

OD3 – Ondes électromagnétiques dans le vide

A – Travaux dirigés

OD31 – OPPM dans le vide et vecteur de Poynting

1. Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent :

$$\text{Equation de Maxwell-Gauss : } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

$$\text{Equation de Maxwell-Flux : } \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{Equation de Maxwell-Faraday : } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Equation de Maxwell-Ampère : } \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On n'a pas de charges et de courants volumiques.

On déduit des équations de Maxwell que :

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \operatorname{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

puisque $\operatorname{div} \vec{E} = \vec{0}$ dans le vide.

On peut inverser les opérateurs rotationnel et dérivation partielle par rapport au temps puisqu'on a des variables indépendantes. On a donc :

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On en déduit l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

en posant

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

$c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ est la célérité de la lumière dans le vide.

On a alors :

$$\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

On obtient la relation de dispersion d'une OPPM dans le vide :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

2°)

On a une OPPM. Le champ magnétique se déduit directement de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\vec{k} \wedge \vec{E} = -(i\omega \vec{B})$$

Finalement, on a :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

On a vu que $\omega = kc$. On a également :

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_z$$

En notation réelle, on a :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y ; \quad \vec{B} = \text{Re}(\underline{\vec{B}}) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$$

On vérifie que le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est bien direct.

Le vecteur de Poynting est défini par :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

On a vu que $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$. On a donc :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting sur une période est :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = c \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \vec{u}_x$$

car la moyenne temporelle de $\cos^2(\omega t - kx)$ vaut $\frac{1}{2}$.

On considère une surface S orthogonale à la direction de propagation. On choisit $\vec{S} = S \vec{u}_x$.

La puissance moyenne qui traverse la surface S est le flux du vecteur de Poynting :

$$P_{moy} = \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \iint_S c \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \vec{u}_x \cdot dS \vec{u}_x = c \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} S$$

3. La fréquence de l'onde est $f = 100$ MHz. C'est une onde radio utilisée dans la bande FM (modulation de fréquence). La longueur d'onde est :

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 3 \text{ m.}$$

La longueur d'onde est du même ordre de grandeur que a . On ne peut pas supposer que la champ magnétique est uniforme dans le cadre.

On oriente le cadre suivant \vec{u}_z .

Le flux du champ magnétique en notation complexe à travers une spire :

$$\underline{\varphi} = \iint_S \underline{\vec{B}} \cdot d\vec{S}$$

On a alors :

$$\underline{\varphi} = \iint_S \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kx)) dx dy$$

Il faut intégrer x entre $-\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$ et y entre $-\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$. Comme les variables sont indépendantes, on a le produit de deux intégrales :

$$\underline{\varphi} = \frac{E_0}{c} \exp(i\omega t) \left(\int_{-a/2}^{a/2} \exp(-ikx) dx \right) \left(\int_{-a/2}^{a/2} dy \right)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \underline{\varphi} &= \frac{E_0 a}{c} \exp(i\omega t) \int_{-a/2}^{a/2} \exp(-ikx) dx \\ &= \frac{E_0 a}{c} \exp(i\omega t) \left[\frac{\exp(-ikx)}{-ik} \right]_{-a/2}^{a/2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\underline{\varphi} = \frac{E_0 a}{-ikc} \exp(i\omega t) \left(\exp\left(-ik\frac{a}{2}\right) - \exp\left(ik\frac{a}{2}\right) \right)$$

En simplifiant, on obtient :

$$\underline{\varphi} = \frac{E_0 a}{-ikc} \exp(2i\omega t) \left(2i \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right) = \frac{2E_0 a}{kc} \exp(i\omega t) \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

Il reste à prendre la partie réelle pour obtenir le flux réel :

$$\varphi = \frac{2E_0 a}{kc} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \cos(\omega t)$$

Le flux du champ magnétique à travers les N spires est :

$$\Phi = \frac{2NE_0 a}{kc} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \cos(\omega t)$$

4. La fréquence de l'onde électromagnétique est $f = 160$ kHz. C'est une onde radio utilisée dans la bande AM (modulation d'amplitude). La longueur d'onde est :

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{160 \times 10^3} = 1875 \text{ m.}$$

La longueur d'onde est très grande devant la dimension du cadre. Sur une distance de 1 m, le champ magnétique est quasi uniforme et quasiment la même valeur qu'en $x = 0$. On peut alors calculer le flux plus simplement que dans la question précédente.

$$\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = NBS = N \left(\frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \right) (a^2)$$

On peut effectuer un développement limité de la relation trouvée dans la question précédente puisque

$$\frac{ka}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} a = \frac{\pi a}{\lambda} \ll 1$$

On retrouve bien le même résultat :

$$\Phi = \frac{2NE_0 a}{kc} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \cos(\omega t) \approx \frac{2NE_0 a}{kc} \frac{ka}{2} \cos(\omega t) = N \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) a^2$$

OD32 - Ondes planes stationnaires entre deux plans

1) À la surface du métal, il y a :

- continuité de la composante tangentielle de \vec{E} , d'où, puisque \vec{E} est colinéaire à l'axe (Oy) :

$$\vec{E}(0, t) = \vec{E}(a, t) = \vec{0} ;$$

- continuité de la composante normale de \vec{B} , soit :

$$\vec{B}_{\text{normal}}(0, t) = \vec{B}_{\text{normal}}(a, t) = \vec{0} .$$

Or, nous pouvons exprimer le champ \vec{B} de l'onde à partir de l'équation de MAXWELL-FARADAY $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ qui conduit à :

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{\omega} \frac{df}{dx} \sin \omega t \vec{e}_z .$$

Le champ \vec{B} n'a pas de composante « normale » ($B_x = 0$) et il satisfait donc automatiquement aux conditions aux limites en $x = 0$ et $x = a$.

2) L'équation de propagation de d'ALEMBERT donne $\frac{d^2 f}{dx^2} = -k^2 f$ en posant $k = \frac{\omega}{c}$, d'où $f(x) = f_1 \cos kx + f_2 \sin kx$.

Les conditions aux limites imposent $f(0) = f(a) = 0$, d'où :

$$f_1 = 0 \quad \text{et} \quad \sin ka = 0, \quad \text{soit} \quad ka = m\pi \quad (m \text{ entier}).$$

Par suite, le nombre d'onde k et la pulsation ω de l'onde sont quantifiés et prennent les valeurs :

$$k_m = m \frac{\pi}{a} \quad \text{et} \quad \omega_m = m \frac{\pi}{a} c .$$

\vec{E} s'écrit (en prenant la constante f_2 égale à 1, ce qui revient à inclure f_2 dans la constante E_0) :

$$\vec{E} = E_0 \sin k_m x \cos \omega_m t \vec{e}_y .$$

3) \vec{B} s'en déduit immédiatement (cf. question 1)) :

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos k_m x \sin \omega_m t \vec{e}_z .$$

Les ventres du champ \vec{B} coïncident avec les nœuds du champ \vec{E} et vice versa. \vec{E} et \vec{B} sont en quadrature dans le temps et dans l'espace.

4) Les densités d'énergie électrique et magnétique valent :

$$e_E = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} = \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{2} \sin^2 k_m x \cos^2 \omega_m t$$

$$e_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{2} \cos^2 k_m x \sin^2 \omega_m t ,$$

d'où, dans le volume cylindrique de section S et de longueur a :

$$\mathcal{E}_E = \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{4} aS \cos^2 \omega t \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_B = \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{4} aS \sin^2 \omega t .$$

Nous constatons qu'il y a échange permanent entre l'énergie électrique et l'énergie magnétique de l'onde stationnaire ; l'énergie électromagnétique totale étant constante :

$$\mathcal{E}_E + \mathcal{E}_B = \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{4} aS = \text{cte} .$$

OD33 – Pression de radiation

1. L'éclairement est le flux moyen du vecteur de Poynting à travers une surface d'aire unité orthogonale à la direction de propagation.

$$\begin{cases} \langle u_e \rangle = \langle \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \\ \langle u_m \rangle = \langle \frac{B^2}{2\mu_0} \rangle = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c^2} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \langle u_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \Rightarrow \langle \vec{I} \rangle = c \langle u_{em} \rangle \vec{u}_z = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2$$

2. a. Chaque photon a une énergie $h\nu$ donc l'énergie électromagnétique qui traverse la surface S pendant la durée Δt est égale $U_{em} = N_0 h\nu S \Delta t$. Elle est d'autre part égale à $\mathcal{E} S \Delta t$. On en déduit : $N_0 = \frac{\mathcal{E}}{h\nu}$.

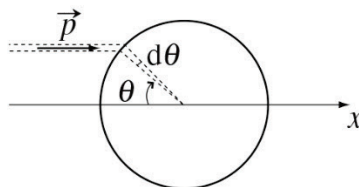
b. La quantité de mouvement du photon incident est $\vec{p}_i = \frac{h\nu}{c} \vec{u}_x$. Le photon rebondit sur la surface, la quantité de mouvement du photon réfléchi est donc $\vec{p}_r = -\frac{h\nu}{c} \vec{u}_x$. La paroi reçoit donc la quantité de mouvement $\delta \vec{p}_{\text{paroi}} = -\delta \vec{p}_{\text{photon}} = 2 \frac{h\nu}{c} \vec{u}_x$.

Entre t et $t + \Delta t$, il y a $N_0 S \Delta t$ photons qui arrivent sur la paroi, celle-ci reçoit donc la quantité de mouvement $\Delta \vec{p} = N_0 S \frac{2h\nu}{c} \Delta t \vec{u}_x = \vec{F} \Delta t$. La force subie par la paroi est : $\vec{F} = N_0 S \frac{2h\nu}{c} \Delta t \vec{u}_x = 2 \mathcal{E} \frac{S}{c} \vec{u}_x$. La pression subie par la paroi est donc : $p = 2 \frac{\mathcal{E}}{c} = \varepsilon_0 E_0^2$.

c. Si la paroi est totalement absorbante, elle reçoit la quantité de mouvement $\frac{h\nu}{c} \vec{u}_x$ au cours d'un choc donc la pression est dans ce cas : $p' = \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$.

d. $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{P}}{S} = \frac{4\mathcal{P}}{\pi d^2} \simeq 5 \text{ MW.m}^{-2}$, $E_0 = 620 \times 10^2 \text{ V.m}^{-1}$ et $p = 3,40 \text{ mPa}$. Bien que la puissance du laser soit importante, cette pression est faible.

3. a. La couronne circulaire vue du centre sous un angle compris entre θ et $\theta + d\theta$ reçoit la quantité de mouvement $\delta \vec{p} = \frac{h\nu}{c} \times 2\pi a \sin \theta d\theta \times N_0 \cos \theta dt \vec{u}_x$ entre t et $t + dt$. Seule une demi-sphère est éclairée, donc on intègre l'expression précédente pour θ variant de 0 à $\pi/2$. La sphère reçoit la quantité de mouvement : $\Delta \vec{p} = N_0 \frac{h\nu}{c} \pi a^2 dt \vec{u}_x$, ce qui correspond à la force $\vec{F} = N_0 \frac{h\nu}{c} \pi a^2 \vec{u}_x$.



Remarque

Les photons reçus et absorbés par la sphère sont ceux que recevrait un disque de rayon a perpendiculaire à \vec{u}_x ; la sphère subit donc la force que subirait ce disque c'est à dire :

$$\vec{F} = \pi a^2 p' \vec{u}_x = \frac{\pi a^2 \mathcal{E}}{c} \vec{u}_x.$$

b. $\mathcal{P}_0 = \mathcal{E} \times 4\pi D^2 = 4 \times 10^{26} \text{ W}$.

La force gravitationnelle subie par la météorite est : $F_{\text{grav}} = \mathcal{G} \frac{4}{3} \pi a^3 \mu \frac{M_S}{r^2}$. Elle est dirigée vers le Soleil.

À la distance r du Soleil, l'éclairement est $\mathcal{E}(r) = \frac{\mathcal{P}_0}{4\pi r^2}$, donc la force due à l'absorption du rayonnement solaire s'écrit : $F_{\text{abs}} = \pi a^2 \frac{\mathcal{E}(r)}{c} = \frac{a^2}{4r^2} \frac{\mathcal{P}_0}{c}$, dirigée en sens inverse de la force gravitationnelle.

Le rapport des deux vaut $\alpha = \frac{3\mathcal{P}_0}{16c\mathcal{G}M_S\pi a\mu}$. L'application numérique donne : $\alpha \simeq 2 \times 10^{-7}$ dans le cas de la météorite et $\alpha \simeq 6$ dans le cas de la poussière interstellaire. Dans le cas d'une météorite, la force due à l'absorption solaire est tout à fait négligeable devant l'attraction gravitationnelle. En revanche, dans le cas d'une poussière interstellaire, elle peut devenir plus importante que celle-ci et la résultante des forces sur la poussière est dirigée à l'opposé du Soleil, elle « fuit » le Soleil. C'est ce qui permet par exemple d'interpréter l'orientation de la queue des comètes vers l'extérieur de leur trajectoire autour du Soleil.

OD34 - Ondes se propageant entre deux plans

1) Pour déterminer le champ magnétique, utilisons l'équation de MAXWELL-FARADAY :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\text{rot } \vec{E} \\ &= E_0 \left(\frac{\pi}{a} \cos \left(\frac{\pi z}{a} \right) \cos (\omega t - kx) \vec{e}_x - k \sin \left(\frac{\pi z}{a} \right) \sin (\omega t - kx) \vec{e}_z \right).\end{aligned}$$

Intégrons cette équation par rapport au temps. À un champ statique près, qui ne participe pas à la propagation, nous obtenons :

$$\vec{B} = E_0 \left(\frac{\pi}{a\omega} \cos \left(\frac{\pi z}{a} \right) \sin (\omega t - kx) \vec{e}_x + \frac{k}{\omega} \sin \left(\frac{\pi z}{a} \right) \cos (\omega t - kx) \vec{e}_z \right).$$

2) Dans un plan $x = \text{cte}$, perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde, le champ électromagnétique dépend encore de z : l'onde n'est pas plane.

Le champ électrique de l'onde est transverse : $\vec{E} \cdot \vec{e}_x = 0$. Ce n'est pas le cas du champ magnétique. Nous pouvons aisément vérifier que les divergences de ces champs sont toutes deux nulles. Ce type d'onde est appelé onde transverse électrique (onde T.E.).

3) Le champ proposé est compatible avec les équations de MAXWELL si l'équation de MAXWELL-AMPÈRE est elle aussi vérifiée, soit $\text{rot } \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Dans la mesure où il ne reste que cette seule équation à vérifier, nous pouvons aussi utiliser l'équation de propagation $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ (ou celle appliquée à \vec{B}). Nous obtenons ainsi la relation de dispersion :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{\pi^2}{a^2}.$$

La propagation n'est possible que pour $\omega > \omega_0 = \frac{\pi c}{a}$.

4) La vitesse de phase de cette onde, qui se propage dans la direction (Ox), est :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}.$$

Curieusement, celle-ci est supérieure à c .

5) La densité d'énergie électromagnétique est $e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$, soit :

$$e = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \left(\left(2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi z}{a} \right) \cos^2 (\omega t - kx) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cos^2 \left(\frac{\pi z}{a} \right) \sin^2 (\omega t - kx) \right).$$

Sa moyenne temporelle est :

$$\langle e \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \left(\left(2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi z}{a} \right) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cos^2 \left(\frac{\pi z}{a} \right) \right).$$

L'énergie contenue, en moyenne, dans le parallélépipède est $\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E^2}{4} a$.

6) Le vecteur de POYNTING de l'onde est $\vec{H} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$.

Sa moyenne temporelle $\langle \vec{H} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0} \frac{k}{\omega} \sin^2 \left(\frac{\pi z}{a} \right) \vec{e}_x$ nous donne le flux

moyen d'énergie à travers une section $S = \Delta y \Delta z = 1 \times a$: $\langle \Phi \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0} \frac{k}{\omega} a$.

7) La vitesse d'énergie est alors $v_e = \frac{\langle \Phi \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$.

Celle-ci est inférieure à c (fort heureusement !)

Nous verrons au chapitre 7 que cette vitesse d'énergie s'identifie avec la vitesse de groupe v_g définie par $v_g = \frac{d\omega}{dk}$.

B – Exercices supplémentaires

OD35 – Propagation guidée et relation de dispersion

1. On calcule le rotationnel du rotationnel en utilisant les équations de Maxwell :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

puisque dans le vide $\text{div} \vec{E} = 0$.

On peut inverser les opérateurs rotationnel et dérivation partielle par rapport au temps puisqu'on a des variables indépendantes. On a donc :

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

On en déduit l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

en posant

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

$c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ est la célérité de la lumière dans le vide.

2. On cherche le champ électrique en notation complexe de la forme :

$$\vec{E} = E(x) \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y.$$

On remplace le champ électrique dans l'équation de propagation et on calcule les différents termes.

Le Laplacien vectoriel du champ électrique est :

$$\begin{aligned} \Delta E_y &= \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ &= \frac{d^2 E(x)}{dx^2} \exp(i(\omega t - kz)) - k^2 E(x) \exp(i(\omega t - kz)) \end{aligned}$$

On a également :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

On remplace dans l'équation de propagation :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E(x)}{dx^2} \exp(i(\omega t - kz)) - k^2 E(x) \exp(i(\omega t - kz)) \\ = -\frac{\omega^2}{c^2} E(x) \exp(i(\omega t - kz)) \end{aligned}$$

On en déduit l'équation différentielle sur $E(x)$:

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) E(x) = 0$$

Conditions aux limites

On applique la continuité de la composante électrique pour $x = 0$ et $x = d$.

Première condition pour $x = 0$:

Dans le conducteur, le champ électrique est nul. Pour $x = 0$, le champ est suivant \vec{u}_y donc tangent au conducteur. On doit donc avoir :

$$E(0) = 0$$

Deuxième condition pour $x = d$:

Dans le conducteur, le champ électrique est nul. Pour $x = d$, le champ est suivant \vec{u}_y donc tangent au conducteur. On doit donc avoir : $E(d) = 0$

Plusieurs cas pour la résolution de l'équation différentielle

Premier cas : $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 < 0$

On pose $\Omega^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} + k^2$.

L'équation caractéristique est : $r^2 - \Omega^2 = 0$

On a deux racines réelles : $r_1 = \Omega$ et $r_2 = -\Omega$.

On a des solutions de la forme : $E(x) = A \operatorname{ch} \Omega x + B \operatorname{sh} \Omega x$

On doit avoir $E(0) = 0 = A$ et $E(d) = B \operatorname{sh}(\Omega d) = 0$, soit $A = B = 0$.

Le champ est toujours nul. On n'a pas de propagation d'onde.

Deuxième cas : $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0$

La seule solution est d'avoir un champ nul.

Troisième cas : $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$

On pose $\Omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$.

$E(x)$ se met alors sous la forme : $E(x) = A \cos \Omega x + B \sin \Omega x$

On a deux conditions aux limites :

- $E(0) = 0$, donc $A = 0$.
- $E(d) = 0$. On doit donc avoir $\Omega d = n\pi$ avec n entier positif.

On a une condition de quantification :

$$\Omega = n \frac{\pi}{d}$$

On en déduit la relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{d^2}$

Pour avoir $k^2 > 0$, il faut que : $\frac{\omega^2}{c^2} > \frac{n^2 \pi^2}{d^2}$

Soit : $\frac{4\pi^2 f^2}{c^2} > \frac{n^2 \pi^2}{d^2}$. La condition est donc :

$$f > n \frac{c}{2d}$$

avec n entier positif.

Le champ électrique est donc :

$$\vec{E} = E_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$$

Le champ électrique est une **onde progressive monochromatique polarisée** suivant \vec{u}_y .

L'onde se propage dans la direction \vec{u}_z . Si on considère un plan $z = cte$, le champ électrique n'est pas uniforme car il dépend de x .

Le champ électrique n'est donc pas une onde plane.

La fréquence minimale pour avoir propagation de l'onde est : $f_{\min} = \frac{c}{2d}$

OD36 - Profondeur de pénétration d'une onde thermique

a) En tout point, la température évolue autour d'une valeur moyenne : $T(x, t) = T_m + \theta(x, t)$; on s'intéresse ici aux propriétés des variations avec la profondeur x et le temps t , soit $\theta(x, t)$. L'équation de la chaleur (14) du cours prend la forme $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$. Pour traduire la dépendance sinusoïdale dans la variable temporelle et afin d'autoriser une atténuation et un retard fonctions de l'abscisse x , nous pouvons proposer la forme suivante en notation complexe : $\underline{\Theta} = \theta_0 \exp i(\omega t - kx)$. $\vec{k} = k \vec{u}_x$ joue le rôle du vecteur d'onde.

La substitution dans l'équation de propagation conduit à une équation de dispersion $-k^2 = i \frac{\omega}{\kappa}$. Les deux racines sont complexes opposées, de la forme $k = \pm \frac{1}{\delta} \mp \frac{i}{\delta}$ où

$$\delta = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}}$$

est la profondeur de pénétration de l'onde

thermique (on parle également d'épaisseur de peau, comme dans l'étude de la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique).

Du fait du modèle adopté ici, sans profondeur limite, la solution progressive se propageant selon les x croissants est seule retenue :

$$\underline{\Theta} = \theta_0 \exp(-x/\delta) \exp i(\omega t - x/\delta).$$

b) L'atténuation est donc exponentielle de facteur $\exp(-x/\delta)$, on atteint une division d'un facteur 10 de l'amplitude à la profondeur $x = \delta \ln(10)$. Numériquement, la valeur de δ est très variable selon que la période considérée est annuelle : $x = 7,3$ m ou quotidienne : $x = 0,38$ m. En hiver, le sol peut geler en profondeur ; il n'en est rien lors de gelées matinales. Par ailleurs, on conserve le vin dans des caves enterrées, afin de minimiser l'amplitude des variations de température.

c) Le déphasage entre l'onde thermique à la surface et l'onde observée en profondeur est donné par $\varphi = x/\delta$ soit $\ln(10) = 2,3$ rad à la profondeur considérée. À l'échelle d'une année, on observe ainsi un retard pouvant se chiffrer en mois ; il est donc possible d'observer une opposition de phase en certains points (plus froids en été qu'en hiver) !

OD37 – Onde cylindrique

1. Pour déterminer, on utilise l'équation de Maxwell Faraday $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, l'opérateur rotationnel en cylindriques appliqué à un champ \vec{A} :

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix},$$

comme le champ $\vec{E} = E_z(r, t) \vec{u}_z$, on déduit :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial E_z}{\partial t} \vec{u}_\theta = \left(ikE(r) \exp(i(\omega t - kr)) - \frac{dE}{dr} \exp(i(\omega t - kr)) \right) \vec{u}_\theta,$$

le champ magnétique est porté par \vec{u}_θ , il reste à intégrer $-\frac{\partial B_\theta}{\partial t} = ikE(r) \exp(i(\omega t - kr)) - \frac{dE}{dr} \exp(i(\omega t - kr))$, soit $B_\theta = -\left(\frac{k}{\omega} E(r) + \frac{1}{i\omega} \frac{dE}{dr} \right) \exp(i(\omega t - kr))$, et :

$$\vec{B} = \left(-\frac{k}{\omega} E(r) + \frac{dE}{i\omega dr} \right) \exp(i(\omega t - kr)) \vec{u}_\theta.$$

On constate que le champ magnétique de l'onde est transverse, il se propage selon le rayon, son amplitude varie avec la distance à l'axe r .

2. Pour calculer le vecteur de Poynting, on exprime d'abord les champs réels :

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{u}_z E(r) \cos(\omega t - kr) \\ \vec{B} = \vec{u}_\theta \left(-\frac{k}{\omega} E(r) \cos(\omega t - kr) + \frac{1}{\omega} \frac{dE}{dr} \sin(\omega t - kr) \right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\vec{\Pi}_{em} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \left(\frac{k}{\mu_0 \omega} (E(r) \cos(\omega t - kr))^2 - \frac{1}{\mu_0 \omega} E(r) \frac{dE}{dr} \cos(\omega t - kr) \sin(\omega t - kr) \right) \vec{u}_r$$

En moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi}_{em} \rangle = \frac{1}{\omega} \frac{kE^2(r)}{2\mu_0} \vec{u}_r$.

La puissance moyenne rayonnée à travers un cylindre de rayon r et de hauteur h est égale au flux de $\langle \vec{\Pi} \rangle$ à travers la surface latérale du cylindre, soit : $\mathcal{P} = \frac{1}{\omega} \frac{kE^2(r)}{2\mu_0} \times 2\pi r h$.

3. Cette puissance moyenne est indépendante de r puisqu'il n'y a aucune source d'énergie hors de l'axe donc : $E(r) = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mathcal{P}}{\pi k r h}}$. Son amplitude est en $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Le champ \vec{E} s'écrit donc $\vec{E} = \frac{a}{\sqrt{r}} \exp(i(\omega t - kr)) \vec{u}_z$ et $E(r) = \frac{a}{\sqrt{r}}$.

4. L'amplitude du champ \vec{B} est donc $\sqrt{\left(\frac{k}{\omega} \frac{a}{\sqrt{r}} \right)^2 + \left(\frac{a}{2\omega r \sqrt{r}} \right)^2}$, donc à grande distance du fil, le terme prépondérant dans cette amplitude est $\frac{ka}{\omega \sqrt{r}} = \frac{k}{\omega} E(r)$.

On constate qu'à grande distance du fil $\vec{B} = \frac{k \vec{u}_r \wedge \vec{E}}{\omega}$, l'onde a une structure d'onde plane.

5. Le champ électrique \vec{E} vérifie l'équation de d'Alembert : $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$. L'expression du laplacien en cylindrique donnée dans l'énoncé permet de calculer $\Delta \vec{E} = \Delta E \vec{u}_z$ car le champ électrique est porté par \vec{u}_z qui est invariable.

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \frac{a}{\sqrt{r}} \exp(i(\omega t - kr)) \right) \\ \Delta E &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\exp(i(\omega t - kr)) \left(\frac{-a}{2\sqrt{r}} - ika\sqrt{r} \right) \right) \\ \Delta E &= a \exp(i(\omega t - kr)) \left(+ik \frac{1}{2r^{3/2}} - k^2 \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{4r^{5/2}} - ik \frac{1}{2r^{3/2}} \right) \\ \Delta E &= a \exp(i(\omega t - kr)) \left(-k^2 \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{4r^{5/2}} \right), \end{aligned}$$

dans la zone de champ lointain, on néglige le terme en $\frac{1}{r^{5/2}}$ l'équation de propagation s'écrit $a \exp(i(\omega t - kr)) \left(-k^2 \frac{1}{\sqrt{r}} \right) = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{a}{\sqrt{r}} \exp(i(\omega t - kr))$, d'où l'équation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ donc $k = \frac{\omega}{c}$. C est normal, à grande distance l'onde se propage dans le vide comme une onde plane.