OD3 – Ondes électromagnétiques dans le vide

A – Travaux dirigés

OD31 – OPPM dans le vide et vecteur de Poynting

On considère une onde plane progressive monochromatique (OPPM) qui se propage suivant l'axe Ox. Le champ électrique est polarisé suivant $\overrightarrow{u_y}$.

1°) Établir l'équation de propagation et en déduire la relation de dispersion.

2°) Déterminer le vecteur de Poynting. En déduire la puissance moyenne transportée par l'onde à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation.

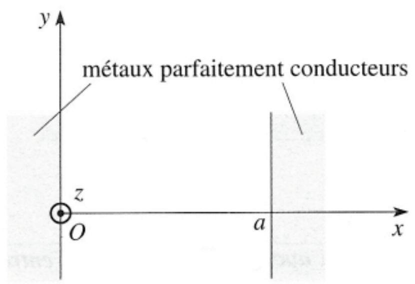
3°) Déterminer le flux du champ magnétique à travers un cadre carré de côté a=1m, formé de N spires et situé dans un plan perpendiculaire à $\overrightarrow{u_z}$ pour une fréquence f = 100 MHz.

4°) Que se passe-t-il, pour le flux, si la fréquence vaut f = 160 kHz ?

Rép : 1°) $k = \frac{\omega}{c}$ 2°) $P_{moy} = \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{2} cS$ 3°) $\phi = \frac{2NE_0 a}{kc} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \cos(\omega t)$ 4°) $\frac{ka}{2} \ll 1 \Rightarrow \phi = \frac{NE_0}{c} a^2 \cos(\omega t)$

OD32 - Ondes planes stationnaires entre deux plans

On dispose dans le vide deux plans parfaitement conducteurs, parallèles, d'équations respectives x=0 et x=a. On se propose d'étudier une onde électromagnétique, stationnaire, plane, monochromatique, à polarisation rectiligne entre ces deux plans : $\vec{E} = E_0\, f(x)\, cos(\omega t)\, \overrightarrow{u_y}$



1°) En admettant que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans un métal parfaitement conducteur, écrire les conditions aux limites que doivent vérifier les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le vide en x=0 et x=a par continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ et normale de $\vec{B}$.

2°) Déterminer la fonction f(x) et montrer que la pulsation ω est nécessairement quantifiée.

3°) Calculer le champ magnétique à de cette onde.

4°) Calculer l'énergie électrique ε_e et l'énergie magnétique ε_B, emmagasinée dans un volume cylindrique d'axe (0x), situé entre les deux plans et de section S.

Montrer qu'il y a échange permanent entre énergie électrique et énergie magnétique.

Rép : 1°) $\vec{E}(0,t) = \vec{E}(a,t) = \vec{0}\ et\ \overrightarrow{B_n}(0,t) = \overrightarrow{B_n}(a,t) = \vec{0}$ 2°) $\vec{E} = E_0 \sin(k_m x)\ cos(\omega_m t)\, \overrightarrow{u_y}$ 3°) $B = -\frac{E_0}{c} \cos(k_m x)\, sin\,(\omega_m t)\, \overrightarrow{u_z}$ 4°) $\varepsilon_e + \varepsilon_B = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} aS$

OD33 – Pression de radiation

Soit une onde plane, monochromatique, de fréquence ν, se propageant dans la direction et le sens de $\overrightarrow{u_x}$, dont le champ électrique est $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\ \overrightarrow{u_y}$. On rappelle que l'éclairement ε est la puissance moyenne qui traverse une surface d'aire unité perpendiculaire à la direction de propagation.

1°) Exprimer ε en fonction de $\varepsilon_0, c\ et\ E_0$.

2°) On considère cette onde comme un faisceau de photons se propageant dans la direction et le sens de $\overrightarrow{u_x}$.

a) Exprimer le nombre N_0 de photons traversant par unité de temps l'unité de surface perpendiculaire à Ox en fonction de ε et de ν.

b) L'onde arrive sur une surface plane perpendiculaire à Ox, d'aire S, parfaitement réfléchissante. On étudie le rebondissement des photons sur cette surface.

- Quelle est la quantité de mouvement reçue par la paroi au cours d'un choc photon-paroi ?
- Quelle est la force subie par la paroi en fonction de ε, *S* et *c* ?
- Exprimer la pression p subie par la paroi en fonction de ε et *c* puis en fonction de $\varepsilon_0\ et\ E_0$.

c) Reprendre la question ci-dessus lorsque la paroi est parfaitement absorbante.

d) Calculer $\varepsilon, E_0\ et\ p$ sur une paroi totalement absorbante pour un laser ayant un diamètre d = 5,00 mm et une puissance moyenne *P* = 100 W (laser utilisé industriellement pour la découpe de feuilles).

3°) L'onde est maintenant absorbée par une sphère de rayon *a*, bien inférieur au rayon du faisceau.

a) Quelle est, en fonction de ε , *a* et *c* la force $\vec{F}$ subie par la sphère ?

b) Le Soleil donne au voisinage de la Terre (juste au-dessus de l'atmosphère terrestre) l'éclairement $\varepsilon =$

$1,40.10^3\ W.m^{-2}$. L'émission est isotrope, la distance Terre-Soleil est égale à $D = 150 \times 10^6\ km$. Sur une surface de dimensions petites devant D, l'onde arrivant du Soleil est quasi-plane. Quelle est la puissance P_0 émise par le Soleil ?

Un objet sphérique, de rayon a, de masse volumique μ, est, dans le vide interplanétaire, à la distance r du Soleil et absorbe totalement le rayonnement solaire. Évaluer le rapport entre la force due à l'absorption du rayonnement solaire et la force gravitationnelle exercée par le Soleil sur cet objet dans les deux cas suivants :

- Cas d'une météorite : $\mu = 3,0 \times 10^3\ kg.m^{-3}\ et\ a = 1,0\ m$.
- Cas d'une poussière interstellaire : $\mu = 1,0 \times 10^3\ kg.m^{-3}\ et\ a = 0,1\ \mu m$.

Commenter.

Données : constante de la gravitation universelle $G = 6,67 \times 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$ et la masse du Soleil : $M_S = 2,0 \times 10^{30}\ kg$.

Rép : 1°) $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$ 2°) a) $N_0 = \frac{\varepsilon}{h\nu}$ b) $p = \varepsilon_0 E_0^2$ c) $p' = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$ d) $p = 3,40 mPa$ 3°) a) $\vec{F} = \frac{N_0 h\nu}{c}\pi a^2 \overrightarrow{u_x} = \frac{\pi a^2 \varepsilon}{c}\overrightarrow{u_x}$

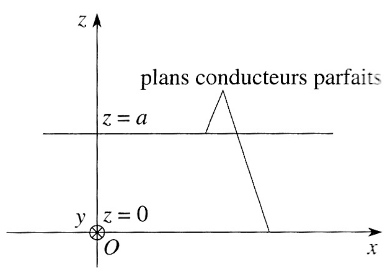
b) Dans le cas d'une météorite, la force due à l'absorption solaire est tout à fait négligeable devant l'attraction gravitationnelle. Dans le cas d'une poussière interstellaire, elle peut devenir plus importante que celle-ci et la résultante des forces sur la poussière est dirigée à l'opposé du Soleil, elle « fuit » le Soleil.

B – Exercices supplémentaires

OD34 - Ondes se propageant entre deux plans

Une onde électromagnétique se propage dans le vide, parallèlement à (0x), entre les plans z=0 et z=a considérés comme conducteurs parfaits. Son champ électrique est :

$$\vec{E} = E_0 sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_y}$$



1°) Quel est le champ magnétique associé à cette onde ?

2°) Cette onde est-elle plane ? transverse ?

3°) Quelle est la relation de dispersion des ondes étudiées ?

4°) Quelle vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ pouvons-nous associer à ces ondes ? Quelle est la particularité de cette vitesse ?

5°) Calculer l'énergie moyenne $\langle\varepsilon\rangle$ contenue dans un parallélépipède de volume ΔxΔyΔz avec Δx=Δy=1 et Δz=a.

6°) Quelle est l'énergie moyenne $\langle\phi\rangle$ transportée, par unité de temps, par l'onde à travers une section de hauteur a et de largeur unité perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde ?

7°) Quelle vitesse d'énergie $v_e = \frac{\langle\phi\rangle}{\langle\varepsilon\rangle}$ pouvons-nous associer à cette onde ? La comparer à la vitesse de phase.

Rép : 1°) $\vec{B} = B_x(x,z)\overrightarrow{u_x} + B_z(x,z)\,\overrightarrow{u_z}$ 2°) Transverse électrique 3°) $\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{\pi^2}{a^2}$ 4°) $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}$ 5°) $\langle\varepsilon\rangle = \frac{\varepsilon_0 E^2}{4}a$ 6°) $\langle\phi\rangle = \frac{E_0^2}{4\mu_0\omega}ka$

7°) $v_g = c\sqrt{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$

OD35 - Propagation guidée et relation de dispersion

On considère deux plans parfaitement conducteurs, parallèles au plan Oyz, d'abscisses x=0 et x=d. Une onde électromagnétique se propage dans le vide suivant $\overrightarrow{u_z}$ entre ces deux plans. On appelle c la célérité de la lumière dans la vide.

1°) Établir l'équation de propagation.

2°) On cherche le champ électrique sous la forme :

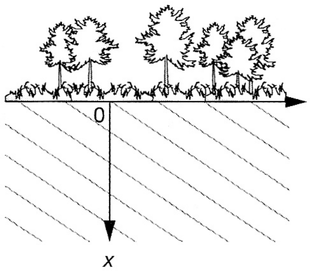
$$\underline{\vec{E}} = E(x)\ e^{i(\omega t - kx)}\overrightarrow{u_y}$$

Établir la relation de dispersion. Montrer que l'on doit avoir une fréquence supérieure à une fréquence minimale f_{min} pour avoir propagation de cette onde. Déterminer f_{min} en fonction de c et d. Quelle est la nature de l'onde ?

Rép : 1°) D'Alembert 2°) $f_{min} = \frac{c}{2d}$

OD36 - Profondeur de pénétration d'une onde thermique

Les variations de température à la surface du sol se répercutent de proche en proche en profondeur. Cet exercice vise à interpréter pour quelle raison une gelée brutale, apparue en une nuit, a beaucoup moins d'influence sur la végétation qu'un long hiver. Pour la terre, on adopte la valeur de diffusivité suivante : $K = \frac{\lambda}{\mu c}$. Pour simplifier l'étude, on assimile chaque évolution temporelle sur l'une ou l'autre période (jour ou année) à une sinusoïde.



a) Chercher une solution à l'équation de la chaleur unidimensionnelle, sous forme d'une onde progressive de vecteur d'onde éventuellement complexe (on raisonnera en notation complexe et on ne manquera pas de relever l'analogie avec la pénétration d'une onde électromagnétique dans un métal).

b) Calculer, dans les deux cas envisagés, à quelle profondeur on enregistre une amplitude de variation égale au dixième de celle observée à la surface. Commenter.

c) Les variations à la surface du sol et à cette profondeur sont-elles en phase ?

Rép : a) $\underline{\theta} = \theta_0 e^{i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)} e^{-\frac{x}{\delta}}$ b) x=δ Ln(10), … c) $\varphi = \frac{x}{\delta}$

OD37 - Onde cylindrique

On étudie une onde électromagnétique cylindrique, émise par des sources situées le long d'un axe Oz. En coordonnées cylindriques d'axe Oz, le champ électrique s'écrit : $\vec{E}(M,t) = E(r)\exp^{i(\omega t - kr)}\overrightarrow{u_z}$; où E(r) est réel. L'onde se propage dans le vide.

1°) Déterminer le champ magnétique associé à ce champ électrique, en utilisant le formulaire suivant.

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix}$$

Commenter l'expression du champ magnétique obtenu.

2°) Quelle est la valeur moyenne $\langle\vec{\pi}\rangle$ du vecteur de Poynting ? En déduire la puissance moyenne P rayonnée à travers un cylindre d'axe Oz de hauteur h = 1 m et de rayon r.

3°) En déduire l'expression de E(r) en fonction de r, P, k, ω et μ_0.

4°) Dans la zone de champ lointain (r>>λ), donner les champ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ et décrire la structure de l'onde.

5°) En déduire la relation de dispersion, en considérant l'onde dans la zone de champ lointain.

On rappelle l'expression du laplacien d'un champ scalaire de la forme U (r, t) en coordonnées cylindriques : $\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)$

Rép : 1°) $\vec{B} = \left(-\frac{k}{\omega}E(r) - \frac{i}{\omega}\frac{dE}{dr}\right)e^{i(\omega t - kr)}\overrightarrow{u_\theta}$ 2°) $P = \frac{kE^2(r)}{\omega\mu_0}\pi r h$ 3°) $E(r) = \sqrt{\frac{\omega\mu_0 P}{\pi k r h}}$ 4°) Onde plane… 5°) $k = \frac{\omega}{c}$