

OD3 – Ondes électromagnétiques dans le vide

6.1.3. Ondes électromagnétiques dans le vide		
Equations de propagation d'un champ électromagnétique dans une région sans charge ni courant.	Etablir et citer les équations de propagation d'un champ électromagnétique dans le vide.	
Structure d'une onde plane progressive harmonique.	Etablir et exploiter la structure d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique. Utiliser la superposition d'ondes planes progressives harmoniques pour justifier les propriétés d'ondes électromagnétiques planes progressives non harmoniques.	Notion de paquet d'ondes.
Polarisation des ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques : polarisation elliptique, circulaire et rectiligne. Loi de Malus.	Relier l'expression du champ électrique à l'état de polarisation de l'onde. Utiliser la loi de Malus. Reconnaître une lumière polarisée rectilignement. Distinguer une lumière non polarisée d'une lumière totalement polarisée. Utiliser une lame quart d'onde ou demi-onde pour modifier ou analyser un état de polarisation, avec de la lumière totalement polarisée.	Partie qu'on verra principalement en TP

I – Equation de propagation

I-1) Équations de Maxwell dans le vide

Les équations de Maxwell dans le vide sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} MG : \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ M\phi : \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ MF : \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ MA : \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Les équations de Maxwell Faraday et Maxwell Ampère montrent que les champs sont couplés. On les découple afin d'en déduire une équation aux dérivées partielles vérifiée par E seul ou par B seul.

I-2) Équations de d'Alembert

Pour découpler les équations précédentes, on applique l'opérateur rotationnel à l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On développe $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})$ et, d'après le théorème de Schwarz, on inverse l'ordre des dérivations temporelle et spatiale « $\overrightarrow{\text{rot}}$ » :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E})}{\partial t} \\ \Leftrightarrow -\Delta \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)}{\partial t} \\ \Leftrightarrow \Delta \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

On applique l'opérateur rotationnel à l'équation de Maxwell Faraday :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) &= \overrightarrow{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} &= -\frac{\partial (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t} \\ \Leftrightarrow -\Delta \vec{E} &= -\frac{\partial \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)}{\partial t} \Leftrightarrow \Delta \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Afin d'écrire ces équations sous une forme analogue à l'équation de propagation d'une onde sonore, on introduit la célérité c :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Les champs \vec{E} et \vec{B} vérifient l'équation de d'Alembert tridimensionnelle :

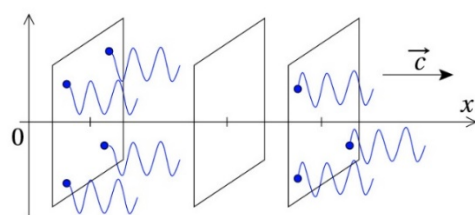
$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \text{ et } \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \text{ où } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3.10^8 \text{ ms}^{-1}$$

II - Ondes planes progressives harmoniques

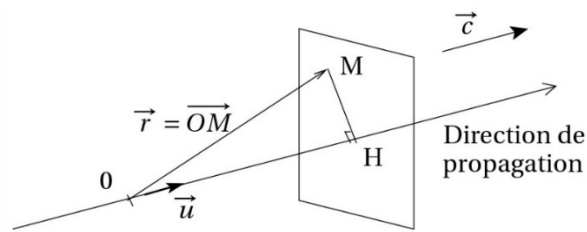
II-1) Onde plane

Une onde est dite plane, si la grandeur qui se propage a la même valeur en tout point d'un plan d'onde, perpendiculaire à la direction de propagation.

Dans le cas général d'une onde plane : $\vec{S}(M, t) = s \left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{c} \right) \vec{u}$



(a) Plans d'onde
Propagation suivant l'axe Ox :
 $s(x, t) = f(t - x/c)$



$\vec{u} \cdot \vec{OM} = \vec{u} \cdot \vec{r} = OH$ si $M \in$ plan d'onde
(b) Propagation de direction quelconque

II-2) Onde plane progressive harmonique

a) Représentation complexe

Les trois composantes cartésiennes de \vec{E} ou de \vec{B} sont des ondes planes progressives harmoniques, de même pulsation et de même vecteur d'onde :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_x) \vec{u}_x \\ E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_y) \vec{u}_y \\ E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_z) \vec{u}_z \end{cases}$$

Cette notation est extrêmement lourde. Mais la représentation complexe permet de l'écrire de façon plus simple :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \text{ où } \underline{\vec{E}}_0 = \begin{cases} E_{0x} e^{i\varphi_x} \\ E_{0y} e^{i\varphi_y} \\ E_{0z} e^{i\varphi_z} \end{cases} \text{ avec } \vec{E} = \mathcal{Re}(\underline{\vec{E}})$$

b) Equations de Maxwell en notation complexe

On rappelle l'écriture des opérateurs en notation complexe :

Les différents opérateurs	$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$	$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial x}$	$\overrightarrow{\text{grad}} \underline{p}$	$\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}}$	$\text{div} \underline{\vec{E}}$
$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$	$i\omega \underline{\vec{E}}$	$-ik \underline{\vec{E}}$	$-i\vec{k} \underline{p}$	$-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$	$-i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}$
$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})}$	$i\omega \underline{\vec{E}}$	$ik \underline{\vec{E}}$	$i\vec{k} \underline{p}$	$i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$	$i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}$

D'où les équations de Maxwell :

$$\left\{ \begin{array}{l} MG : -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \\ M\phi : -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \\ MF : -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}} \\ MA : -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \frac{i\omega}{c^2} \underline{\vec{E}} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} MG : \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \\ M\phi : \vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \\ MF : \underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}} \\ MA : \underline{\vec{E}} = -c^2 \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{B}} \end{array} \right.$$

c) Relation de dispersion

(MF) et (MA) entraîne :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}} \Rightarrow \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}} \right)$$

Or le double produit vectoriel se met sous la forme :

$$\vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}} \right) = \frac{\vec{k}}{\omega} \underbrace{(\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}})}_0 - \underline{\vec{E}} \left(\vec{k} \cdot \frac{\vec{k}}{\omega} \right) = -\frac{k^2}{\omega} \underline{\vec{E}}$$

D'où :

$$\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = -\frac{k^2}{\omega} \underline{\vec{E}} \stackrel{MA}{\Leftrightarrow} -\frac{\omega}{c^2} \underline{\vec{E}} = -\frac{k^2}{\omega} \underline{\vec{E}} \Rightarrow k = \frac{\omega}{c}$$

Pour une OPPH dans le vide la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega = kc \text{ ou } k = \frac{\omega}{c}$$

d) Structure de l'OPPH

i. Transversalité

$$\begin{cases} MG : \vec{k} \cdot \underline{\underline{E}} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \underline{\underline{E}} \\ M\phi : \vec{k} \cdot \underline{\underline{B}} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \underline{\underline{B}} \end{cases}$$

Les champs magnétique et électrique sont perpendiculaires à la direction de propagation.

L'onde électromagnétique dans le vide est une onde transverse électrique et magnétique.

ii. Lien entre $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{B}}$

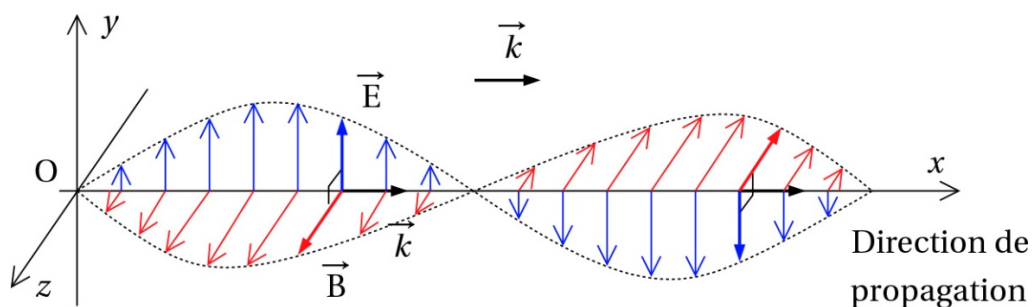
Les équations de MF et MA permettent d'écrire :

$$\begin{cases} MF : \underline{\underline{B}} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\underline{E}} \Leftrightarrow \underline{\underline{B}} = \frac{\vec{u} \wedge \underline{\underline{E}}}{c} \\ MA : \underline{\underline{E}} = -c^2 \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\underline{B}} = -c \vec{u} \wedge \underline{\underline{B}} \end{cases}$$

Pour une OPPH :

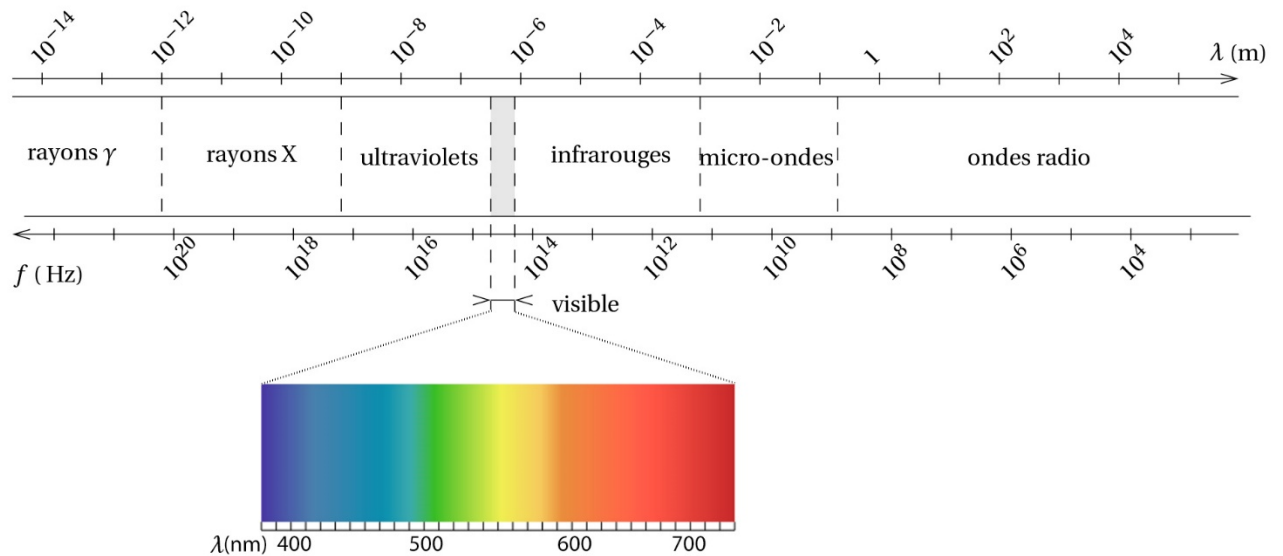
- Les vecteurs $(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{B}}, \vec{k})$ forment un trièdre direct
- Les vecteur $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{B}}$ sont en phase.
- En norme $B = \frac{E}{c}$ tel que :

$$\underline{\underline{B}} = \frac{\vec{u} \wedge \underline{\underline{E}}}{c} \text{ ou } \underline{\underline{E}} = -c \vec{u} \wedge \underline{\underline{B}}$$



Onde Plane Progressive Monochromatique em

e) Spectre électromagnétique



II-3) Généralisation aux ondes planes

D'après l'analyse de Fourier, toute O.P.P est une somme d'O.P.P.H ayant toujours la même direction de propagation et des pulsations différentes. Or la structure des O.P.P.H dans le vide est indépendante de la pulsation, donc on peut élargir les résultats :

Pour une onde plane progressive :

- L'onde est transverse
- Les vecteurs $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ forment un trièdre direct
- Les vecteurs \vec{E} et \vec{B} vérifient

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} \text{ ou } \vec{E} = -c \vec{u} \wedge \vec{B}$$

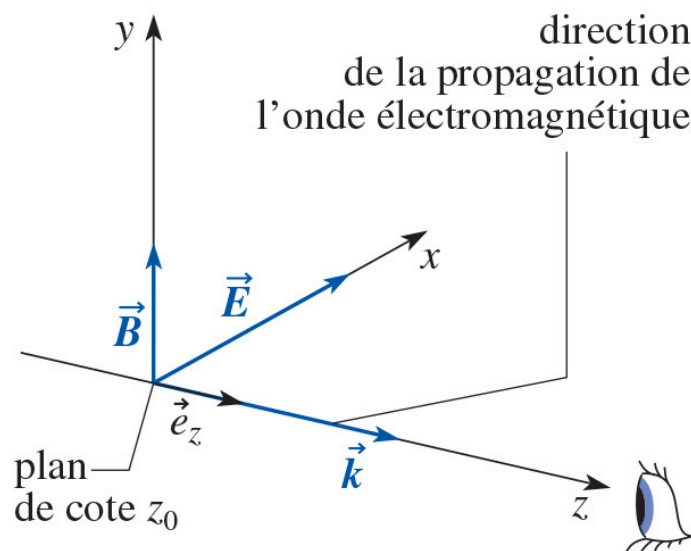
II-4) Polarisation des OPPH

a) Représentation vectorielle d'une OPPH

Considérons une onde plane progressive harmonique se propageant dans le sens des z croissants. Son champ électrique est transverse, donc sa coordonnée selon \vec{u}_z est nulle. Il s'écrit de manière générale sous la forme (puisque'on peut toujours choisir l'origine des temps telle que $\varphi_x = 0$) :

$$\vec{E}(z, t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi) \vec{u}_y$$

Nous allons étudier la courbe décrite par l'extrémité du vecteur \vec{E} dans un plan d'onde orienté de telle sorte que l'observateur voie arriver l'onde vers lui.



b) Lumière naturelle

Pour la plupart des sources lumineuses classiques, la lumière émise correspond à une superposition d'O.P.P.M déphasées. L'extrémité du champ électrique résultant décrit dans le plan d'observation une trajectoire aléatoire. L'onde n'est pas polarisée.

La lumière naturelle n'est pas polarisée.

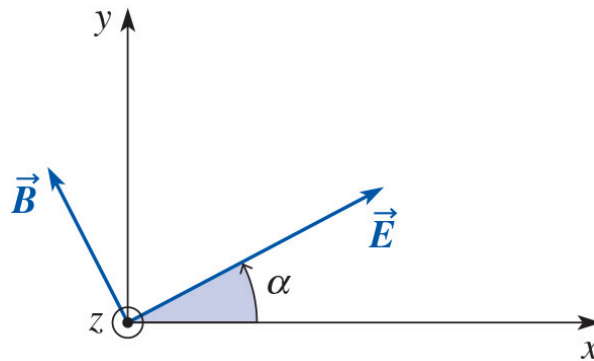
c) Polarisation rectiligne

Le champ est polarisé rectilignement si le vecteur \vec{E} garde une direction fixe dans un plan d'onde :

$$\vec{E}(z, t) = E_0 (\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y) \cos(\omega t - kz - \varphi)$$

L'extrémité du vecteur \vec{E} décrit un segment de droite faisant l'angle α avec l'axe Ox . En notation complexe, le champ électrique s'écrit :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - kz)} \text{ où } \underline{\vec{E}}_0 = E_0 e^{-i\varphi} \vec{u} \text{ tel que } \vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \vec{u}_x \\ \sin \alpha \vec{u}_y \\ 0 \end{pmatrix}$$



d) Polarisation elliptique

Il s'agit du cas le plus général d'onde polarisée :

$$\vec{E}(z, t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi) \vec{u}_y$$

où E_{0x} et E_{0y} sont deux réels positifs.

La courbe décrite par l'extrémité du vecteur \vec{E} est une ellipse dont les axes ne sont en général pas les axes Ox et Oy . En effet :

$$\begin{cases} \frac{E_x}{E_{0x}} = \cos(\omega t - kz) \\ \frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\omega t - kz) \cos(\varphi) + \sin(\omega t - kz) \sin(\varphi) \end{cases}$$

Donc :

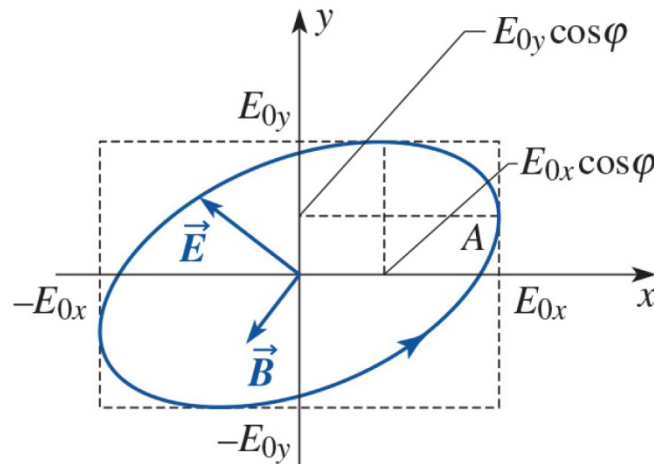
$$\begin{cases} \frac{E_x}{E_{0x}} = \cos(\omega t - kz) \\ \frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos(\varphi) = \sin(\omega t - kz) \sin(\varphi) \end{cases}$$

En éliminant le temps entre les deux équations :

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}} \sin(\varphi)\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos(\varphi)\right)^2 = \sin^2(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos(\varphi) = \sin^2(\varphi)$$

Ceci est l'équation d'une ellipse dont on va préciser les caractéristiques.



Polarisation elliptique.
 (Cas $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.)

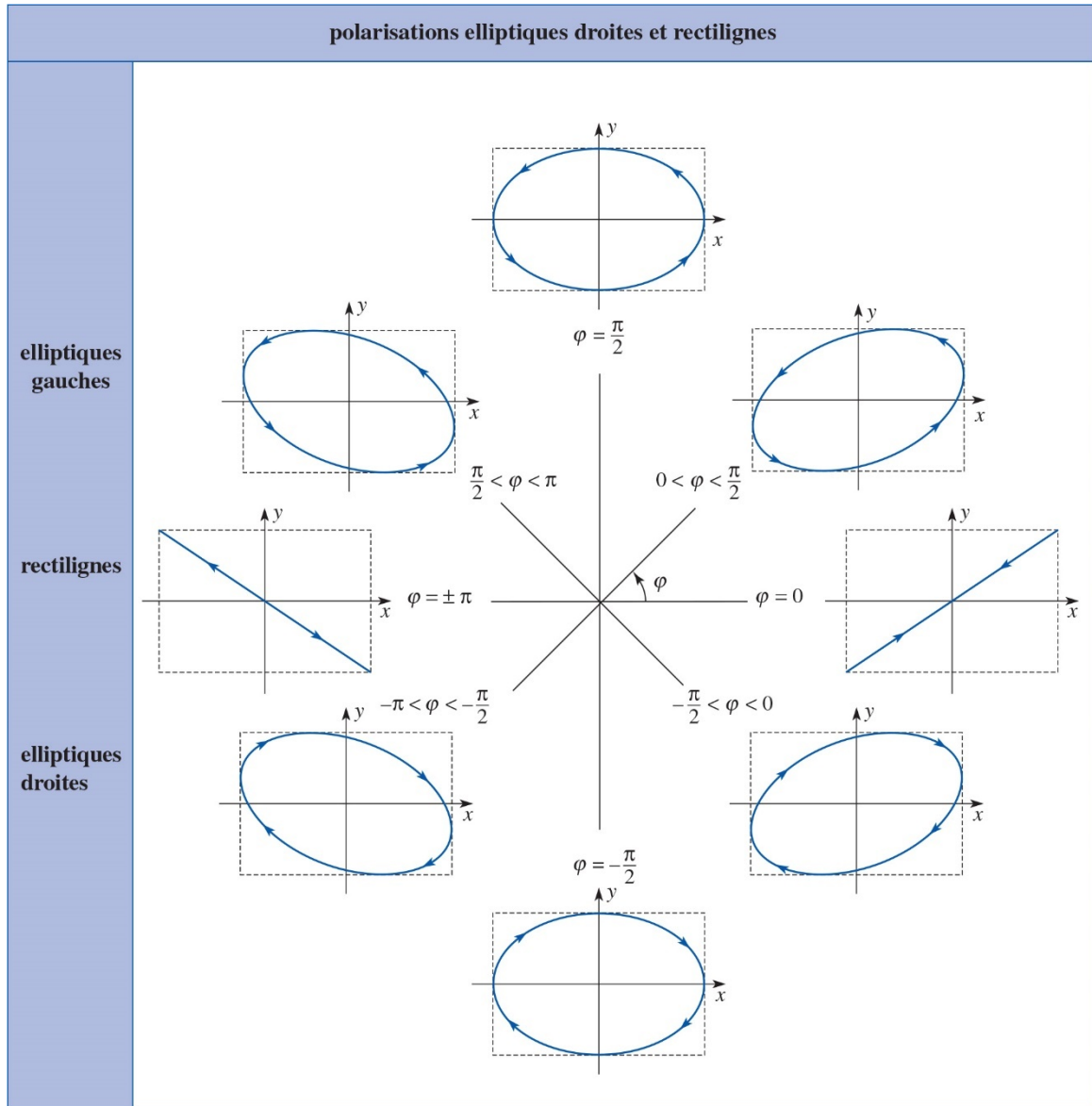
On peut déterminer le sens de rotation en écrivant au point A, dans le plan $z=0$, que :

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \varphi) \end{cases} \Rightarrow \left. \frac{dE_y}{dt} \right|_{t=0} = \omega E_{0y} \sin(\varphi)$$

Le sens de rotation est donc indiqué par le signe de l'observateur, qui réceptionne l'onde, voit l'extrémité du vecteur champ électrique parcourir l'ellipse dans le sens trigonométrique si $\sin(\varphi)$ est positif : la polarisation est dite elliptique gauche. Cette onde a une hélicité positive.

À l'inverse, si $\sin(\varphi)$ est négatif, la polarisation est dite elliptique droite. Cette onde a une hélicité négative.

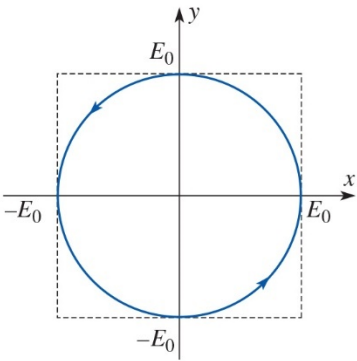
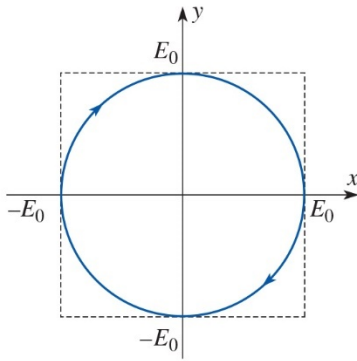
Les différents cas de polarisation elliptique envisageables sont résumés sur les figures suivantes.



e) Polarisation circulaire

Dans le cas particulier où $E_{0y} = E_{0x} = E_0$ et $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ l'ellipse devient un cercle : l'onde est polarisée circulairement.

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} : \vec{E}_{cg}(z, t) = E_0(\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x + \sin(\omega t - kz)\vec{u}_y) \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} : \vec{E}_{cd}(z, t) = E_0(\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x - \sin(\omega t - kz)\vec{u}_y) \end{cases}$$

polarisations circulaires	
circulaire gauche $\varphi = \frac{\pi}{2}$	circulaire droite $\varphi = -\frac{\pi}{2}$
	
notation réelle $\begin{cases} E_x = E_0 \cos(\omega t) \\ E_y = E_0 \sin(\omega t) \end{cases}$	notation réelle $\begin{cases} E_x = E_0 \cos(\omega t) \\ E_y = -E_0 \sin(\omega t) \end{cases}$
notation complexe $\begin{cases} \underline{E}_x = E_0 e^{j\omega t} \\ \underline{E}_y = -j\underline{E}_x = -jE_0 e^{j\omega t} \end{cases}$	notation complexe $\begin{cases} \underline{E}_x = E_0 e^{j\omega t} \\ \underline{E}_y = j\underline{E}_x = jE_0 e^{j\omega t} \end{cases}$

Une onde polarisée rectilignement peut être vue comme la superposition de deux ondes circulaires gauche et droite, en effet :

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(z, t) &= E_0 (\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y) \cos(\omega t - kz) \\
 &= \begin{vmatrix} \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - kz + \alpha) \\ \frac{E_0}{2} \sin(\omega t - kz + \alpha) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - kz - \alpha) \\ -\frac{E_0}{2} \sin(\omega t - kz - \alpha) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - kz + \alpha) \\ \frac{E_0}{2} \cos\left(\omega t - kz + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - kz - \alpha) \\ \frac{E_0}{2} \cos\left(\omega t - kz - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \end{vmatrix} \\
 &= \vec{E}_{cg}(z, t) + \vec{E}_{cd}(z, t)
 \end{aligned}$$

Une onde polarisée elliptiquement est la somme de deux ondes polarisées rectilignement selon deux directions orthogonales.

Une onde polarisée circulairement est la somme de deux ondes polarisées rectilignement selon deux directions orthogonales, de même amplitude, et déphasées de $\pm \frac{\pi}{2}$.

Une onde polarisée rectilignement est la somme de deux ondes polarisées circulairement gauche et droite, de même amplitude.

III – Aspects énergétiques

III-1) Densité volumique d'énergie

On a vu dans le chapitre sur les équations de Maxwell que :

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Or pour les OPPH, $B = \frac{E}{c}$ d'où :

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{E^2}{2\mu_0 c^2}$$

$$\Rightarrow u_{em} = \varepsilon_0 E^2 \text{ et } u_e = u_m = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

Comme dans le cas des ondes sonores, il y a équipartition de l'énergie entre les deux formes, ici électrique et magnétique.

III-2) Vecteur de Poynting

Soit : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ et \vec{B} étant orthogonal à \vec{E} on a : $\vec{\Pi} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{n}$

$$\Rightarrow \vec{\Pi} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{n} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{n}$$

Le vecteur de Poynting est dirigé selon la direction de propagation de l'onde.

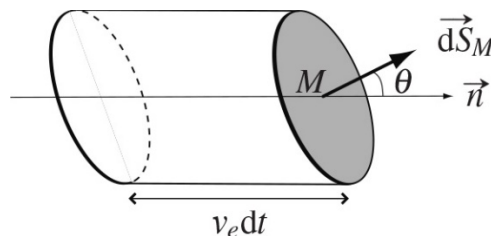
Le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie sont liés par la relation :

$$\vec{\Pi} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{n} = u_{em} c \vec{n}$$

Nous retrouvons ici aussi une relation déjà rencontrée au sujet des ondes sonores. Cette équation traduit le fait que l'énergie d'une onde plane progressive harmonique se déplace à la vitesse $\vec{v}_e = c \vec{n}$.

III-3) Vitesse de propagation de l'énergie

En tout point de l'espace où règne l'OPPH, on a établi l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique et le vecteur de Poynting de l'onde. À l'aide de ces deux notions, on définit la vitesse \vec{v}_e de propagation de l'énergie au point M, vecteur colinéaire à $\vec{\Pi}$.



Si $\delta\varepsilon$ est l'énergie qui traverse la surface élémentaire \vec{dS}_M entre t et $t+dt$, alors à l'instant t , $\delta\varepsilon$ se trouve dans le volume cylindrique

$$d\tau = \vec{v}_e \cdot \vec{dS}_M dt$$

$$\Rightarrow \delta\varepsilon = u_{em} \vec{v}_e \cdot \vec{dS}_M dt \text{ et } \delta\varepsilon = \vec{\Pi} \cdot \vec{dS}_M dt$$

Soit, en identifiant :

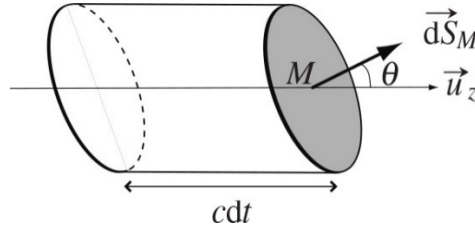
$$\vec{v}_e = \frac{\vec{\Pi}}{u_{em}} = c \vec{u}_z$$

On constate que la vitesse de déplacement de l'énergie est égale à la célérité de l'onde électromagnétique.

III-4) Flux de photons

Considérons une onde électromagnétique plane progressive harmonique, de pulsation ω , se propageant dans le sens des z croissants par exemple. On peut lui associer des photons d'énergie :

$$E = h\nu$$



L'énergie lumineuse transportée par une onde lumineuse est la somme des énergies des photons qui la véhiculent. On calcule ci-dessous le nombre de photons qui atteignent une surface éclairée par une onde électromagnétique de fréquence ν .

Pendant la durée dt l'énergie qui traverse la surface dS_M est :

$$\delta\varepsilon = \vec{I} \cdot \vec{dS}_M dt = \delta N h\nu$$

Le nombre δN de photons qui traverse la surface dS_M pendant dt est par conséquent :

$$\delta N = \frac{\vec{I} \cdot \vec{dS}_M dt}{h\nu}$$

D'où le débit de photons :

$$D_{photons} = \frac{\vec{I} \cdot \vec{dS}_M}{h\nu} = \frac{P_{em}}{h\nu}$$

Le nombre de photons émis par unité de temps par un faisceau laser ($\lambda = 632,8$ nm) de puissance $P = 2$ mW est :

$$D_{photons} = \frac{2 \cdot 10^{-3} * 632,8 \cdot 10^{-9}}{6,62 \cdot 10^{-34} * 3 \cdot 10^8} = 6,6 \cdot 10^{15} \text{ photons/s}$$

III-5) Valeurs moyennes

a) A partir des expressions réelles

Considérons une onde plane progressive harmonique se propageant dans le sens des z croissants :

$$\begin{cases} \vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi) \vec{u}_y \\ \vec{B} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c} = -\frac{E_{0y}}{c} \cos(\omega t - kz - \varphi) \vec{u}_x + \frac{E_{0x}}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \langle u_e \rangle = \left\langle \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \right\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_{0x}^2}{2} + \frac{\varepsilon_0 E_{0y}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{4} (E_{0x}^2 + E_{0y}^2) = \frac{\varepsilon_0}{4} E_0^2 \\ \langle u_m \rangle = \left\langle \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle = \frac{E_{0y}^2}{4\mu_0 c^2} + \frac{E_{0x}^2}{4\mu_0 c^2} = \frac{\varepsilon_0}{4} E_0^2 \\ \Rightarrow \langle u_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 \\ \langle \vec{II} \rangle = \langle \varepsilon_0 c E^2 \rangle \vec{u}_z = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \vec{u}_z \end{cases}$$

b) A partir des expressions complexes

Notons les champs sous la forme :

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - kz)} \text{ où } \underline{\vec{E}}_0 = E_0 e^{-i\varphi} \vec{u} \text{ tel que } \vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \vec{u}_x \\ \sin \alpha \vec{u}_y \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_0 e^{i(\omega t - kz)} \text{ où } \underline{\vec{B}}_0 = \frac{\vec{u}_z}{c} \wedge \underline{\vec{E}}_0 \end{cases}$$

A partir des expressions complexes on peut aussi déterminer les densités d'énergies à l'aide de la formule :

$$\begin{cases} \langle u_e \rangle = \frac{1}{2} R_e \left\{ \frac{\varepsilon_0}{2} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^* \right\} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 = \frac{\varepsilon_0}{4} E_0^2 \\ \langle \vec{II} \rangle = \frac{1}{2} R_e \left\{ \frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0} \right\} = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \vec{u}_z = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_z = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \vec{u}_z \end{cases}$$

Bien entendu on retrouve les mêmes résultats quel que soit la méthode.

III-6) Quelques ordres de grandeur

La puissance d'un laser hélium-néon utilisé lors des activités expérimentales est de l'ordre de 1 mW. Le diamètre du faisceau est de l'ordre du millimètre. Le flux surfacique moyen est donc de l'ordre de :

$$\langle II \rangle = 10^3 W m^{-2}$$

$$\Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2\langle II \rangle}{\epsilon_0 c}} = 10^3 V m^{-1}$$

Ce champ électrique est du même ordre de grandeur que celui que nous recevons de la part du soleil puisque le flux thermique solaire est de l'ordre de $1400 W m^{-2}$ au niveau de la Terre.

En revanche, le signal reçu ou émis par un téléphone portable est beaucoup plus faible. Dans un environnement urbain par exemple (Paris en Mai 2014)

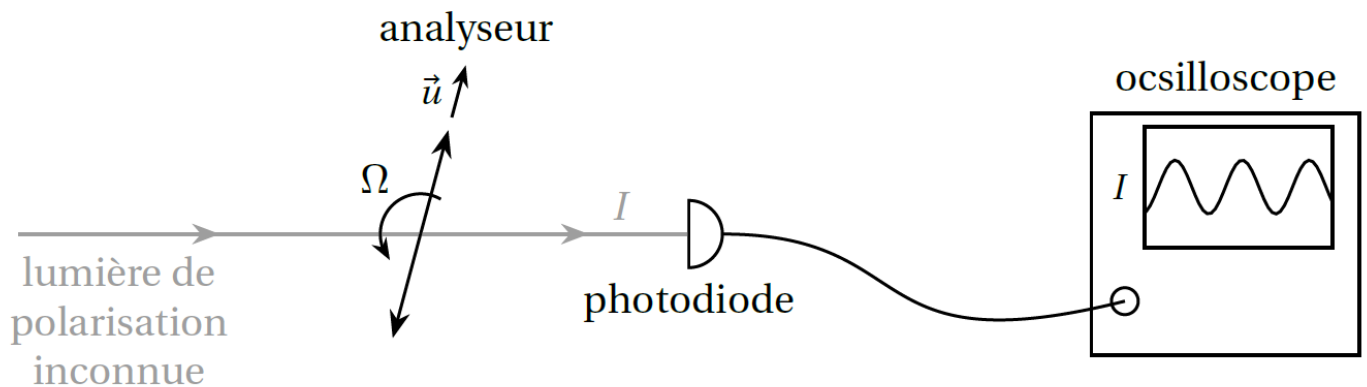
- Niveau global d'exposition : $2,39 V \cdot m^{-1}$.
- Flux surfacique : $\langle II \rangle = 8 mW m^{-2}$

Système	Soleil	Laser 1mW	Téléphones en veille	Téléphone émettant un appel
$\langle II \rangle$ en $W m^{-2}$	1400	1000	0,008	0,5
E_0 en $V m^{-1}$	1200	1000	2,39	20

IV – Analyse d'une polarisation inconnue

IV-1) Principe

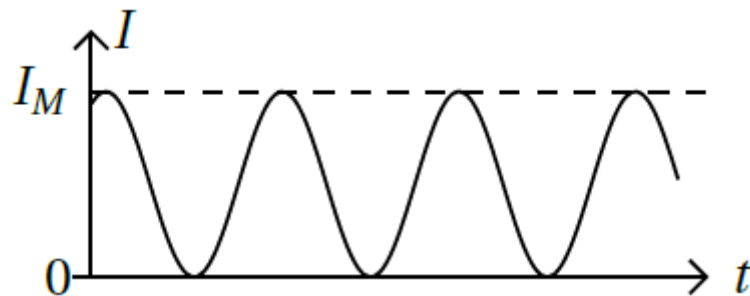
Une méthode expérimentale d'analyse d'une polarisation inconnue consiste à utiliser un polariseur tournant, appelé analyseur dans ce cas, à vitesse angulaire Ω constante et à mesurer avec une photodiode l'intensité du faisceau lumineux sortant de cet analyseur en fonction du temps :



On peut alors être confronté à différents résultats :

- 1^{er} cas : extinctions totales du faisceau en sortie de l'analyseur

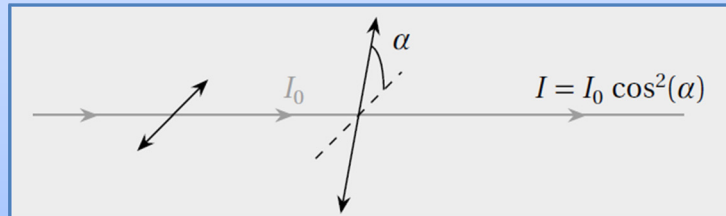
On observe la courbe suivante :



L'intensité du faisceau en sortie de l'analyseur tournant s'annule complètement pour certains angles particuliers de l'analyseur. Cette courbe est caractéristique d'une lumière incidente polarisée rectilignement. En effet, rappelons que l'analyseur est un polariseur. Ainsi, dans le cas d'une polarisation rectiligne incidente, l'intensité sortante de l'analyseur est donnée par la loi de Malus.

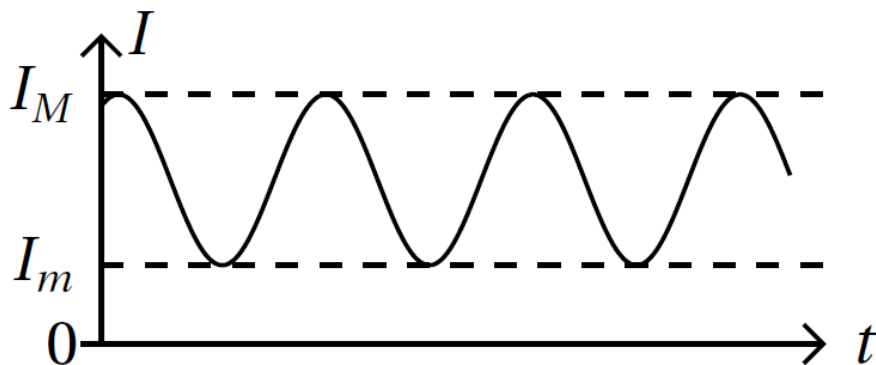
Loi de Malus :

Soit une source suivie de deux polariseurs dont les directions respectives font un angle α . Alors l'éclairement détecté en sortie est proportionnel à $\cos^2 \alpha$:



- 2^{ème} cas : extinctions partielles du faisceau en sortie de l'analyseur.

On observe expérimentalement la courbe suivante :



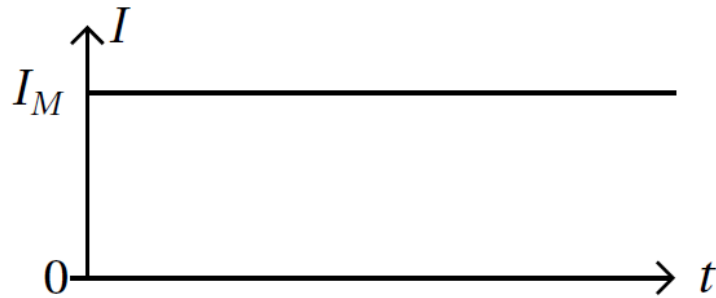
On observe ici que l'intensité et donc l'amplitude du champ est maximale dans une direction et minimale dans la direction orthogonale. Ce cas correspond à une polarisation incidente qui est elliptique.

A partir de l'expérience, le rapport du demi petit-axe b sur le demi grand-axe a de l'ellipse peut être obtenu comme :

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{I_m}{I_M}}$$

- 3^{ème} cas : intensité de sortie de l'analyseur constante

La courbe observée est la suivante :



Dans ce cas, la polarisation incidente peut soit être polarisée circulairement ou alors correspondre à une lumière non polarisée. Avec cette seule expérience, il n'est pas possible de discerner ces deux états de polarisation qui présentent chacun une projection constante sur l'axe de l'analyseur au cours de sa rotation. On verra en TP comment discerner ces deux cas.

IV-2) Tableau récapitulatif

