

# OD4 – Phénomènes de propagation linéaire

## A – Travaux dirigés

### OD41 – Onde de marée

1. La constante  $\gamma$  a la même dimension que  $g\mu/k^2$ . Sachant que  $g$  est une accélération,  $\mu$  une masse volumique et  $k$  l'inverse d'une longueur, on trouve que  $\gamma$  est homogène à une énergie par unité de surface ou à une force par unité de longueur (Cf. cours de mécanique des fluides).

2. Les effets de la pesanteur et ceux de la tension superficielle sont identiques quand :

$$gk = \frac{\gamma k^3}{\mu} \Leftrightarrow k^2 = \frac{\mu g}{\gamma},$$

ce qui définit la longueur caractéristique  $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu g}}$ . Si  $\lambda = \frac{2\pi}{k} \gg l_c$ ,  $gk \gg \frac{\gamma k^3}{\mu}$  donc les effets de la pesanteur sont prédominants. Inversement, si  $\lambda \ll l_c$ , ce sont les effets de la tension superficielle qui l'emportent.

3. Si  $\lambda \ll l_c$ , la relation (28.24) se simplifie en :  $\omega^2 = \frac{\gamma}{\mu} k^3 \tanh(kh)$ . Si  $\lambda \gg l_c$ , elle devient :  $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ .

Pour  $h \ll \lambda$ ,  $\tan(kh) \sim kh$  et pour  $h \gg \lambda$ ,  $\tan(kh) \sim 1$ , d'où :

	$\lambda \ll l_c$		$\lambda \gg l_c$	
	$h \ll \lambda$	$h \gg \lambda$	$h \ll \lambda$	$h \gg \lambda$
$v_\varphi$	$\sqrt{\frac{h\gamma}{\mu}} k$	$\sqrt{\frac{k\gamma}{\mu}}$	$\sqrt{gh}$	$\sqrt{\frac{g}{k}}$
$v_g$	$2v_\varphi$	$\frac{3}{2}v_\varphi$	$v_\varphi$	$\frac{1}{2}v_\varphi$

Il y a dispersion dans tous les cas sauf pour les ondes de gravité de faible profondeur ( $\lambda \gg l_c$  et  $\lambda \gg h$ ).

4.  $l_c = 2,7$  mm. Pour une onde de marée de longueur d'onde 1000 km et de profondeur 5 km par exemple, nous sommes dans le cas des ondes de gravité en eau peu profonde, d'où  $v_\varphi = v_g = \sqrt{gh} = 220 \text{ m.s}^{-1}$ .

Pour une houle de petite longueur d'onde dans un océan profond, nous sommes dans le cas

$\lambda \gg l_c$  et  $\lambda \ll h$ , d'où  $v_\varphi = 2v_g = \sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}} = 3,5 \text{ m.s}^{-1}$ .

Enfin, dans la cuve à onde,  $\lambda \gg l_c$  et  $h \ll \lambda$  d'où  $v_\varphi = \frac{1}{2}v_g = 5,7 \text{ cm.s}^{-1}$ .

# OD42 - Effet de peau dans un cylindre métallique

a) On reconnaît là l'épaisseur de peau, qui est une longueur.

Explicitement,  $\mu_0 \gamma$  s'exprime en  $\text{H} \cdot \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ . Comme l'impédance d'une bobine est  $Z = jL \omega$ , on déduit que des henrys par ohm sont homogènes à des secondes. Ainsi,  $\mu_0 \gamma \omega$  s'exprime en  $\text{m}^{-2}$  et  $\delta$  est bien homogène à une longueur.

b) Les courants oscillant dans le solénoïde engendrent un champ électromagnétique. Dans le conducteur, le champ électrique crée un courant (la loi d'Ohm indique  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ). Suite à l'effet Joule, le conducteur s'échauffe alors.

c) Il s'agit d'une approximation usuelle valable dans les conducteurs. On évalue le rapport :

$$\frac{\epsilon_0 \left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\left\| \vec{j} \right\|} \simeq \frac{\epsilon_0 \omega E}{\gamma E} = \frac{\epsilon_0 \omega}{\gamma} \simeq 10^{-15}$$

vu qu'en régime sinusoïdal  $\frac{\partial E}{\partial t} \simeq \omega E$ . Ainsi, l'équation de Maxwell-Ampère peut s'écrire  $\text{rot } \vec{B} \simeq \mu_0 \vec{j}$ .

On évalue :  $\text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = \text{grad}(\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B}$ . Or, d'après l'équation de Maxwell-Ampère,

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = \text{rot}(\mu_0 \vec{j}) = \mu_0 \gamma \text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

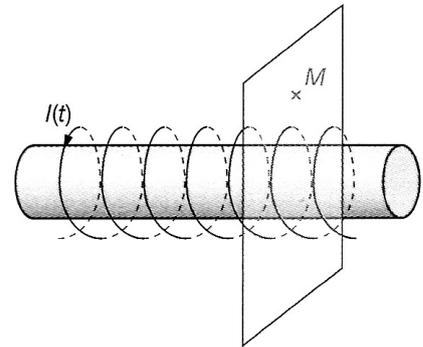
Ainsi, on conclut :

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Le champ magnétique obéit à l'équation de diffusion.

d) On utilise les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Par invariance par translation selon  $\vec{u}_z$  et par rotation autour de  $\vec{u}_z$ ,  $B$  ne dépend que de  $r$ .

Les sources du champ électromagnétique sont les courants parcourant le solénoïde. Tout plan perpendiculaire à l'axe  $Oz$  et contenant un point  $M$  donné (Fig. 9) est un plan de symétrie des courants.  $\vec{B}(M)$  est donc perpendiculaire à ce plan.



On déduit de tout cela  $\vec{B}(M, t) = B(r, t) \vec{u}_z$ .

En reportant la forme du champ magnétique dans l'équation de diffusion, on obtient :

$$\Delta \vec{B} = (\Delta B) \vec{u}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B}{\partial r} \right) \vec{u}_z = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i \mu_0 \gamma \omega B \vec{u}_z.$$

Il suffit alors de poser  $u = \frac{r}{\delta}$ , ce qui donne  $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial u}$ . Alors,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B}{\partial r} \right) = \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \left( u \frac{\partial B}{\partial u} \right).$$

e) On remarque que les fonctions ainsi tracées sur la figure 8 ne prennent des valeurs importantes qu'au bord de leur domaine de définition (pour  $u$  variant environ de l'ordre de l'unité). Il s'agit de l'effet de peau. Le champ magnétique ne prend des valeurs notables que sur des épaisseurs de l'ordre de  $\delta$  par rapport à la surface du conducteur.

f) Les courants s'obtiennent à partir de dérivées du champ magnétique d'après l'équation de Maxwell-Ampère. Ils se comportent donc similairement au champ magnétique : ils sont quasiment nuls au-delà de l'épaisseur de peau.

# B – Exercices supplémentaires

## OD43 – Ondes planes progressives harmoniques dans un conducteur métallique

1) La densité volumique de courant  $\vec{j} = -ne\vec{v}$ . La relation entre la vitesse et le champ électrique est linéaire si  $n$  est constante, la relation  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$  est aussi linéaire et en notation complexe  $\vec{j} = \underline{\gamma}\vec{E}$ .

En notation complexe  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E}$  devient  $\underline{v}(j\omega + \frac{1}{\tau}) = -\frac{e}{m}\vec{E}$  soit :  
 $\vec{j} = \underline{\gamma}\vec{E}$  avec  $\underline{\gamma} = \frac{ne^2\tau}{m(1+j\omega\tau)}$ .

En régime indépendant du temps,  $\omega = 0$ , d'où  $\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$ .

2) a) La densité volumique de charge est nulle donc l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit  $\text{div}\vec{E} = 0$ .

En notation complexe avec  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}))}$ , elle s'écrit  $-j\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ .  $\vec{E}$  est donc orthogonal à la direction de propagation.

b) En éliminant  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday dans la dérivée temporelle de celle de Maxwell-Ampère,  $-\text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$  soit comme  $\text{div}\vec{E} = 0$  :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}, \text{ avec } \vec{j} = \underline{\gamma}\vec{E}.$$

c) L'équation de dispersion s'écrit aussi  $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  soit comme  $\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}$  :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \vec{E} \text{ et } \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0 \gamma \omega.$$

d)  $\underline{\gamma} = \frac{ne^2\tau}{m(1+j\omega\tau)} = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2\tau}{1+j\omega\tau}$  d'où  $k^2 = \frac{1}{c^2} \left( \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{1 + \frac{j\omega\tau}{1}} \right)$ .

e)  $\omega_p \approx 2 \cdot 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  ce qui correspond à une longueur d'onde dans le vide  $\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} \approx 90 \text{ nm}$  : domaine ultraviolet.

$\frac{1}{\tau} = 10^{14} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  ce qui correspond à une longueur d'onde dans le vide  $\lambda_\tau \approx 19 \mu\text{m}$  : domaine infrarouge.

3°)

Sur ces graphes, nous identifions des domaines de pulsations correspondant à des comportements asymptotiques simples :

pour  $\omega \ll \frac{1}{\tau} \approx 10^{14} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $k_1$  et  $k_2$  sont quasiment confondus ;

pour  $\frac{1}{\tau} \ll \omega \ll \omega_p \approx 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $k_2$  est très supérieur à  $k_1$  (n'oublions pas que l'échelle est logarithmique). Le nombre d'onde est imaginaire pur ;

pour  $\omega \gg \omega_p$ ,  $k_1$  est très supérieur à  $k_2$ , et le nombre d'onde est réel.

Nous pouvons donc dresser le tableau suivant

domaine spectral	ondes radio, ..., ondes micrométriques $\omega \ll \frac{1}{\tau} \ll \omega_p$	infrarouge, ..., U.V. $\frac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$	U.V. lointain, rayons X $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$
relation de dispersion	$k^2 \approx -j\mu_0\gamma_0\omega$	$k^2 \approx \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$	
nombre d'onde ( $k_1 \geq 0$ )	$k = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}} (1-j)$	$k = -j \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$	$k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$

4) Dans le domaine  $\omega \ll \frac{1}{\tau}$  on a aussi  $\omega \ll \omega_p$ . L'expression

$$k^2 = \frac{1}{c^2} \left( \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{1 + \frac{1}{j\omega\tau}} \right) \text{ se simplifie donc en } k^2 = -\frac{j\omega\tau\omega_p^2}{c^2} = -j\omega\mu_0\gamma_0$$

$$\text{soit : } k = \sqrt{\frac{\omega\omega_p^2\tau}{2c^2}} (1-j) = \sqrt{\frac{\mu_0\omega\gamma_0}{2}} (1-j) = \frac{1-j}{\delta}$$

en posant  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega\gamma_0}}$  et en prenant la racine à partie réelle positive.

En notation complexe  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_x = \vec{E}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{z}{\delta})} \vec{u}_x$  :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega} E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4})} \vec{u}_y \text{ car } 1-j = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

En revenant en notation réelle et en supposant  $\vec{E}_0 = E_0$  réel,

$$\vec{E} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x \text{ et } \vec{B} = \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega} E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_y \text{ (doc. 3).}$$

b) On remarque une atténuation exponentielle des champs avec une épaisseur caractéristique  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega\gamma_0}}$ .

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\sqrt{2}}{\mu_0\delta\omega} E_0^2 e^{-2\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_z$$

Comme  $\langle \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) \rangle = \cos \frac{\varphi}{2}$ ,  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 \delta \omega} E_0^2 e^{-2\frac{z}{\delta}} \vec{u}_z$ .

Dans le cas du très bon conducteur,  $\delta$  tend vers 0. Le champ électrique ne pénètre que dans une épaisseur très faible de conducteur. De plus  $\langle \vec{\Pi} \rangle$  tend aussi vers 0 ( $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$ ). Une onde est totalement réfléchie sans perte d'énergie. Cette propriété est utilisée dans les guides d'onde

5) a) Dans le domaine  $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ , l'expression de  $\underline{k}^2$  se simplifie en  $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ .

Cette forme est semblable à celle d'une onde dans un plasma.  $\omega > \omega_p$ ,  $\underline{k}^2$  est réel. Il y a propagation sans atténuation (zone ~ de transparence). Sinon  $\underline{k}$  est imaginaire pur, l'onde est stationnaire évanescence.

*Remarque : Le modèle proposé possède des limites : il ne s'applique pas dans le domaine des trop hautes fréquences, en particulier aux rayons X.*

b) Si  $\omega < \omega_p$ , posons  $\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$  Il y a atténuation selon les z croissants

donc  $\underline{k} = -\frac{j}{\delta}$  et :

$$\begin{cases} \vec{E} = \underline{E}_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_z = \underline{E}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{j\omega t} \vec{u}_x, \\ \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{1}{\delta \omega} \underline{E}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \vec{u}_y. \end{cases}$$

En revenant en notation réelle et en supposant :  $\underline{E}_0 = E_0$  réel,

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t) \vec{u}_x & \text{et} \\ \vec{B} = \frac{E_0}{\delta \omega} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \vec{u}_y = \frac{E_0}{\delta \omega} e^{-\frac{z}{\delta}} \sin(\omega t) \vec{u}_y. \end{cases}$$

Nous sommes en présence d'une onde évanescence. Le vecteur de Poynting correspondant est :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 \delta \omega} e^{-2\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

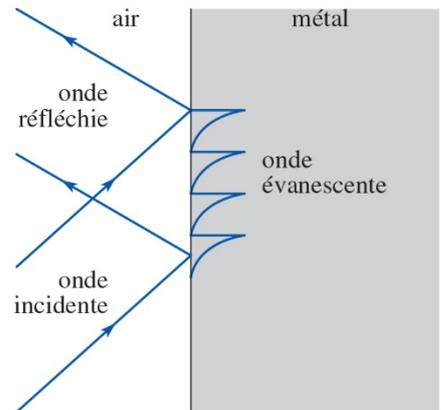
de valeur moyenne nulle : il n'y a pas propagation de l'énergie.

La décroissance exponentielle observée diffère de celle obtenue pour l'effet de peau, car il n'y a pas ici de dissipation de l'énergie de l'onde par le milieu. Ce résultat semble paradoxal : l'onde ne perd pas d'énergie au profit du milieu... mais « disparaît » ! Alors, où passe son énergie ?

Pour créer le champ électromagnétique oscillant, il faut envoyer une onde électromagnétique vers le métal (Figure) Nous pouvons prévoir que son énergie se retrouve intégralement dans une onde réfléchie par la surface métallique (qui joue le rôle d'une terminaison parfaite placée au bout d'une ligne).

Pour le cuivre, ce comportement correspond à  $10^{14} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \ll \omega < 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , donc à des longueurs d'onde appartenant au domaine :  $0,03 \mu\text{m} < \lambda \ll 3 \mu\text{m}$ , qui englobe le domaine visible :  $0,4 \mu\text{m} < \lambda \ll 0,8 \mu\text{m}$ .

La réflexion que nous avons évoquée explique l'éclat d'une surface métallique (polie). La fabrication de miroirs optiques par dépôt d'une couche d'argent ou d'aluminium utilise cette propriété.

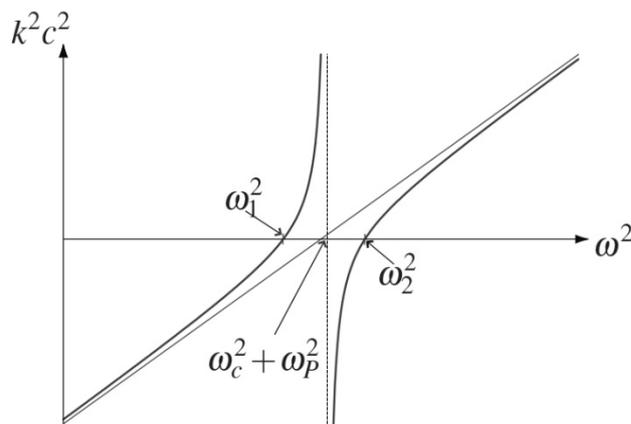


## OD44 - Propagation dans l'ionosphère, influence du champ magnétique terrestre

1. En l'absence du champ  $\vec{B}_0$ , le mouvement des électrons est parallèle au champ électrique  $\vec{E}$  de l'onde. Si  $\vec{B}_0$  est parallèle à  $\vec{E}$ , la force magnétique est nulle et le mouvement des électrons n'est pas modifié. La relation de dispersion est modifiée pour  $\vec{E}$  perpendiculaire à  $\vec{B}_0$ .

2. La courbe  $k^2 c^2 = f(\omega^2)$  admet une asymptote verticale (représentée en tiretés sur la figure) pour  $\omega_0^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2$ . Elle s'annule pour  $\omega_1 = \frac{1}{2} \left( -\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \right)$  et pour  $\omega_2 = \frac{1}{2} \left( \omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \right)$ .

La droite en traits fins représente la relation de dispersion du plasma en l'absence de champ  $\vec{B}_0$ .



L'onde se propage si  $k^2 > 0$  donc pour  $\omega \in ]\omega_1, \omega_0[$  et pour  $\omega > \omega_2$ .

3. a. Pour l'onde polarisée parallèlement au champ magnétique terrestre, la réflexion a lieu pour une pulsation inférieure à  $\omega_p$  donc pour une longueur d'onde  $\lambda_0$  supérieure  $\frac{2\pi c}{\omega_p}$ . On en

$$\text{déduit : } n_0 = \frac{4\pi^2 c^2 m \epsilon_0}{e^2 \lambda_0^2} = 6,116 \times 10^{11} \text{ m}^{-3}.$$

Pour l'onde polarisée perpendiculairement au champ magnétique terrestre, la réflexion a lieu pour une longueur d'onde plus faible donc pour une pulsation plus élevée : c'est la pulsation

$$\omega_2. \text{ On en déduit : } \omega_2 = \frac{2\pi c}{\lambda_1}. \text{ On en tire la valeur de } \omega_c : \omega_c = \frac{\omega_2^2 - \omega_p^2}{\omega_2} \text{ puis } B_0 = \frac{m\omega_c}{e}.$$

L'application numérique donne :  $B_0 = 4,683 \times 10^{-5} \text{ T}$ .

b. L'altitude de la couche réfléchissante est :  $h = R \sqrt{\left( \frac{B_0}{B_0(0)} \right)^{-2/3} - 1} = 312,8 \text{ km}$ . On peut mesurer l'altitude de la couche ionisée, qui varie entre le jour et la nuit.

## OD45 - Plasma

1. On écrit le PFD à un électron de masse  $m$  dans le référentiel  $(O ; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$  galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

- Le poids est négligeable devant les autres forces.
- On néglige les interactions entre l'électron et les autres particules qui sont parfois modélisées par une force de frottement fluide.

• L'ordre de grandeur du champ magnétique est  $\|\vec{B}\| \approx \frac{\|\vec{E}\|}{c}$ . On a donc

$$\frac{\|q\vec{v}_e \wedge \vec{B}\|}{\|q\vec{E}\|} \approx \frac{qv_e E}{qcE} \approx \frac{v_e}{c} \ll 1. \text{ On peut donc négliger la force magné-}$$

tique devant la force électrique.

On utilise le régime sinusoïdal forcé. Il faut faire attention à bien lire l'énoncé :  $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$  et non  $\vec{E} = E_0 \exp(-i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$ .

Le vecteur vitesse est de la même forme :  $\frac{d\vec{v}_e}{dt} = i\omega \vec{v}_e$ . On note le complexe  $i$  et non  $j$  pour ne pas confondre avec le vecteur densité de courant volumique.

On a donc  $m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = im\omega \vec{v}_e = q\vec{E} = -e\vec{E}$ , d'où  $\vec{v}_e = \frac{-e\vec{E}}{im\omega}$ .

Le vecteur densité de courant de conduction volumique s'écrit :

$$\vec{j}_c = \sum_k \rho_k \vec{v}_k = \sum_k n_k q_k \vec{v}_k$$

On a deux types de porteurs de charges mobiles : les ions positifs (notés  $i$ ) de charge  $+e$  et les électrons de charge  $-e$ .

On a donc :  $\vec{j}_c = N(-e\vec{v}_e + e\vec{v}_i)$ .

On peut démontrer comme pour les électrons que :  $\vec{v}_i = \frac{e\vec{E}}{iM\omega}$ .

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } \vec{j}_c &= N \left( \frac{e^2}{im\omega_e} + \frac{e^2}{iM\omega} \right) \vec{E} = \frac{Ne^2}{i\omega} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \vec{E} \\ &\approx \frac{Ne^2}{i\omega} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \vec{E} \end{aligned}$$

car d'après l'énoncé  $M \gg m$ .

On néglige donc l'effet des cations pratiquement immobiles.

On a donc :  $\vec{j}_c = \frac{Ne^2}{im\omega} \vec{E} = -i \frac{Ne^2 \varepsilon_0}{m\varepsilon_0 \omega} \vec{E} = \frac{-i\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega} \vec{E}$  puisque  $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$ .

- Le vecteur densité de courant de conduction volumique vaut donc :

$$\vec{j}_c = \underline{\gamma} \vec{E} \text{ avec } \underline{\gamma} = \frac{-i\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega}.$$

- Le vecteur densité de courant de déplacement vaut :

$$\vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega\varepsilon_0 \vec{E}.$$

Le rapport des deux densités de courant vaut :

$$\frac{j_c}{j_d} = \frac{-i\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega} = \frac{-\omega_p^2}{\omega^2}$$

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 (\vec{j}_c + \vec{j}_d).$$

- $\vec{j}$  dans l'équation de Maxwell-Ampère désigne le courant de conduction, noté  $\vec{j}_c$  dans l'exercice.
- $\vec{j}_d$  désigne le courant de déplacement. Il est égal à  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

On en déduit d'après la question précédente :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_c + \vec{j}_d) = \mu_0 \left( \frac{-\omega_p^2}{\omega^2} + 1 \right) \vec{j}_d = \mu_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) i\omega\varepsilon_0 \vec{E}$$

Soit :

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{\left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \partial \vec{E}}{c^2}$$

Pour trouver la relation de dispersion, il suffit de remplacer l'expression du champ électrique dans l'équation de propagation.

$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}$  car  $\text{div } \vec{E} = 0$  avec un plasma globalement neutre.

On a alors :

$$\vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On en déduit l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On remplace  $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$  dans l'équation de propagation écrite en notation complexe pour en déduire la relation de dispersion :

$$-k^2 \vec{E} = \frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{c^2} (-\omega^2 \vec{E}), \text{ d'où :}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

**2.** • Si  $\omega < \omega_p$  alors  $k^2 < 0$ .  $k$  est imaginaire pur. On a une onde évanescente. Il n'y a pas de propagation.

• Si  $\omega = \omega_p$  alors  $k = 0$ . Il n'y a pas de propagation.

• Si  $\omega > \omega_p$  alors  $k^2 > 0$  et  $k > 0$ . On a une propagation.

Si  $\omega \gg \omega_p$ , alors  $k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}$  et  $k \simeq \frac{\omega}{c}$ . Tout se passe comme si on était dans le vide. Le courant de conduction étant nul :  $\gamma \rightarrow 0$ . La pulsation est trop grande. « Les électrons ne peuvent plus suivre » et ne se déplacent quasiment plus.

La pulsation de coupure est donc  $\omega_c = \omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$ . On en déduit la fréquence de coupure :  $f_c = f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$

On étudie les pulsations  $\omega > \omega_p$  pour lesquelles il y a propagation d'une onde électromagnétique. On a un filtre passe-haut.

Application numérique :

$$f_c = 9,9 \text{ MHz}$$

La vitesse de phase vaut :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}} = \frac{c}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}}$$

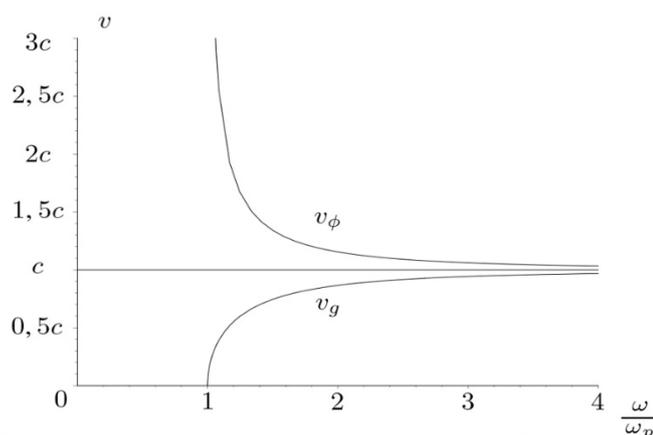
L'indice est défini  $v_\phi = \frac{c}{n}$ . On en déduit donc :  $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

La vitesse de groupe vaut :  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ . Or  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}$ .

On écrit la différentielle :  $2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$ .

On a donc :  $v_g v_\phi = c^2$

On représente sur le graphe ci-dessous la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de  $\frac{\omega}{\omega_p}$ .



La vitesse de phase correspond à la vitesse de propagation d'une onde qui n'a **pas de réalité physique**. Le champ électrique  $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$  est une onde « éternelle » définie entre  $t = -\infty$  et  $t = +\infty$ . Il ne faut donc pas être surpris de trouver une vitesse de phase plus grande que la vitesse de la lumière.

La vitesse de phase dépend de la pulsation. On dit que le **milieu est dispersif**. Des ondes à des pulsations différentes ne vont pas se propager à la même vitesse.

La vitesse de groupe est inférieure à  $c$ . C'est tout à fait normal puisqu'elle correspond à un transport d'information. C'est la vitesse de la crête du paquet d'ondes en l'absence de grande déformation du paquet d'ondes.