en fonction de l'altitude z selon la loi : $B_0(z) = B_0(0)\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$ où $B_0(0) = 47000 \times 10^{-8}\ T$ est sa valeur au niveau du sol et $R = 6360km$ le rayon terrestre.

Calculer l'altitude de la couche réfléchissante. Proposer une application de cette propriété.

Rép : 1°) Modifié si $\overrightarrow{B_0}$ et $\vec{E}$ sont perpendiculaires 2°) L'onde se propage si $k^2 > 0$ 3a) $B_0 = 4{,}6\ 10^{-5}T$ 3b) $h = 313km$

OD45 - Plasma

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma globalement neutre constitué de N électrons libres par unité de volume de masse m et de N ions positifs par unité de volume de masse M. Une onde électromagnétique : $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{E_o}\, e^{i(\omega t - kz)}\,\overrightarrow{u_x}$ se propage dans ce milieu. On pose $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$. On suppose que M » m.

$$Données : \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} Fm^{-1} ; e = 1{,}6\ 10^{-19}\ C ; N = 1{,}22\ 10^{12}\frac{électrons}{m^3}, c = 3\ 10^8\ m.s^{-1} ; m = 9{,}1\ 10^{-31}\ kg$$

1°) Montrer que l'action du champ magnétique sur un électron est négligeable devant celle du champ électrique. Exprimer les vecteurs courant de conduction $\underline{\overrightarrow{J_c}}$ et courant de déplacement $\underline{\overrightarrow{J_d}}$ en fonction de $\underline{\vec{E}}$, ω, ω_p et ε_0. Établir l'équation de propagation et la relation de dispersion.

2°) Montrer que la fréquence de l'onde doit être supérieure à une fréquence de coupure f_c pour avoir propagation. Calculer f_c . Dans le cas où il y a propagation, représenter graphiquement la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de la fréquence. Exprimer l'indice dans le plasma en fonction de ω et ω_p.

Rép : 1°) $k^2 = \frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}$ 2°) $n = \sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$