OD2 – Ondes acoustiques dans les fluides

A – Travaux dirigés

OD21 – Intensité sonore

1°) Deux ondes sonores, dont l'une a une fréquence égale au double de la fréquence de l'autre, ont des amplitudes de déplacement égales. Laquelle de ces ondes correspond à la surpression de plus grande amplitude ? Dans quel rapport ? Quel est le rapport de leur intensité ?
2°) Si l'amplitude d'une onde sonore est triplée, de combien de décibels l'intensité sonore augmente-t-elle ?
3°) Quelle est l'intensité sonore en décibels d'une onde sonore se propageant dans l'air pour laquelle l'amplitude de déplacement des particules de fluide est de 0,1 mm à 180 Hz ?
4°) Si deux pétards qui explosent en même temps produisent une intensité sonore de 90 dB, quelle serait l'intensité sonore si un seul des deux pétards explosait ?
Rép : 1°) On a $p_{eff} = \mu_0 c\omega\xi_{eff}$ donc l'onde de fréquence deux fois plus grande correspond à une surpression deux fois plus grande…
2°) 9,5 dB 3°) $p_{eff} = 50Pa \Rightarrow$ 128 dB 4°) 87 dB.

OD22 – Tuyau d'orgue

On considère un tuyau d'orgue rempli d'air de masse volumique μ_o. On note p_1 la surpression acoustique et u_1 la vitesse particulaire. La célérité du son est notée c. L'extrémité est fermée en x = 0 et ouverte en x = L. On cherche $p_1(x,t)$ sous la forme d'ondes stationnaires :

$$p_1(x,t) = p_0\cos(\omega t)\cos(kx + \Phi)$$

1°) Déterminer la vitesse particulaire en fonction de p_o, μ_0, c, w, k, x et Φ.
2°)

- Déterminer la fréquence ν_o du fondamental et les fréquences des harmoniques ν_n, avec n entier
- Déterminer la position des nœuds et des ventres de surpression acoustique pour ν_o et ν_1.

3°) L'amplitude maximale du déplacement des particules est $\xi_{max} = 0{,}4\ mm$. En déduire l'amplitude maximale p_o de la surpression acoustique pour la fréquence ν_o.
Application numérique : $\mu_o = 1{,}3\ kg.m^{-3}$; $c = 340\ m.s^{-1}$; $L = 60\ cm$.
Rép : 1°) $u_1 = \frac{p_0}{\mu_0}\frac{k}{\omega}\sin(\omega t)\sin(kx+\Phi)$ 2°) $\nu_n = \frac{c}{4L}(2n+1)$… 3°) $p_0 = \xi_{max}\pi\frac{\mu_0 c^2}{2L} = 157Pa$

OD23 – Fréquences propres d'une sphère rigide

On cherche à étudier les modes propres de vibration à l'intérieur d'une sphère rigide de rayon R. On écrit la surpression sous la forme :

$$p(r,t) = \frac{A}{r}e^{i(\omega t - kr)} + \frac{B}{r}e^{i(\omega t + kr)}$$

1°) Justifier cette expression et écrire le champ des vitesses.
2°) Quelles sont les conditions aux limites ? Déterminer l'équation vérifiée par les fréquences propres.
3°) Donner une valeur numérique approchée de la plus basse de ces fréquences. Effectuer l'application numérique pour R=5,0cm.
Rép : 1°) $\underline{v} = \frac{1}{i\mu_0\omega r^2}(\underline{A}(1+ikr)e^{i(\omega t-kr)} + \underline{B}(1-ikr)e^{i(\omega t+kr)}$ 2°) tan(kR)=kR 3°) $k_1R = 4{,}5 \Rightarrow f_1 = 4{,}9\ kHz$

OD24 – Le vent porte le son

On s'intéresse à une onde sonore se propageant dans un fluide parfait en mouvement à la vitesse uniforme $v_0\overrightarrow{u_x}$ dans le référentiel d'étude. On décrit les champs eulériens de la manière suivante :

- $\mu(x,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t)$ pour le champ de masse volumique du fluide,
- $p(x,t) = p_0 + p_1(x,t)$ pour le champ de pression et,
- $\vec{v}(x,t) = \overrightarrow{v_0} + v_1(x,t)\overrightarrow{u_x}$ pour le champ des vitesses.

Les quantités $\frac{v_1}{v_0}, \frac{\mu_1}{\mu_0}$ et $\frac{p_1}{p_0}$ seront traitées comme des infiniment petits du premier ordre.

1°) Écrire les équations fondamentales qui régissent la propagation des ondes acoustiques.
2°) Linéarises ces équations.
3°)

a) A l'aide des équations linéarisées, démontrer que $\mu_1(x,t)$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} + 2v_0 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x \partial t} = (c^2 - v_0^2)\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x^2} \text{ où l'on précisera } c^2.$$

b) Dans quel cas particulier retrouve-t-on l'équation de d'Alembert. Par conséquent, l'équation de d'Alembert vous semble-t-elle invariante par changement de référentiel galiléen ? Dans quel référentiel particulier est-elle alors valable ? Connaissez-vous des problématiques semblables dans d'autres domaines de la physique ?

4°) On recherche une solution sous la forme d'une onde progressive harmonique :

$$\mu_1(x,t) = R_e\left(\underline{A}e^{i(\omega t - kx)}\right)$$

a) Établir la relation entre k et ω (relation de dispersion).

b) En déduire k en fonction de ω et d'autres paramètres. Quelles sont les vitesses de propagation possibles pour ces ondes planes progressives harmoniques ? Commenter.

Rép : 1°)… 2°) Attention à v_0 3a) $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \chi_s}$ 3b) Il faut que v_0 soit nul 4a) $\omega^2 - 2v_0\omega k = (c^2 - v_0^2)k^2$ 4b) $v = v_0 \pm c$

B – Exercices supplémentaires

OD25 – Ondes sphériques

On s'intéresse à la propagation d'ondes sonores à symétrie sphérique : les champs $p_1(M,t)$,$\mu_1(M,t)$ et $u(M,t)$ ne dépendent que de r, distance à un point fixe *O* et du temps t. Le laplacien d'une fonction *f (r, t)* en coordonnées sphériques est :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2}$$

1°) Déterminer l'expression générale de la surpression $p_1(r,t)$. Interpréter. On étudie dans la suite de l'exercice une onde sphérique divergente harmonique de la forme : $\underline{p_1}(r,t) = \frac{p_0}{r} exp i(\omega t - kr)$

2°) Montrer que le champ des vitesses s'écrit comme la somme de deux termes. Justifier la dénomination de *champ proche* et *champ lointain* et examiner leur contribution à l'intensité *I* de l'onde. Estimer la limite entre les deux champs.

3°) Exprimer l'impédance $\underline{Z} = \frac{p_1}{\underline{u}}$ d'une telle onde en fonction de $\mu_o c$ et kr. Commenter.

4°) Une petite sphère de rayon moyen r_o effectue un petit mouvement radial harmonique : $r(t) = r_o + a\cos(\omega t)$ avec $a \ll r_o$.

Exprimer p_o en fonction de a, ω et r_o puis la puissance d'émission sonore P de la sphère pulsante en fonction des données a, ω et r_o entre autres. Les sources de petite taille sont-elles adaptées à produire des sons graves ?

Application numérique : calculer l'amplitude a avec laquelle doit vibrer une membrane de haut-parleur en forme de calotte sphérique de rayon r_o = 5 cm pour produire un son grave de fréquence *f* = 50 Hz et de forte intensité I_{dB} = 90 dB à une distance r = 1 m. Commenter.

Rép : 1°) $p_1(r,t) = \underbrace{\frac{f\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}}_{\text{onde sphérique divergente}} + \underbrace{\frac{g\left(t+\frac{r}{c}\right)}{r}}_{\text{onde sphérique convergente}}$ 2°) $\underline{\vec{u}}(r,t) = \frac{p_0}{\mu_0 c}\left(\frac{1}{r} - \frac{ic}{\omega r^2}\right)e^{i(\omega t - kr)}\overrightarrow{u_r} = \underline{\vec{u}}_1(r,t) + \underline{\vec{u}}_2(r,t)$ 3°) $\underline{Z} = \frac{\mu_0 c}{1 - \frac{i}{kr}}$ 4°) $a = \frac{p_0}{\mu_0 (2\pi f)^2 r_0^2} = 2.9mm$

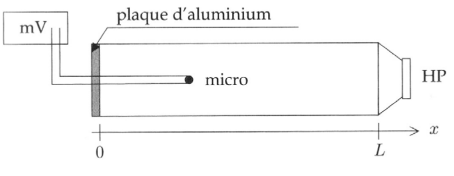
OD26 - Détermination de la célérité des ondes acoustiques

On considère un tuyau horizontal, cylindrique, d'axe Ox, de section S, rempli d'air assimilé à un gaz parfait de masse molaire M. Dans les conditions de l'expérience (à la température de 18°C), sa masse volumique au repos est ρ_0.

La longueur du tuyau est L=1,45 m. À l'extrémité x=L, est placé un haut-parleur associé à un générateur basse fréquence : le déplacement de la membrane du haut-parleur est $\xi(t) = \xi_0 cos(\omega t)$. À l'autre extrémité (x=0), l'expérimentateur place une plaque métallique rigide en aluminium. Un microphone mobile, relié à un millivoltmètre, peut se déplacer à l'intérieur du tuyau sans perturber les phénomènes étudiés. On suppose que les grandeurs vibratoires ne dépendent que de x et de t.

Le micro délivre une tension proportionnelle à la racine carrée de la valeur moyenne du carré de la pression acoustique :

$$V = \alpha\sqrt{\langle p^2(x,t)\rangle_t}.$$



f (Hz)	x_1 (cm)	x_i (cm)	i
300	32,0	89,0	2
500	17,7	120,0	4
988	8,0	112,0	7

1°) Déterminer l'expression de la pression p(x,t) dans le tuyau en tenant compte des conditions aux limites.
2°) L'expérimentateur relève la position du premier minimum de tension rencontré à partir de x=0 et celui du i-ème pour trois fréquences différentes (tableau ci-dessus).
Calculer pour chacune de ces fréquences les valeurs de la longueur d'onde λ, de la célérité c des ondes acoustiques dans le tuyau et celle de $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$. Commenter.
3°) Le micro étant placé en x=0, l'expérimentateur observe que les indications du voltmètre passent par des valeurs très importantes pour certaines fréquences dont il relève quelques valeurs : 355Hz, 472Hz, 590Hz. Expliquer ces résultats. Y a-t-il contradiction avec le fait que c'est le déplacement de la membrane qui génère les ondes.
Rép : 1°) $p(x,t) = -\frac{\omega \rho_0 c \varepsilon_0}{\sin(kL)}\cos(kx)\cos(\omega t)$ 2°) On obtient : c = 342 m.s^{-1} et γ = 1,40
3°) Il y a résonance quand sin(kL) = 0 donc pour les fréquences $f_n = \frac{nc}{2L}$

OD27 - Dérivation de l'équation des ondes sonores

On cherche à modéliser une onde sonore qui se propage selon la direction Ox. On rappelle qu'une onde sonore consiste en la dilatation et la compression de tranches d'air. La tranche d'air qui se trouve au repos à l'abscisse x se situe en présence de l'onde en x + ξ(x + t). L'onde sonore perturbe aussi la pression, qui vaut $p_o + p_1(x, t)$, et la masse volumique notée $\mu_o + \mu_1(x, t)$. p_o et μ_o sont les pressions et masse volumique en l'absence d'onde sonore. On supposera que l'onde sonore perturbe peu le milieu, soit : $\frac{\partial \xi}{\partial x} \ll 1, p_1 \ll p_0 \; et \; \mu_1 \ll \mu_0$

a) En prenant comme système l'air qui, au repos, se trouve sur une section S entre x et x + dx, et en utilisant la conservation de la masse, écrire l'expression de μ_1 en fonction de ξ.
b) Comment doit-on choisir dx par rapport à la longueur d'onde ainsi qu'au libre parcours moyen $\bar{l}$ (distance moyenne entre deux chocs) ?
c) On suppose que, pour une onde sonore, la tranche d'air subit une transformation adiabatique réversible, caractérisée par le coefficient de compressibilité isentropique χ_s. En déduire une relation entre $\mu_1 \; et \; p_1$.
d) Écrire la relation fondamentale de la dynamique pour le système.
e) En déduire l'équation de propagation vérifiée par la pression p(x, t).
f) Exprimer χ_s pour un gaz parfait caractérisé par γ = 1,4 et M=29.10^{-3} kg.mol^{-1}. Montrer que la vitesse du son selon ce modèle est $c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$

Rép : a) $\mu_1 = -\mu_0 \frac{d\xi}{dx}$ b) $\bar{l} \ll dx \ll \lambda$ c) $\chi_s = \frac{1}{\mu_0}\frac{\mu_1}{p_1}$ d) $\mu_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$ e) $\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$ f)…

OD28 - Influence du milieu sur la propagation d'une onde sonore

La définition d'un coefficient de compressibilité isentropique χ_s, sous forme d'une constante suppose que les variations μ de la masse volumique ρ sont en phase avec les variations p de la pression. En réalité, la réponse du milieu à une variation de pression n'est pas instantanée et elle peut être modélisée par l'équation d'évolution liant les variations de μ à celles de p : $p = \frac{1}{\mu_0 \chi_S}\left(\mu + \tau \frac{d\mu}{dt}\right)$ où τ est un temps de relaxation.

1°) En considérant que l'on impose brutalement à un milieu initialement au repos une surpression constante p_0, montrer que l'équation précédente traduit effectivement une réponse retardée du milieu à cette excitation.

2°) Démontrer pour les ondes sonores, l'équation du mouvement et de la conservation de la masse à partir des expressions générales de la mécanique des fluides.

3°) Montrer qu'en tenant compte du retard de la réponse du milieu, l'équation de propagation de la surpression p prend ici la forme :

$$\frac{d^2p}{dt^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2}\right) = 0$$

4°) En cherchant une solution sous la forme d'une O.P.P.M de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e_x}$, soit en notation complexe $\underline{p} = \underline{p_0} e^{j(\omega t - kx)}$, déterminer la relation liant ω et k. Montrer que cette relation conduit à une propagation de l'onde qui est atténuée exponentiellement et calculer le coefficient d'atténuation. On fera l'hypothèse que $\omega \tau \ll 1$ et on se limitera dans les calculs aux termes d'ordre 1 en ωτ. Dans cette approximation, quelle est la vitesse de phase des ondes acoustiques dans le milieu ?
Rép : 1°) $\frac{\mu}{\tau} + \frac{d\mu}{dt} = \frac{\rho_0 p_0 \chi_S}{\tau}$ 2°) $\mu \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \; et \; \frac{d\mu}{dt} + div(\vec{v}).(\rho_0) = 0$ 3°) $\frac{d^2 p}{dx^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial^3 \mu}{\partial t \partial x^2}\right)$… 4°) $\underline{k} = \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{j\tau\omega}{2}\right)$