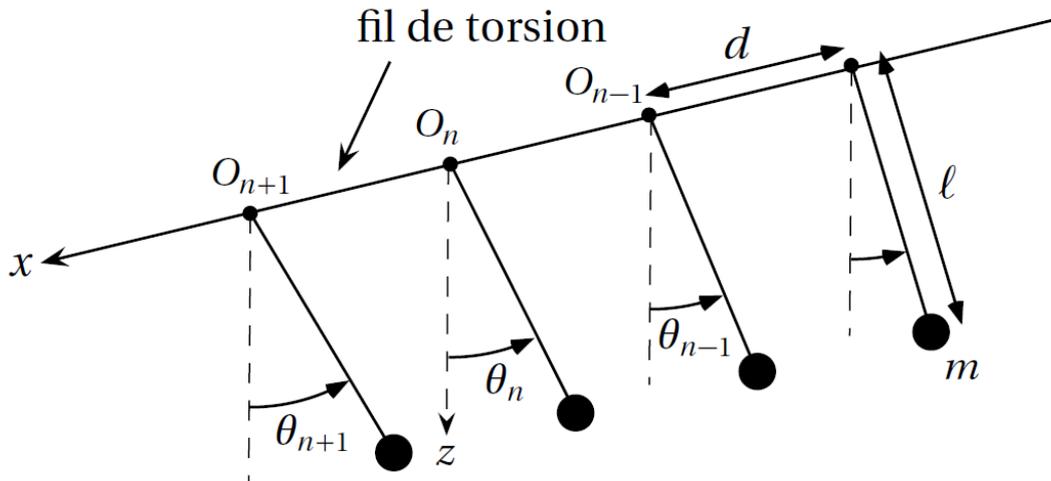


OD4 – Phénomènes de propagation linéaires unidimensionnels

6.2. Phénomènes de propagation linéaires unidimensionnels		
6.2.1. Dispersion et absorption		
Propagation unidimensionnelle d'une onde harmonique dans un milieu linéaire.	Identifier le caractère linéaire d'une équation aux dérivées partielles. Établir la relation de dispersion caractéristique d'un phénomène de propagation en utilisant des ondes de la forme $\exp\pm j(\underline{k}x - \omega t)$. Distinguer différents types de comportements selon la valeur de la pulsation.	On prendra comme exemples le plasma et une chaîne d'oscillateurs.
Dispersion, absorption.	Associer les parties réelle et imaginaire de \underline{k} aux phénomènes de dispersion et d'absorption.	
Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu non absorbant et faiblement dispersif : vitesse de phase et vitesse de groupe.	Énoncer et exploiter la relation entre les ordres de grandeur de la durée temporelle d'un paquet d'onde et la largeur fréquentielle de son spectre. Déterminer la vitesse de groupe d'un paquet d'ondes à partir de la relation de dispersion. Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes. Étudier la propagation d'une onde électrique dans un câble coaxial. <i>Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, simuler la propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et visualiser le phénomène d'étalement.</i>	On verra en TP la partie sur la propagation d'une onde électrique dans le câble coaxial.
6.2.2. Ondes électromagnétiques dans les milieux matériels		
Propagation d'une onde électromagnétique plane harmonique unidirectionnelle dans un conducteur ohmique de conductivité réelle. Effet de peau dans un conducteur ohmique.	Identifier une analogie avec un phénomène de diffusion. Établir la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans un conducteur ohmique à basses fréquences. Associer l'atténuation de l'onde dans le milieu conducteur à une dissipation d'énergie. Estimer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau du cuivre à différentes fréquences.	
Propagation d'une onde électromagnétique plane harmonique transverse et unidirectionnelle dans un plasma dilué. Conductivité électrique complexe.	Justifier la neutralité électrique locale du plasma en présence d'une onde transverse. Établir l'expression de la conductivité électrique complexe du plasma. Interpréter énergétiquement le caractère imaginaire pur de la conductivité électrique complexe du plasma.	
Relation de dispersion. Pulsation plasma. Domaine de transparence. Domaine réactif, onde évanescente.	Établir la relation de dispersion des ondes planes progressives harmoniques transverses. Exprimer la vitesse de phase et la vitesse de groupe d'un paquet d'ondes dans le domaine de transparence du plasma. Interpréter la pulsation plasma comme une pulsation de coupure. Citer les caractéristiques d'une onde stationnaire évanescente. Justifier que, dans le domaine réactif, une onde électromagnétique harmonique ne transporte aucune puissance en moyenne.	

I – Dispersion et absorption

I-1) Exemple en mécanique



Considérons une chaîne de pendules simples où chaque pendule est constitué d'une tige de longueur l à l'extrémité de laquelle est attachée une masse m très grande devant la masse de la tige. Le pendule indicé n oscille dans le plan $(O_n yz)$ autour de l'axe (Ox) , où O_n est le point d'attache du pendule d'abscisse $x_n = nd$ sur l'axe Ox . On note θ_n l'angle formé par la tige du pendule n avec la verticale descendante $(O_n z)$. Chaque pendule est relié à son voisin par un fil de torsion constante C confondu avec l'axe (Ox) , le couple de rappel sur l'axe (Ox) appliqué du pendule $n+1$ sur le pendule n est :

$$M_{Ox}^{n+1 \rightarrow n}(\overrightarrow{f_{rap}}) = C(\theta_{n+1} - \theta_n)$$

De plus, l'air exerce une force de frottement fluide sur un pendule dont le moment sur l'axe (Ox) est :

$$M_{Ox}(\overrightarrow{f_{frottements}}) = -f \frac{d\theta_n}{dt}$$

Et il ne faudra pas oublier la pesanteur :

$$M_{Ox}(\overrightarrow{poids}) = -mgl \sin(\theta_n)$$

Appliquons la loi du moment cinétique scalaire suivant l'axe (Ox) au pendule n .

$$ml^2 \frac{d^2 \theta_n}{dt^2} = -f \frac{d\theta_n}{dt} + C(\theta_{n+1} - \theta_n) + C(\theta_{n-1} - \theta_n) - mgl \sin(\theta_n)$$

$$\Leftrightarrow ml^2 \frac{d^2 \theta_n}{dt^2} = -f \frac{d\theta_n}{dt} + C(\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n) - mgl \sin(\theta_n)$$

En supposant que d est très inférieur aux dimensions caractéristiques du phénomène de propagation étudié, nous pouvons faire l'approximation des milieux continus en posant : $\theta_n = \theta(x = nd, t)$ d'où :

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta(x + d, t) = \theta(x, t) + d \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + o(d^2) \\ \theta_{n-1} = \theta(x - d, t) = \theta(x, t) - d \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + o(d^2) \end{cases}$$

L'équation du mouvement devient alors :

$$ml^2 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = -f \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} + Cd^2 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} - mgl \sin(\theta(x, t))$$

Cette équation aux dérivées partielles est non linéaire car il apparait un terme en $\sin(\theta(x, t))$ et la fonction sinus n'est pas linéaire.

Afin de linéariser cette équation, on se restreint par la suite aux petits angles, ce qui permet d'écrire :

$$ml^2 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = -f \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} + Cd^2 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} - mgl(\theta(x, t))$$

I-2) OPPH généralisées

a) Relation de dispersion

Les méthodes de changement de variables ou de séparation des variables sont inefficaces pour chercher une famille génératrice des solutions des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. La méthode la plus fructueuse consiste à généraliser la notion d'onde plane progressive harmonique (OPPH) pour exploiter les facilités de la notation complexe.

On appelle onde plane progressive harmonique généralisée (OPPH* en abrégé) une onde de la forme :

$$\theta(x, t) = \text{Re}\{\underline{\theta}(x, t)\}$$

$$\text{avec } \underline{\theta}(x, t) = \underline{A}e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \text{ et } \underline{A} = Ae^{j\varphi}$$

où ω est réel et \underline{k} a priori complexe. Les OPPH* constituent donc une généralisation des OPPH au cas où le nombre d'onde k est complexe.

L'équation aux dérivées partielles envisagée étant linéaire à coefficients constants, l'amplitude complexe $\underline{\theta}(x, t)$ est aussi solution de cette équation.

L'injection de l'OPPH* dans l'équation différentielle nous fournira une relation entre ω et \underline{k} appelée relation de dispersion.

b) Relation de dispersion de la chaîne de pendules couplés

En utilisant la notation complexe :

$$ml^2 \frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial t^2} = -f \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial t} + Cd^2 \frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial x^2} - mgl \underline{\theta}$$

Devient :

$$ml^2(-\omega^2)\underline{\theta} = -f(j\omega)\underline{\theta} + Cd^2(-k^2)\underline{\theta} - mgl\underline{\theta}$$

Comme $\underline{\theta}$ n'est pas identiquement nul, on déduit de l'équation précédente la relation de dispersion de la chaîne de pendules couplés :

$$k^2 = \frac{ml^2}{Cd^2} \omega^2 - \frac{mgl}{Cd^2} - \frac{j\omega f}{Cd^2}$$

I-3) Contenu physique

a) Relation de dispersion

La relation de dispersion peut donc se mettre sous la forme :

$$\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \underline{\theta}(x, t) = \underline{A}e^{j(\omega t - \underline{k}x)} &\Leftrightarrow \underline{\theta}(x, t) = \underline{A}e^{j(\omega t - k'x)} e^{+k''x} \\ &\Rightarrow \theta(x, t) = Ae^{+k''x} \cos(\omega t - k'x + \varphi) \end{aligned}$$

On remarque donc que :

$$\begin{cases} k' = \text{Re}(\underline{k}) \text{ est rattachée à la propagation} \\ k'' = \text{Im}(\underline{k}) \text{ est rattachée à l'absorption} \end{cases}$$

b) Phénomène liée à la partie réelle de \underline{k}

Le terme $\cos(\omega t - k'x + \varphi)$ correspond à une OPPH se propageant à la vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'(\omega)} = \frac{\omega}{\text{Re}(\underline{k}(\omega))}$$

L'élément nouveau est que la vitesse de phase dépend à priori de la pulsation ω . Dans ce cas, on dit que le milieu est dispersif ou que le phénomène de propagation est dispersif.

Un milieu est dit dispersif si la vitesse de phase des ondes se propageant dans le milieu : $v_\varphi = \frac{\omega}{\text{Re}(\underline{k}(\omega))}$ dépend de ω .

c) Phénomène lié à la partie imaginaire de \underline{k}

Le terme $e^{k''x}$ qui apparait en facteur de l'amplitude de l'onde décrit une modification de l'amplitude de l'onde lors de la propagation. Il peut y avoir amortissement ou amplification, selon le signe de $k''(\omega)$ et le sens de propagation. La situation la plus fréquente est celle de l'amortissement de l'onde : on dit alors que le milieu est absorbant. La distance caractéristique d'amortissement de l'onde dans le milieu est donnée par :

$$\delta = \frac{1}{k''(\omega)}$$

quantité qui dépend en général de la pulsation ω de l'onde.

Un milieu est dit absorbant si l'amplitude de l'onde décroît lors de la propagation. La distance caractéristique d'amortissement de l'onde est :

$$\delta = \frac{1}{k''(\omega)} = \frac{1}{\text{Im}(\underline{k}(\omega))}$$

II – Paquets d'onde

II-1) Signal comportant deux pulsations voisines

Dans cette partie, nous nous intéresserons à l'influence de la dispersion sur les ondes réelles. Nous négligerons les phénomènes d'absorption, c'est-à-dire que le vecteur d'onde sera supposé réel, mais dépendant de la pulsation.

Commençons par un cas simple : le signal étudié ne comporte que deux composantes, de pulsation ω_1 et ω_2 tel que :

$$\begin{aligned} s(z, t) &= s_0 \cos(\omega_1 t - k_1 z) + s_0 \cos(\omega_2 t - k_2 z + \varphi) \\ &= 2s_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} z + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} z - \frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

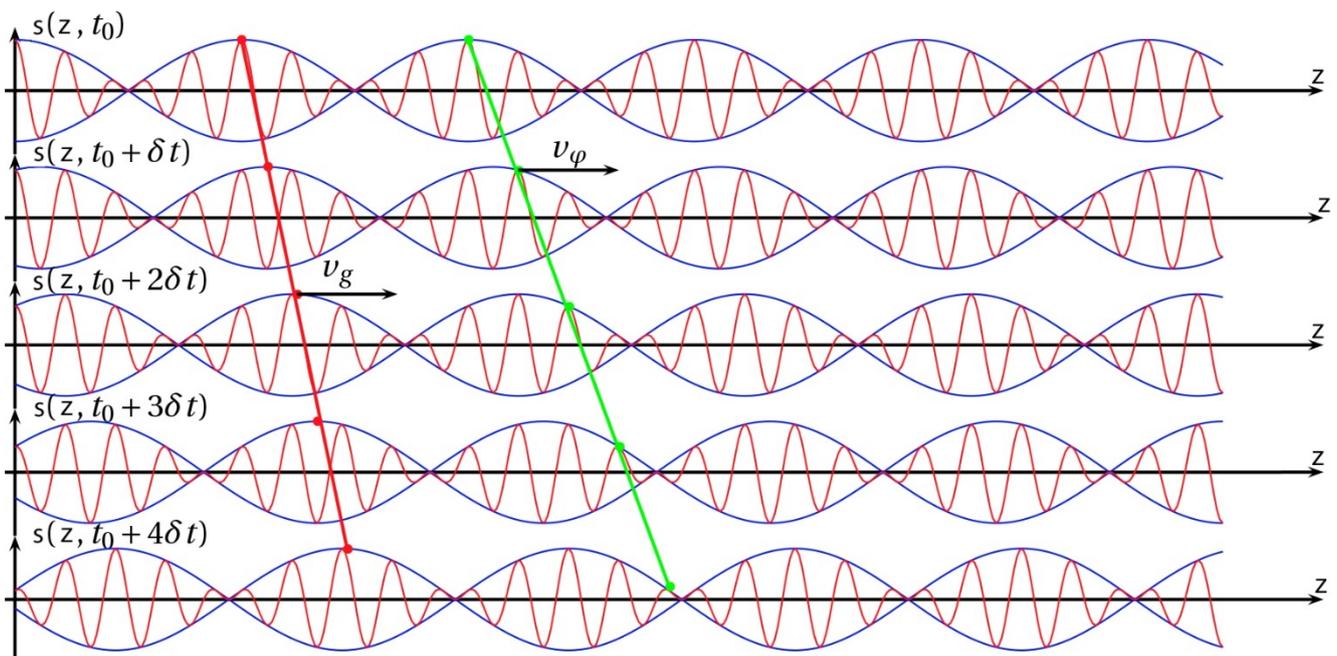
On pose :

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 - \delta\omega \\ \omega_2 = \omega_0 + \delta\omega \\ k_1 = k_0 - \delta k \\ k_2 = k_0 + \delta k \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \delta\omega \ll \omega_0 \\ \delta k \ll k_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow s(z, t) \sim 2s_0 \cos\left(\omega_0 t - k_0 z + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\delta\omega t - \delta k z + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Le signal est constitué d'une sinusoïde de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, dont l'enveloppe est une sinusoïde de période $\Delta T = \frac{2\pi}{\delta\omega}$ beaucoup plus grande. Le premier terme est une onde plane progressive harmonique de célérité $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$ alors que le second terme est une onde plane progressive harmonique de célérité $v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k}$.

L'onde « moyenne » se propage à la vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$
à l'intérieur de l'enveloppe qui, elle, se propage à la vitesse de groupe $v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega_0}$



II-2) Obtention d'onde localisée

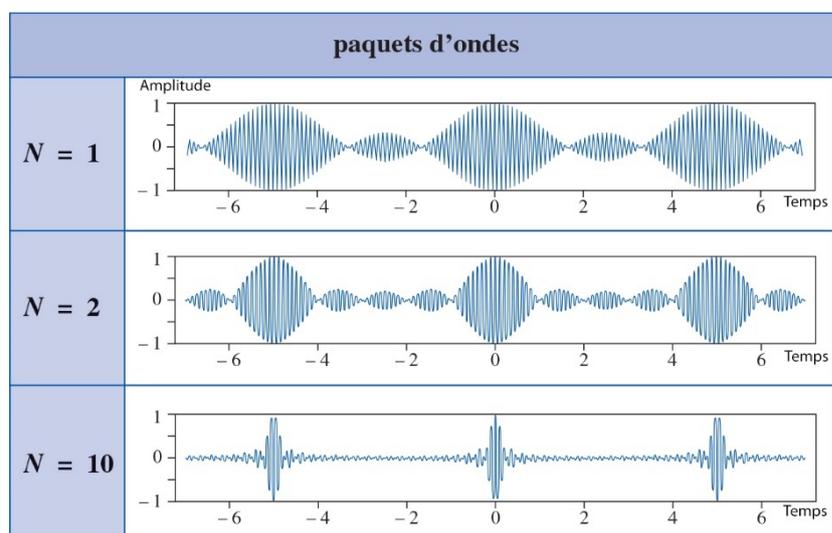
Une onde plane progressive monochromatique seule n'est absolument pas localisée.

La somme de deux ondes sinusoïdales de fréquences voisines est un signal oscillant à la fréquence moyenne dont l'amplitude évolue lentement : nous pouvons dire que l'onde globale est essentiellement localisée au voisinage des ventres des fuseaux de modulation de son amplitude.

En superposant un nombre plus important d'ondes planes progressives monochromatiques, nous pouvons essayer de réduire encore l'extension de l'enveloppe du signal. Envisageons donc un paquet de $(2N+1)$ ondes planes sinusoïdales, de pulsations voisines ω_n autour de la valeur moyenne ω_0 :

$$s(z, t) = \sum_{-N}^N s_0 \cos(\omega_n t - k_n z + \varphi_n) \text{ où } \omega_n = \omega_0 + n \delta\omega$$

Adoptons le point de vue d'un observateur placé en $x=0$ qui regarde défiler devant lui ce paquet d'ondes. Dans tous les cas, l'observateur voit passer devant lui un signal oscillant rapidement, dont l'amplitude est lentement modulée.



Remarquons que la durée de ces « paquets » est d'autant plus réduite que le nombre d'ondes planes progressives monochromatiques superposées, et donc la largeur spectrale sont importants : $\Delta\omega = (2N + 1)\delta\omega$

On constate que :

- Δt *diminue si N augmente.*
- Le paquet d'ondes est d'autant plus localisée que le nombre d'OPPH superposées est grand.
- Afin de garder $\Delta\omega$ finie il faudra donc choisir :

$$\delta\omega \rightarrow 0 \text{ et } N \rightarrow \infty$$

Un paquet d'ondes localisé dans le temps et l'espace est une superposition d'ondes planes progressives monochromatiques à répartition continue de fréquences.

II-3) Propagation du paquet d'ondes

a) Analyse de Fourier

Le passage du discret au continu permet d'obtenir la forme du paquet d'onde. C'est l'analyse de Fourier permet d'écrire la fonction $s(z,t)$ sous la forme :

$$s(z, t) = R_e \left(\underline{s}(z, t) \right) \text{ où } \underline{s}(z, t) = \int_0^{\infty} \underline{A}(\omega) e^{i(\omega t - kz)} d\omega$$

On parle de paquet d'ondes quand l'amplitude $\underline{A}(\omega)$ ne prend de valeurs significatives que sur un petit intervalle de pulsations d'où la forme complexe du paquet d'ondes, défini par :

$$\underline{s}(z, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) e^{i(\omega t - kz)} d\omega$$

Cette expression prend une forme plus simple dans le cas où \underline{A}

est réel.

Un paquet d'onde est représenté par la forme suivante :

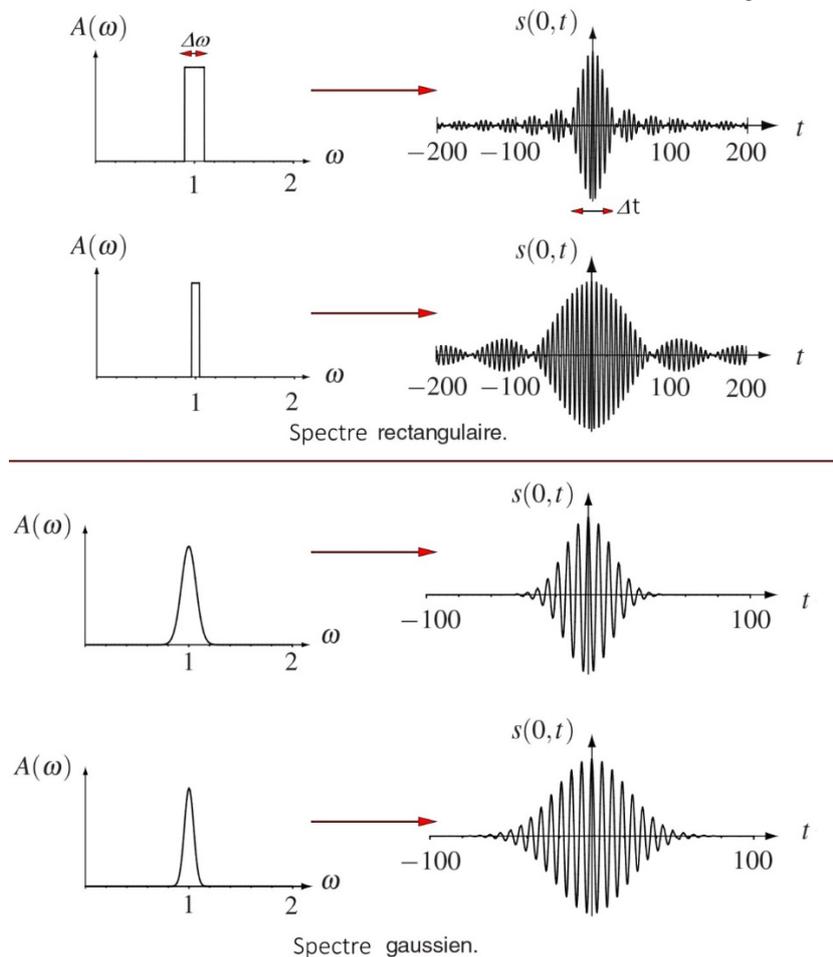
$$s(z, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} A(\omega) \cos(\omega t - kz) d\omega$$

Ou sous sa forme complexe :

$$\underline{s}(z, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) e^{i(\omega t - kz)} d\omega$$

Sur le document suivant sont représentées les amplitudes détectées par un observateur regardant le paquet passer en $x=0$ dans deux cas particuliers :

- Pour un spectre rectangulaire.
- Pour un spectre gaussien telle que $A(\omega) = a_0 e^{-2\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Delta\omega}}$



Sur tous ces exemples, nous remarquons une propriété importante des signaux réels : $s(0,t)$ ne prend de valeurs significatives que dans un intervalle de temps d'autant plus grand que l'extension spectrale du spectre donné est petite d'où :

L'extension spectrale et temporelle du paquet d'onde sont liées par :

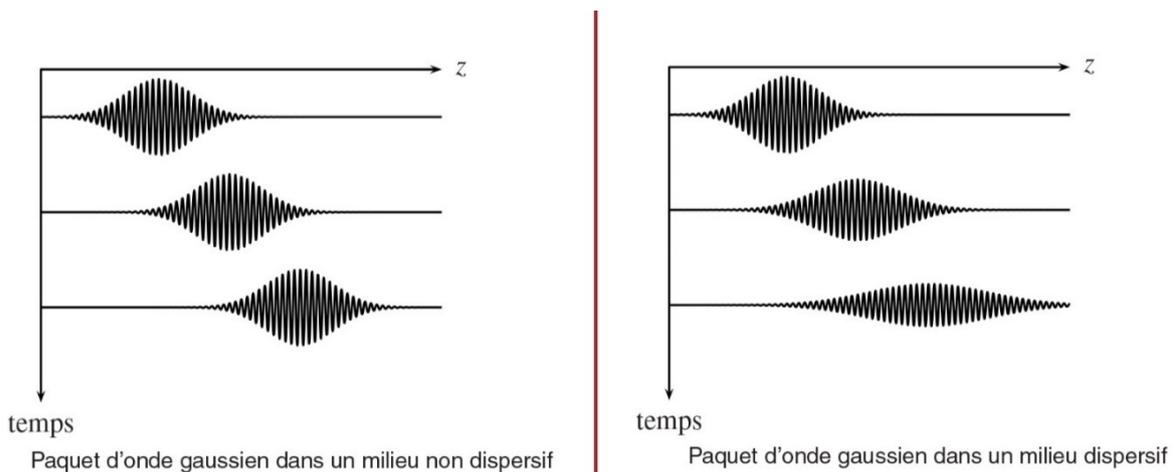
$$\Delta t \Delta \omega \sim 1$$

De même on a :

$$\Delta z \Delta k \sim 1$$

b) Propagation avec ou sans dispersion

Pour une propagation régie par l'équation de d'Alembert, la relation de dispersion donne une vitesse de phase indépendante de ω . Toutes les ondes planes progressives monochromatiques d'un paquet se propagent à la même vitesse : la propagation n'est pas dispersive.



Si les ondes planes progressives monochromatiques du paquet se propagent à des vitesses de phase qui diffèrent les unes des autres, la propagation est dispersive, et le paquet d'ondes se déforme en se propageant.

II-4) Vitesse de groupe

Imaginons que l'onde soit quasi monochromatique. La distribution de l'onde est alors très restreinte autour d'une valeur ω_0 .

Alors, en effectuant un développement limité de k au voisinage de $k(\omega_0)$:

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{k_0} (\omega - \omega_0) + o(\omega)$$

On peut réécrire l'onde sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{s}(z, t) &= \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) e^{i(\omega t - kz)} d\omega \\ \Leftrightarrow \underline{s}(z, t) &= \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) e^{i\left(\omega t - \left(k(\omega_0) + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{k_0} (\omega - \omega_0)\right)z\right)} d\omega \end{aligned}$$

On pose : $\omega = \omega_0 + \delta\omega$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{s}(z, t) &= \int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) e^{i\left((\omega_0 + \delta\omega)t - \left(k(\omega_0) + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{k_0} \delta\omega\right)z\right)} d(\delta\omega) \\ \Rightarrow \underline{s}(z, t) &= e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) e^{i\delta\omega \left(t - \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{k_0} z\right)} d(\delta\omega) \\ \Rightarrow \underline{s}(z, t) &= e^{i\omega_0 \left(t - \frac{k_0 z}{\omega_0}\right)} \int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) e^{i\delta\omega \left(t - \frac{z}{v_g}\right)} d(\delta\omega) \end{aligned}$$

Si on choisit une fenêtre spectrale carré alors $\underline{A}(\omega) = a_0$ et :

$$\underline{s}(z, t) = a_0 e^{i\omega_0 \left(t - \frac{k_0 z}{\omega_0}\right)} \frac{e^{i\frac{\Delta\omega}{2} \left(t - \frac{z}{v_g}\right)} - e^{-i\frac{\Delta\omega}{2} \left(t - \frac{z}{v_g}\right)}}{i \left(t - \frac{z}{v_g}\right)}$$

$$\Rightarrow \underline{s}(z, t) = 2a_0 e^{i\omega_0\left(t - \frac{k_0 z}{\omega_0}\right)} \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\left(t - \frac{z}{v_g}\right)\right)}{t - \frac{z}{v_g}}$$

$$\Rightarrow \underline{s}(z, t) = \underbrace{a_0 \Delta\omega e^{i\omega_0\left(t - \frac{k_0 z}{\omega_0}\right)}}_{\text{onde moyenne}} \underbrace{\text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2}\left(t - \frac{z}{v_g}\right)\right)}_{\text{enveloppe}} \text{ où } \text{sinc} = \frac{\sin(x)}{x}$$

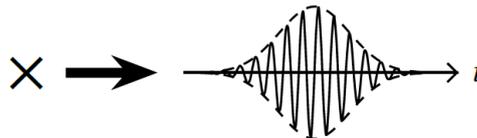
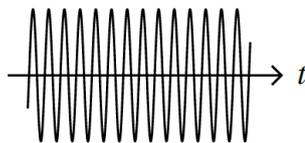
Le paquet d'onde peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{s}(z, t) = \underbrace{\underline{a}(z - v_\phi t)}_{\text{onde moyenne}} \cdot \underbrace{\underline{e}(z - v_g t)}_{\text{enveloppe}}$$

L'onde moyenne se propage à la vitesse de phase : $v_\phi = \frac{\omega_0}{k_0}$.

L'enveloppe à la vitesse de groupe : $v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$

Onde moyenne
variations rapides à ω_0



Paquet d'ondes



Onde enveloppe

III – Ondes électromagnétiques dans un conducteur

III-1) Loi d'Ohm locale

Hypothèses du modèle de Drude :

- Les électrons de conduction sont fournis par chaque atome et délocalisés à l'échelle du métal. Les ions positifs du réseau sont fixes.
- Pas d'interaction longue portée entre cations et électrons. L'influence du réseau de cations est traduite par une force de frottement fluide (mais ce sont surtout les phonons et les impuretés qui interagissent avec les électrons).
- Pas de champ magnétique externe.
- Électrons non relativistes.
- On a fait l'hypothèse que le champ électrique est uniforme à l'échelle d'un volume mésoscopique d'électrons. Cela se traduit par la condition $\lambda \ll l = 10^{-8}m$ où l est le libre parcours moyen d'un électron

D'où le PFD appliqué à l'électron dans un référentiel galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau}$$

Qui s'écrit en complexe :

$$\begin{aligned} j\omega m \underline{\vec{v}} &= -e\underline{\vec{E}} - \frac{m\underline{\vec{v}}}{\tau} \\ \Rightarrow \underline{\vec{v}} &= -\frac{\underline{e\vec{E}}}{m} \frac{1}{j\omega + \frac{1}{\tau}} \\ \Rightarrow \underline{\vec{j}} &= -ne\underline{\vec{v}} = \frac{ne^2\tau}{1 + j\omega\tau} \underline{\vec{E}} \end{aligned}$$

D'où la conductivité complexe :

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau} \text{ avec } \gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \text{ conductivité statique}$$

Remarques :

- $\tau \sim 10^{-14} \text{ s}$: c'est le temps moyen entre 2 chocs sur le réseau de cations.
- En HF : $\omega\tau \gg 1 \Rightarrow \underline{\gamma} = -j \frac{\gamma_0}{\omega\tau}$ la conductivité est imaginaire pure, on retrouvera ce cas dans les plasmas dilués.
- La conductivité complexe : $\underline{\vec{j}}$ et $\underline{\vec{E}}$ sont déphasés : lorsque le champ varie trop rapidement, c'est comme si les électrons avaient une certaine inertie et se déplaçaient avec un certain retard.

III-2) Equation de propagation

Les équations de Maxwell dans un milieu localement neutre sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} MG : \text{div } \vec{E} = 0 \\ M\phi : \text{div } \vec{B} = 0 \\ MF : \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ MA : \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Comparons les deux termes de Maxwell-Ampère :

$$\frac{\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\|\vec{j}\|} \sim \frac{\varepsilon_0 \omega E}{\gamma_0 E} \sim \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma_0}$$

$$\text{Or : } \gamma_0 = 6.10^7 \text{ Sm}^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\|\vec{j}\|} \ll 1 \Leftrightarrow \omega * 1,5.10^{19} \ll 1 \Leftrightarrow \omega \ll 6.10^{18} \text{ s}^{-1}$$

$$\Rightarrow f \ll 10^{18} \text{ Hz}$$

Par conséquent si $f < 10^{14} \text{ Hz}$ les équations de Maxwell peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} MG : \text{div } \vec{E} = 0 \\ M\phi : \text{div } \vec{B} = 0 \\ MF : \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ MA : \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \sim \mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) &= -\frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{E}) - \overrightarrow{\Delta} \vec{E} &= -\frac{\partial(\mu_0 \vec{J})}{\partial t} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta} \vec{E} &= \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

L'évolution du champ électrique dans un conducteur ohmique est régie par l'équation :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = D \overrightarrow{\Delta} \vec{E}$$

Cette équation est analogue formellement à une équation de diffusion tridimensionnelle du champ électrique dont le coefficient de diffusion est $D = \frac{1}{\mu_0 \gamma_0}$.

Par analyse dimensionnelle, il est possible d'en déduire un ordre de grandeur de la distance caractéristique de diffusion du champ dans un métal. Pour une onde de pulsation ω , la distance caractéristique de pénétration est :

$$L^* \sim \sqrt{DT} \sim \sqrt{\frac{D}{\omega}}$$

$$\Leftrightarrow L^* \sim \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$$

III-3) Effet de peau dans un demi-espace métallique

On cherche des solutions de l'équation différentielle sous forme d'ondes électromagnétiques progressives généralisées :

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{r}})}$$

En utilisant cette notation complexe, l'équation

$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devient :

$$-\underline{\vec{k}}^2 \underline{\vec{E}} = j\omega \mu_0 \gamma_0 \underline{\vec{E}}$$

$$\Rightarrow \underline{k}^2 = -j\omega \mu_0 \gamma_0$$

La relation de dispersion des OPPH* dans un conducteur ohmique de conductivité γ_0 s'écrit :

$$\underline{k}^2 = -j\omega \mu_0 \gamma_0$$

Cherchons les racines complexes de cette équation en utilisant la forme géométrique de ce nombre complexe :

$$\underline{k}^2 = e^{-j\frac{\pi}{2}} \omega \mu_0 \gamma_0$$

$$\Rightarrow \underline{k} = \pm e^{-j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\omega \mu_0 \gamma_0}$$

$$\Rightarrow \underline{k} = \pm \frac{1-j}{\sqrt{2}} * \sqrt{\omega \mu_0 \gamma_0}$$

$$\Rightarrow \underline{k} = \pm \frac{1-j}{\delta} \text{ où } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \gamma_0}}$$

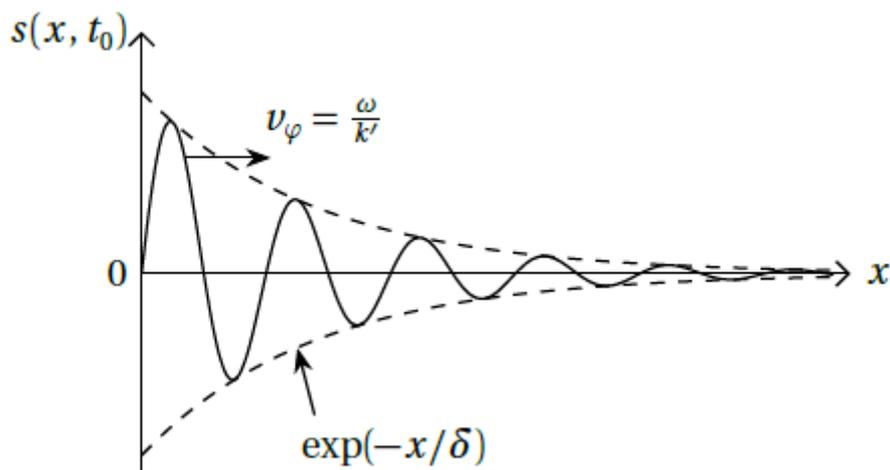
Le vecteur d'onde est composé d'une partie réelle et d'une partie imaginaire ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 e^{\pm x/\delta} e^{j(\omega t \pm \frac{x}{\delta} + \varphi)} \vec{u} \\ \Rightarrow \vec{E} &= E_0 e^{\pm x/\delta} \cos\left(\omega t \pm \frac{x}{\delta} + \varphi\right) \vec{u} \end{aligned}$$

On considère ici une onde se propageant dans la direction de l'axe (Ox) ce qui correspond à un signe « - » dans le cosinus et donc aussi à un signe « - » dans l'exponentielle. Le signe dans l'exponentielle assure la décroissance de l'amplitude de l'onde lorsque x augmente. Finalement, l'amplitude d'une composante de l'onde se propageant dans la direction de l'axe (Ox) s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi\right) \vec{u}$$

Cette onde est une onde plane progressive harmonique atténuée sur une distance caractéristique δ appelée épaisseur de peau du métal.



Dans un conducteur ohmique, la relation de dispersion devient :

$$\underline{k} = \pm \frac{1-j}{\delta} \text{ où } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\gamma_0}}$$

L'onde électromagnétique dans le métal est une onde plane progressive harmonique atténuée selon la direction du vecteur d'onde. Un champ électromagnétique de pulsation ω ne pénètre dans le métal que sur une distance de l'ordre de δ , appelée épaisseur de peau, au voisinage de la surface.

mm.

Les courants se répartissent uniformément dans les fils électriques usuels dont le rayon est de l'ordre du mm.

À une fréquence de l'ordre de 50 Hz pour du cuivre, l'épaisseur de peau δ est de l'ordre du millimètre.

À haute fréquence $f = 2$ GHz pour du cuivre, $\delta = 1,4 \mu\text{m}$. Les courants sont localisés proches de la surface du métal, pour ces circuits hyperfréquences utilisés par exemple dans les processeurs, de fins dépôts métalliques suffisent pour conduire les courants

III-4) Aspects énergétiques

a) Champ magnétique

Soit :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{u}_y \text{ c\`a d } \varphi = 0$$

De plus :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{1-j}{\delta\omega} \vec{u}_x \wedge \underline{\vec{E}} = \frac{1-j}{\delta\omega} E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})} (\vec{u}_z)$$

Soit, en prenant la partie réelle :

$$\vec{B} = \left(\frac{E_0}{\delta\omega} e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \frac{E_0}{\delta\omega} e^{-\frac{x}{\delta}} \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right) (\vec{u}_z)$$

$$\Leftrightarrow \vec{B} = \frac{E_0}{\delta\omega} e^{-\frac{x}{\delta}} \left(\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right) \right) (\vec{u}_z)$$

$$\Leftrightarrow \vec{B} = 2 \frac{E_0}{\delta\omega} e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_z$$

$$\Leftrightarrow \vec{B} = \underbrace{\sqrt{2} \frac{E_0}{\delta\omega} e^{-\frac{x}{\delta}}}_{\text{absorption}} \underbrace{\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)}_{\text{propagation}} \vec{u}_z$$

Le terme $\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)$ correspond à une onde plane progressive monochromatique se propageant selon x croissant. Cependant, cette onde s'atténue en se propageant à cause du terme $e^{-\frac{x}{\delta}}$. L'onde devient de plus en plus faible au cours de sa propagation, et la distance d'atténuation est δ .

b) Puissance moyenne

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est égale à :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{1}{2} R_e \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} R_e \left(E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{u}_y \wedge \left(\frac{1+j}{\delta\omega} E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-j(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{u}_z \right) \right) \\ &= \frac{E_0^2}{2\mu_0 \delta\omega} e^{-2\frac{x}{\delta}} \vec{u}_x \end{aligned}$$

La puissance moyenne transportée par l'onde s'atténue avec une distance caractéristique égale à : $\frac{\delta}{2}$

IV - Onde transversale dans un plasma dilué

IV-1) Interaction entre une OPPH et un plasma

a) Modèle du plasma

Dans un modèle simple, un plasma est un milieu dilué homogène et isotrope, dont les propriétés sont assimilables à celle d'un gaz ionique globalement neutre. L'état plasma, souvent appelé quatrième état de la matière, est le plus représenté dans l'univers avec des densités particulières de $10^{40} m^{-3}$ dans les étoiles et de $10^6 m^{-3}$ dans les gaz interstellaires.

Un plasma est un milieu ionisé, constitué d'ions positifs, de charge $+e$ et de masse M , et d'électrons, de charge $-e$ et de masse m . Le plasma est supposé peu dense, de telle sorte que les interactions entre les charges électriques puissent être négligées.

Le milieu est neutre, il comporte n_0 ions et n_0 électrons par unité de volume.

Le champ électrique de l'onde envisagé se met sous la forme, en notation complexe :

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}} &= \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - kx)} \text{ où } \underline{\vec{E}}_0 \perp (Ox) \\ \Rightarrow \underline{\vec{B}} &= \underline{\vec{B}}_0 e^{j(\omega t - kx)} \text{ où } \underline{\vec{B}}_0 = \frac{k}{\omega} \vec{u}_x \wedge \underline{\vec{E}}_0\end{aligned}$$

Mais la relation entre le vecteur d'onde k et la pulsation ω est a priori quelconque.

b) Aspects microscopiques

Sous l'action du champ électromagnétique, les particules chargées vont se mettre en mouvement. Les ions étant beaucoup plus lourds que les électrons, on les supposera fixes et on ne considérera que le mouvement des électrons.

On écrit la relation fondamentale de la dynamique pour un volume $d\tau$ comportant n_0 électron :

$$m n_0 d\tau \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -n_0 d\tau e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

On a pour cela négligé le poids de l'électron devant la force de Lorentz. De plus, on a supposé que le plasma fût assez dilué pour que les interactions électron-électron et électron-ion soient négligeables.

On a établi que l'action du champ magnétique d'une onde plane progressive monochromatique dans le vide, sur une particule chargée, était négligeable devant celle du champ électrique. Étudions ce qu'il en est ici :

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{vB}{E} = \frac{vk}{\omega} \sim \frac{v}{c} \ll 1$$

Comme le plasma est dilué, on suppose que ω reste au moins de l'ordre de ck , et le rapport $\frac{F_m}{F_e}$ est alors négligeable par rapport à 1.

Donc :

$$m \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -e\vec{E}$$

Par une analyse en ordre de grandeur des deux accélérations on a :

$$\frac{\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\|}{\left\| (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right\|} \sim \frac{\frac{v}{T}}{\frac{v^2}{\lambda}} = \frac{\lambda}{vT} = \frac{c}{v} \gg 1$$

$$\Rightarrow m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E}$$

Ce qui donne en régime harmonique :

$$mj\omega \underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}} \Rightarrow \underline{\vec{v}} = j \frac{e\underline{\vec{E}}}{m\omega}$$

On remarque que :

$$\frac{\underline{\vec{v}}_{\text{électrons}}}{\underline{\vec{v}}_{\text{ions}}} = \frac{M}{m} \gg 1$$

Il est naturel de s'intéresser aux seuls mouvements des électrons. Cela revient à dire que le courant est constitué du mouvement des seuls électrons.

IV-2) Conductivité complexe du plasma

Évaluons alors la densité volumique de courant :

$$\underline{\vec{j}} = -e n_0 \vec{v} = -j n_0 \frac{e^2 \underline{\vec{E}}}{m \omega}$$

On peut écrire cette relation sous la forme suivante :

$$\underline{\vec{j}} = -j \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \underline{\vec{E}} \text{ où } \omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \varepsilon_0}}$$

ω_p a bien la dimension d'une pulsation car :

$$[\omega_p^2] = L^{-3} M^{-1} \left[\frac{e^2}{\varepsilon_0} \right] = L^{-3} M^{-1} [FL^2] = L^{-3} M^{-1} MLT^{-2} L^2 = T^{-2}$$

Cette loi ressemble à la loi d'Ohm locale, car la densité volumique de courant et le champ électrique sont proportionnels. En revanche, le terme qui joue le rôle de la conductivité est ici imaginaire pur :

$$\underline{\gamma} = -j n_0 \frac{e^2}{m \omega}$$

La conductivité complexe du plasma s'écrit :

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma} \underline{\vec{E}} \text{ où } \begin{cases} \underline{\gamma} = -j n_0 \frac{e^2}{m \omega} = -j \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \\ \omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \varepsilon_0}} \end{cases}$$

IV-3) Aspect énergétique

Alors que la conductivité est réelle positive pour un métal. Le champ électrique et le courant sont donc toujours en quadrature et la puissance volumique moyenne cédée par le champ aux charges est

nulle. En effet :

$$\left\langle \frac{dP}{d\tau} \right\rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\vec{j} \cdot \vec{E}^* \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(-j n_0 \frac{e^2}{m\omega} \cdot E^2 \right) = 0$$

Lors de certaines alternances, le champ accélère les charges. À l'alternance suivante, les charges ralentissent en rayonnant un champ électromagnétique (les charges en mouvement constituent un courant et sont donc une source du champ électromagnétique).

La puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule est nulle :

$$\left\langle \frac{dP}{d\tau} \right\rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0$$

IV-4) Équation de propagation dans le plasma

a) Densité volumique de charges

On s'intéresse désormais à la densité volumique de charge ρ . Le plasma est globalement neutre (il y a autant de charges positives que négatives au total), mais rien ne garantit qu'il reste localement neutre.

On s'intéresse à l'équation de conservation de la charge :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \gamma \operatorname{div} \vec{E} + j\omega \rho &= 0 \\ \Leftrightarrow \gamma \frac{\rho}{\varepsilon_0} + j\omega \rho &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\gamma}{\varepsilon_0} + j\omega \right) \rho &= 0 \end{aligned}$$

Or :

$$\underline{\gamma} = -j\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(-j \frac{\omega_p^2}{\omega} + j\omega \right) \underline{\rho} &= 0 \\ \Rightarrow (\omega^2 - \omega_p^2) \underline{\rho} &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi si la pulsation est différente de ω_p , la densité volumique de charge est nulle. **Le plasma est localement neutre.**

Pour avoir un ordre de grandeur, évaluons ω_p dans une haute couche de l'atmosphère située entre 60 et 300 km d'altitude : l'ionosphère. Le rayonnement du Soleil provoque l'ionisation d'une partie des molécules présentes (photo ionisation) en journée.

Ce milieu est ainsi assimilable à un plasma, pour lequel :

$$n_0 = 10^{12} m^{-3} \Rightarrow \omega_p = 5,7 \cdot 10^7 \text{ rad } s^{-1} \Rightarrow f_p = 9,0 \text{ MHz}$$

La fréquence plasma de l'ionosphère se situe ainsi dans le domaine hertzien.

b) Equation de propagation

Une première conséquence est que, comme dans le vide, l'onde plane progressive monochromatique est transverse. Rappelons que ce résultat provient des équations de Maxwell-Thomson et Maxwell-Gauss avec $\rho = 0$.

$$\text{Soit : } \underline{\vec{E}}(z, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - kz)}$$

Et :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}} &= \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \underline{\vec{E}}) - \underline{\Delta} \underline{\vec{E}} = -\underline{\Delta} \underline{\vec{E}} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \right) &= -\underline{\Delta} \underline{\vec{E}} \\ \Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{B}}) &= -\underline{\Delta} \underline{\vec{E}} \\ \Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \underline{\vec{J}} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \right) &= -\underline{\Delta} \underline{\vec{E}} \\ \Leftrightarrow -\mu_0 \frac{\partial \underline{\vec{J}}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} &= -\underline{\Delta} \underline{\vec{E}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

L'équation de propagation est l'équation de d'Alembert, avec un terme supplémentaire lié à la présence de courants.

c) Equation de dispersion

Pour arriver à l'équation de dispersion, on reporte la forme de l'onde plane progressive monochromatique dans l'équation de propagation. On en déduit :

$$-k^2 \underline{\underline{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\underline{E}} = \mu_0 \underline{\gamma} j \omega \underline{\underline{E}}$$

$$\text{Or : } \underline{\gamma} = -j \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$$

$$\Rightarrow -k^2 \underline{\underline{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\underline{E}} = \mu_0 \varepsilon_0 \omega_p^2 \underline{\underline{E}}$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

La relation obtenue est différente de celle rencontrée dans le vide : elle est caractéristique du milieu dans lequel l'onde se propage.

L'équation de dispersion dans un plasma s'écrit :

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \text{ (Klein - Gordon)}$$

IV-5) Nature des solutions

a) Onde évanescente pour $\omega < \omega_p$

La pulsation plasma joue un rôle primordial. En effet, pour $\omega < \omega_p$, cela correspond à un vecteur d'onde imaginaire pur :

$$k = \pm j \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = \pm j k_2$$

Afin d'interpréter ce résultat, on remplace la valeur de k dans l'expression du champ électrique :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0} e^{j(\omega t \pm j k_2 x)}$$

En passant à la partie réelle,

$$\vec{E} = \underline{\vec{E}_0} e^{\pm k_2 x} \cos(\omega t)$$

On s'intéresse à une onde se « propageant » suivant les x positifs, par conséquent, on conserve l'expression : $\underline{k} = -j k_2$ qui entraîne une atténuation de l'onde et non une amplification qui n'est physiquement pas acceptable.

$$\Rightarrow \vec{E} = \underline{\vec{E}_0} e^{-k_2 x} \cos(\omega t)$$

Cette onde ne se propage pas car les variables d'espace et de temps sont découplées. L'amplitude s'amplifie s'atténue au fur et à mesure que x augmente. Cette onde est nommée onde évanescente, car celle-ci ne prend de valeurs notables que sur des distances de l'ordre de $\frac{1}{k_2}$ et s'évanouit rapidement au-delà, le tout sans propagation.

Supposons l'onde polarisée rectilignement suivant \underline{u}_y :

$$\Rightarrow \vec{E} = E_0 e^{-k_2 x} \cos(\omega t) \underline{u}_y$$

On pose δ , la distance caractéristique d'atténuation :

$$\delta = \frac{1}{k_2} = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}} \Rightarrow \vec{E} = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t) \underline{u}_y$$

b) Milieu transparent pour $\omega > \omega_p$

$$\text{Pour } \omega > \omega_p : k = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} = \pm k_1$$

Le vecteur d'onde est réel et on a une onde plane progressive

monochromatique se propageant selon $\pm \vec{u}_x$ selon le sens choisi. On choisit $+\vec{u}_x$ d'où :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} \\ \Rightarrow \vec{E} &= E_0 \cos(\omega t - k_1 x) \vec{u}_y\end{aligned}$$

Au final, seules les ondes de pulsation supérieure à ω_p peuvent se propager dans le plasma. Le plasma agit vis-à-vis des ondes électromagnétiques comme un filtre passe-haut de pulsation de coupure ω_p .

Dans l'ionosphère, les ondes électromagnétiques de fréquence inférieure à 900 kHz ne se propagent donc pas. Les communications entre un satellite et le sol se font à des fréquences de quelques centaines de mégahertz, ce qui correspond bien à des fréquences pouvant se propager dans l'ionosphère.

IV-6) Aspects énergétiques

- a) Milieu transparent pour $\omega > \omega_p$
i- Vitesse de phase et de groupe

On a la relation de dispersion : $\underline{k} = k_1 = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$

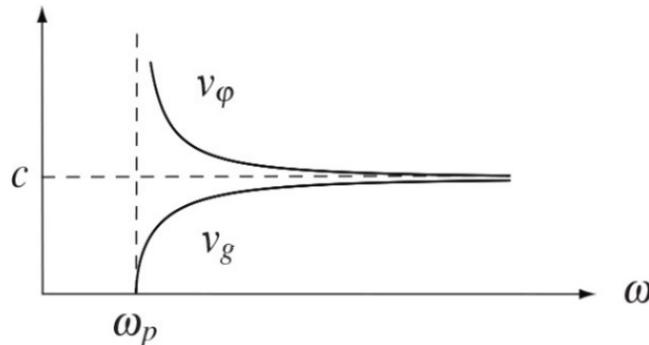
D'où :

$$\left\{ \begin{aligned} v_\varphi &= \frac{\omega}{k_1} = \frac{1}{\frac{k_1}{\omega}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{c}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \\ v_g &= \frac{d\omega}{dk} \end{aligned} \right.$$

Or : $\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2 \Rightarrow 2\omega d\omega = c^2 2k dk$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{k} \times \frac{d\omega}{dk} = c^2 \Rightarrow v_\varphi \times v_g = c^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{\varphi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \\ v_g = \frac{c^2}{v_{\varphi}} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \end{cases}$$



La vitesse de phase est supérieure à c , ce qui n'est pas gênant car elle ne représente pas la propagation d'une grandeur « matérielle ». En revanche, la vitesse de groupe est nécessairement inférieure à c , car elle représente la vitesse de propagation de l'information.

ii- Vitesse de propagation de l'énergie

Supposons :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_y \\ \Rightarrow \vec{B} &= \frac{k}{\omega} \vec{u}_x \wedge \vec{E} = \frac{k}{\omega} E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_z \end{aligned}$$

On cherche à déterminer la vitesse de propagation de l'énergie par :

$$v = \frac{\langle \vec{\Pi} \rangle}{\langle u \rangle}$$

Or :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2} \frac{k}{\mu_0 \omega} E_0^2 \vec{u}_x$$

Ici la densité d'énergie est représentée par deux termes :

- L'énergie électromagnétique : u_{em}
- L'énergie cinétique des électrons : u_{ec}

Or :

$$\begin{aligned}\langle u_{em} \rangle &= \left\langle \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} + \left(\frac{k}{\omega} \right)^2 \frac{E_0^2}{4\mu_0} \\ \Leftrightarrow \langle u_{em} \rangle &= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} + \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \left(\left(\frac{k}{\omega} \right)^2 c^2 \right) \\ \Leftrightarrow \langle u_{em} \rangle &= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right)\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\langle u_{ec} \rangle &= n_0 \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle \text{ avec } \underline{v} = j \frac{e \underline{E}}{m \omega} \\ \Rightarrow \langle u_{ec} \rangle &= \frac{n_0 e^2}{2m\omega^2} \times \frac{1}{2} R_e(j \underline{E} \times (-j) \underline{E}^*) \\ \Rightarrow \langle u_{ec} \rangle &= \frac{n_0 e^2}{4m\omega^2} \times E_0^2\end{aligned}$$

$$\text{Or : } \omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \varepsilon_0}}$$

$$\Rightarrow \langle u_{ec} \rangle = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \times \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}$$

Donc :

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

$$\text{Or : } \omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2$$

$$\Rightarrow \langle u \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

Et par conséquent :

$$v = \frac{\frac{1}{2} \frac{k}{\mu_0 \omega} E_0^2}{\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}} = \frac{k}{\omega \varepsilon_0 \mu_0} = \frac{c^2}{v_\varphi} = v_g$$

Dans un milieu transparent la vitesse de propagation de l'énergie est la vitesse groupe.

b) Onde évanescente $\omega < \omega_p$

Dans ce cas :

$$\underline{k} = -jk_2 = -j \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_y = E_0 e^{-k_2 x} e^{j\omega t} \vec{u}_y \\ \Rightarrow \vec{B} &= -\frac{jk_2}{\omega} \vec{u}_x \wedge \vec{E} = -\frac{jk_2}{\omega} E_0 e^{-k_2 x} e^{j\omega t} \vec{u}_z \end{aligned}$$

Le champ électrique et le champ magnétique sont en quadrature de phase, la valeur moyenne du vecteur de Poynting est donc nulle.

$$\langle \vec{II} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \vec{0}$$

Une onde électromagnétique de fréquence inférieure f_p arrivant sur un plasma ne lui transmet pas d'énergie, toute l'énergie de l'onde est réfléchi. Le plasma se comporte comme un miroir.

