

OD2 – Ondes acoustiques dans les fluides

A – Travaux dirigés

OD21 – Tuyau d'orgue

1. La surpression est $p_1(x, t) = p_0 \cos(\omega t) \cos(kx + \phi)$.

L'équation d'Euler en projection sur l'axe Ox s'écrit :

$$\mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} = p_0 k \cos(\omega t) \sin(kx + \phi)$$

On obtient :

$$u_1 = \frac{p_0 k}{\mu_0 \omega} \sin(\omega t) \sin(kx + \phi) = \frac{p_0}{\mu_0 c} \sin(\omega t) \sin(kx + \phi)$$

La constante d'intégration est nulle dans tout le cours sur la propagation des ondes.

2. Conditions aux limites.

L'extrémité $x = 0$ est fermée : la vitesse particulière est nulle. On doit donc avoir $u_1 = 0$ pour $x = 0$, soit $\sin \phi = 0$. On choisit alors : $\phi = 0$.

L'extrémité $x = L$ est ouverte : la surpression est nulle. On doit donc avoir $p_1 = 0$ pour $x = L$, soit $\cos(kL) = 0$. Ce qui implique :

$$kL = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

avec n entier positif ou nul.

On a vu que $\omega = kc$. On a alors :

$$kL = \frac{2\pi\nu}{c}L = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Pour chaque valeur de n , on a une fréquence ν , d'où :

$$\nu_n = \frac{c}{4L} + \frac{c}{2L}n$$

La fréquence ν_0 (obtenue avec $n = 0$) est appelée le fondamental :

$$\nu_0 = \frac{c}{4L}$$

Les autres fréquences sont les harmoniques impairs :

$$\nu_n = \nu_0(1 + 2n)$$

On peut définir une longueur d'onde λ_n définie par :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_n}$$

Comme $kL = \frac{\pi}{2} + n\pi$, alors

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{1}{L} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right)$$

On en déduit la longueur d'onde :

$$\lambda_n = \frac{4L}{1 + 2n}$$

a) Étude du fondamental de fréquence ν_0 **Noeuds de vibration de surpression acoustique :**

On cherche à déterminer la position des noeuds de vibration de surpression acoustique, c'est-à-dire les points pour lesquels :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}x\right) = 0$$

On doit donc avoir :

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}x_m = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad \text{avec } m \text{ entier relatif.}$$

Pour chaque valeur de m , on a une abscisse : $x_m = \frac{\lambda_0}{4} + m\frac{\lambda_0}{2}$

Ventres de vibration de surpression acoustique :

La position des ventres de vibration de surpression acoustique s'obtient lorsque :

$$\left|\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}x\right)\right| = 1$$

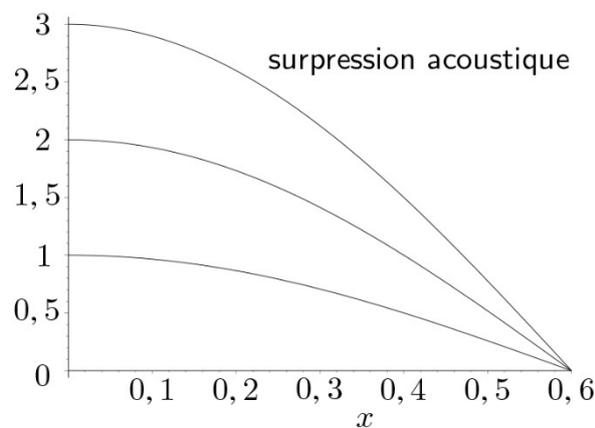
On doit donc avoir :

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}x_q = q\pi \quad \text{avec } q \text{ entier relatif.}$$

Pour chaque valeur de q , on a une abscisse : $x_q = q\frac{\lambda_0}{2}$

On représente sur la figure ci-contre les ondes de pression pour différentes valeurs de p_0 à un instant t .

On vérifie que l'on a bien un ventre de surpression en $x = 0$ et un noeud de surpression en $x = L$.

**b) Étude de l'harmonique de fréquence $\nu_1 = 3\nu_0$**

La longueur d'onde λ_1 est :

$$\lambda_1 = \frac{4L}{3}$$

Noeuds de vibration de surpression acoustique :

Les noeuds de vibration sont pour :

$$x_m = \frac{\lambda_1}{4} + m\frac{\lambda_1}{2}$$

avec m entier relatif. On a alors :

$$x_m = \frac{L}{3} + m\frac{2L}{3}$$

On a deux points : $x = \frac{L}{3}$ et $x = L$.

Ventres de vibration de surpression acoustique :

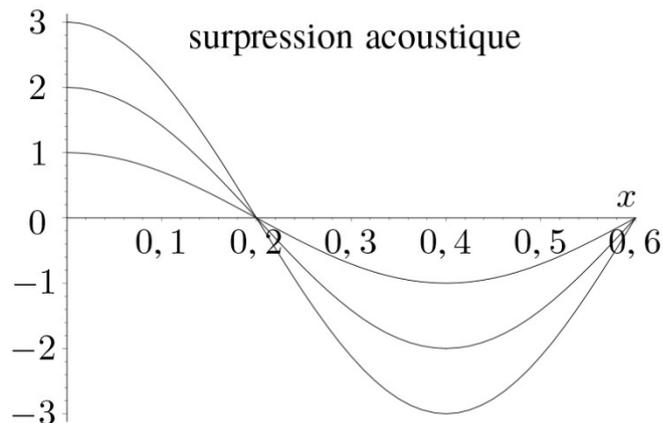
Les ventres de vibration sont pour :

$$x_q = q \frac{\lambda_1}{2}$$

avec q entier relatif. On a alors :

$$x_q = q \frac{2L}{3}$$

On a deux points : $x = 0$ et $x = \frac{2L}{3}$



3. La vitesse particulaire est la dérivée du déplacement ξ par rapport au temps. On a donc :

$$u_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{p_0}{\mu_0 c} \sin(\omega t) \sin(kx)$$

On intègre :

$$\xi = -\frac{p_0}{\mu_0 c \omega} \cos(\omega t) \sin(kx)$$

On a toujours la constante d'intégration nulle dans le cours sur la propagation des ondes.

L'amplitude maximale du déplacement des particules est :

$$\xi_{\max} = \frac{p_0}{\mu_0 c \omega} = \frac{p_0}{\mu_0 k c^2}$$

Comme $\lambda_0 = 4L$, on en déduit :

$$\xi_{\max} = \frac{p_0}{2\pi\mu_0 c^2} \lambda_0 = \frac{p_0}{2\pi\mu_0 c^2} 4L = p_0 \frac{2L}{\pi\mu_0 c^2}$$

Finalement la surpression maximale est :

$$p_0 = \frac{\xi_{\max} \pi \mu_0 c^2}{2L} = 157 \text{ Pa}$$

OD22 – Fréquences propres d'une sphère rigide

1. Le milieu étant limité, une onde sphérique divergente sera réfléchiée par les parois de la cavité et donnera naissance à une onde sphérique convergente. L'onde est donc la superposition de deux ondes sphériques, l'une convergente, l'autre divergente. Le champ des vitesses se calcule à partir de l'équation d'Euler linéarisée. Tous calculs faits, on trouve :

$$\underline{v} = \frac{1}{i\mu_0\omega r^2} \left(\underline{A}(1 + ikr) \exp(i(\omega t - kr)) + \underline{B}(1 - ikr) \exp(i(\omega t + kr)) \right).$$

2. Le débit volumique $D_v = 4\pi r^2 v(r, t)$ à travers une sphère de rayon r tend vers 0 quand r tend vers 0. On en déduit : $\underline{A} = -\underline{B}$. Les expressions de la surpression et de la vitesse se simplifient en :

$$\underline{p} = -\frac{2iA}{r} \sin(kr) \exp(i\omega t)$$

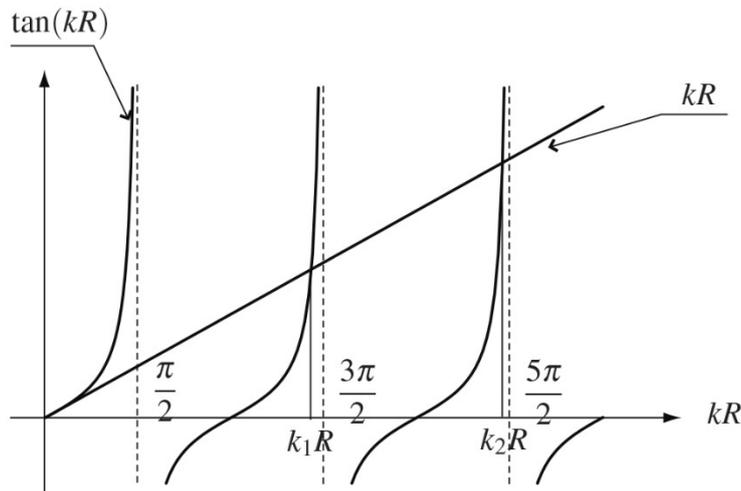
et :

$$\underline{v} = -\frac{2A}{i\omega\mu_0 r^2} (-2\sin(kr) + 2kr\cos(kr)) \exp(i\omega t).$$

Ce sont des ondes stationnaires, ce qui est normal puisque le système est spatialement limité. D'autre part, à la surface de la cavité sphérique, la composante normale de la vitesse du fluide est nulle donc $v(R, t) = 0$, ce qui donne l'équation vérifiée par les fréquences propres :

$$\tan(kR) = kR \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}.$$

Cette équation se résout graphiquement en cherchant les intersections entre la courbe $\tan X$ et la première bissectrice :



Il y a une solution dans chaque intervalle $\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}, (2n+1)\frac{\pi}{2} \right]$ ($n \in \mathbb{N}$) donc une fréquence propre dans chaque intervalle $\left[(2n-1)\frac{c}{4R}, (2n+1)\frac{c}{4R} \right]$. On remarque d'ailleurs que très vite (dès la deux ou troisième fréquence propre), $f_n \simeq (2n-1)\frac{c}{4R}$.

3. Une résolution numérique de l'équation $\tan X = X$ donne une première solution égale à $X_1 = 4,5$, ce qui correspond à une fréquence propre $f_1 = \frac{cX_1}{2\pi R} = 4,9$ kHz, ce qui est très aigu.

OD23 – Le vent porte le son

1. Les équations fondamentales sont :

- équation d'Euler : $\mu(x,t) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(x,t) + \mu(x,t) (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}(x,t) = -\text{grad} p(x,t)$;
- équation locale de conservation de la masse : $\frac{\partial \mu}{\partial t}(x,t) + \text{div}(\mu \vec{v})(x,t) = 0$;
- évolution thermodynamique du fluide : $\chi_S = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$.

2. Une fois linéarisées, les équations fondamentales s'écrivent :

- équation d'Euler : $\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t}(x,t) + \mu_0 v_0 \frac{\partial v_1}{\partial x}(x,t) = -\frac{\partial p_1}{\partial x}(x,t)$;
- équation locale de conservation de la masse : $\frac{\partial \mu_1}{\partial t}(x,t) + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x}(x,t) + v_0 \frac{\partial \mu_1}{\partial x}(x,t) = 0$;
- évolution thermodynamique du fluide : $\mu_1(x,t) = \mu_0 \chi_S p_1(x,t)$.

3°) a)

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} p_1 = c^2 \mu_1 \\ \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \mu_0 v_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \mu_1}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial \mu_1}{\partial t} - v_0 \frac{\partial \mu_1}{\partial x} \\ \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_0 \left(-\frac{\partial \mu_1}{\partial t} - v_0 \frac{\partial \mu_1}{\partial x} \right) = -c^2 \frac{\partial \mu_1}{\partial x} \end{array} \right. \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} - v_0 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x \partial t} \\ \mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} + v_0 \left(-\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t \partial x} - v_0 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x^2} \right) = -c^2 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x^2} \end{array} \right. \\ & \Rightarrow -\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} - v_0 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x \partial t} + v_0 \left(-\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t \partial x} - v_0 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x^2} \right) = -c^2 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x^2} \\ & \Rightarrow \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} + 2v_0 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x \partial t} = (c^2 - v_0^2) \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x^2} \end{aligned}$$

b. Il ne s'agit pas de l'équation de d'Alembert. C'est seulement dans le cas où $v_0 = 0$ que l'on retrouve l'équation de d'Alembert. Elle n'est donc valable que dans un référentiel particulier, celui où le fluide est au repos. Elle n'est donc pas invariante par un changement de référentiel galiléen, bien que les équations fondamentales de l'acoustique le soient. Le même type de problématique est survenu à la fin du XIX^{ème} siècle avec la propagation de la lumière. On a cru que les équations de Maxwell, qui conduisent à l'équation de d'Alembert, n'étaient peut-être vraies que dans le référentiel particulier où le milieu, support de la propagation de la lumière, l'éther, était au repos.

4. a. La relation de dispersion est la suivante : $\omega^2 - 2v_0 \omega k = (c^2 - v_0^2) k^2$.

b. C'est une équation du second degré en k . On en tire les deux solutions :

$$k_1 = \frac{\omega}{v_0 + c} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{\omega}{v_0 - c}.$$

On obtient deux vitesses de propagation possibles : $v_0 + c$ et $v_0 - c$ selon que l'onde se propage dans le même sens ou dans le sens opposé au mouvement d'ensemble. Ces deux résultats sont bien sûr compatibles avec la loi de composition galiléenne des vitesses.

B – Exercices supplémentaires

OD24 – Intensité sonore

1°) La surpression et l'amplitude de déplacement sont reliées par :

$$p_1 = Z v_1 \Rightarrow p_{eff} = \mu_0 c \underbrace{\omega \xi_{eff}}_{v_{eff}}$$

donc l'onde de fréquence deux fois plus grande correspond à une surpression deux fois plus grande. Son intensité sonore $I = \langle p_1 v_1 \rangle$ est quatre fois plus grande que celle de l'autre onde.

$$I_2 = 4I_1$$

En décibels $I_{dB} = 10 \log\left(\frac{I}{I_{réf}}\right)$, elle est supérieure de 6dB à celle de l'autre onde :

$$I_{dB2} - I_{dB1} = 10 \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 10 \log(4) = 6dB$$

2°) L'intensité sonore est augmentée de $I_{dB} = 10 \log(9) = 9,5$ dB quand on triple l'amplitude de l'onde.

3°) Nous avons vu que $p_{eff} = \mu_0 c \omega \xi_{eff}$ donc ici $p_{eff} = 50Pa$ en prenant $c = 340$ m.s⁻¹ et $\mu_0 = 1,3$ kg.m⁻³. L'intensité sonore correspondante est de $I_{dB} = 10 \log\left(\frac{50}{2 \cdot 10^{-5}}\right) = 128$ dB, voisine du seuil de douleur.

4°) Un seul pétard émet une intensité sonore inférieure de $10 \log 2 = 3$ dB à celle qu'émettent les deux pétards, donc une intensité sonore de 87 dB. En effet :

$$\begin{aligned} I_{dB1} &= 10 \log\left(\frac{I_1}{I_{réf}}\right) \text{ et } I_{dB2} = 10 \log\left(\frac{I_2}{I_{réf}}\right) = 10 \log\left(\frac{2I_1}{I_{réf}}\right) \\ &\Rightarrow I_{dB1} = I_{dB2} - 10 \log 2 = 87dB \end{aligned}$$

OD25 – Ondes sphériques

1°) La surpression vérifie l'équation de d'Alembert tridimensionnelle :

$$\Delta p_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

Dans le problème à symétrie sphérique qui nous intéresse, cette équation s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial t^2}$$

La fonction (rp_1) vérifie l'équation de d'Alembert unidimensionnelle donc se met sous la forme :

$$p_1(r, t) = \underbrace{\frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}}_{\text{onde sphérique divergente}} + \underbrace{\frac{g\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r}}_{\text{onde sphérique convergente}}$$

2°) Utilisons l'équation d'Euler linéarisée dans le cadre de l'approximation acoustique :

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial p_1}{\partial r}$$

Or :

$$\begin{aligned} \underline{p}_1(r, t) &= \frac{p_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \\ \Rightarrow \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_0} \left[\frac{p_0}{r} (-ik) e^{i(\omega t - kr)} - \frac{p_0}{r^2} e^{i(\omega t - kr)} \right] \\ &= \frac{p_0}{\mu_0 r} e^{i(\omega t - kr)} \left[ik + \frac{1}{r} \right] \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \frac{p_0}{\mu_0 r} \left(\frac{1}{i\omega} \right) e^{i(\omega t - kr)} \left[ik + \frac{1}{r} \right] + \underline{cste} \\ &= \frac{p_0}{\mu_0 c} \left(\frac{c}{r^2 i\omega} + \frac{cki}{ri\omega} \right) e^{i(\omega t - kr)} + \underline{cste} \\ &= \frac{p_0}{\mu_0 c} \left(-\frac{ic}{r^2 \omega} + \frac{1}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)} + \underline{cste} \end{aligned}$$

ce qui donne (en éliminant tout champ statique) :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{u}}(r, t) &= \frac{p_0}{\mu_0 c} \left(\frac{1}{r} - \frac{ic}{\omega r^2} \right) e^{i(\omega t - kr)} \underline{\vec{u}}_r = \underline{\vec{u}}_1(r, t) + \underline{\vec{u}}_2(r, t) \\ \text{où } \underline{\vec{u}}_1(r, t) &= \frac{p_0}{\mu_0 c r} e^{i(\omega t - kr)} \underline{\vec{u}}_r \\ \text{et } \underline{\vec{u}}_2(r, t) &= \frac{p_0}{\mu_0 c} \left(-\frac{ic}{\omega r^2} \right) e^{i(\omega t - kr)} \underline{\vec{u}}_r \end{aligned}$$

Le premier terme, en $\frac{1}{r}$, prédomine quand r est grand, il est appelé *champ lointain*, le second, en, $\frac{1}{kr^2} = \frac{\lambda}{2\pi r^2}$, prédomine quand r est petit, il est appelé *champ proche*.

La limite entre les deux champs est de l'ordre de la longueur d'onde : si $r \gg \lambda$, $\|\underline{\vec{u}}_1\| \gg \|\underline{\vec{u}}_2\|$

et inversement si $r \ll \lambda$.

Le champ proche est en quadrature de phase avec la surpression, la valeur moyenne de $p_1(r,t)u_2(r,t)$ est donc nulle (si p_1 est en $\sin(\omega t)$, u_2 est en $\cos(\omega t)$ et réciproquement). Seul le champ lointain, en phase avec la surpression, contribue à l'intensité de l'onde.

3°)

$$\text{Soit : } \underline{u} = \frac{p_0}{\mu_0 c} \left(-\frac{ic}{r^2 \omega} + \frac{1}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)} = \frac{p_1(r,t)}{\mu_0 c} \left(1 - \frac{i}{rk} \right) \Rightarrow \underline{Z} = \frac{\mu_0 c}{1 - \frac{i}{kr}} = \frac{\mu_0 c}{1 - \frac{i\lambda}{2\pi r}}$$

Si $r \ll \lambda$, $\underline{Z} \sim i\mu_0 ckr$ est imaginaire pure : la surpression et la vitesse sont en quadrature (le champ proche prédomine).

Si $r \gg \lambda$, $\underline{Z} \sim \mu_0 c$ c'est l'impédance d'une onde plane progressive. À des distances grandes devant la longueur d'onde, l'onde apparaît comme quasi-plane.

4°) Au niveau de la sphère pulsante, la composante normale de la vitesse du fluide est égale à celle de la sphère donc $\underline{u}(r(t), t) = -a\omega \sin(\omega t)$. L'amplitude des mouvements de la sphère étant petite, nous écrirons cette condition en $r = r_0$ et non en $r = r(t)$. D'autre part, $\lambda = 6.8m \gg r_0$: au voisinage de la sphère, le champ des vitesses se réduit au champ proche. Finalement, en écrivant la condition ci-dessus en notation complexe, nous arrivons à l'expression :

$$-\frac{p_0}{\mu_0 c} \frac{i}{kr_0^2} = ia\omega \text{ car } \underline{u}(r, t) = \frac{p_0}{\mu_0 c} \left(\frac{1}{r} - \frac{ic}{\omega r^2} \right) e^{i(\omega t - kr)} \underline{u}_r \Leftrightarrow p_0 = -a\mu_0 \omega^2 r_0^2$$

Or la puissance d'émission sonore P est égale à :

$$P = \langle p_1(r, t)u(r, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\underline{p}_1(r, t) \underline{u}^*(r, t) \right) = \frac{p_0^2}{2\mu_0 cr^2} = \frac{a^2 \mu_0 \omega^4 r_0^2}{2cr^2}$$

Cette puissance est proportionnelle à $a^2 r_0^2 \omega^4$: plus le son est grave, plus r_0 doit être grand (a doit rester petit devant r_0) donc les sources de petites tailles ne sont pas adaptées à la production de sons graves.

Une intensité sonore de 90 dB correspond à :

$$90 = 10 \log \left(\frac{p_0^2}{2\mu_0 cr^2} \frac{1}{10^{-12}} \right) \Leftrightarrow -3 = \log \left(\frac{p_0^2}{2\mu_0 cr^2} \right)$$

ce qui est équivalent à : $p_0 = (2 \cdot 10^{-3} \mu_0 cr^2)^{\frac{1}{2}} = 0.9Pa$ avec $r=1$ m.

Alors : $a = \frac{p_0}{\mu_0 (2\pi f)^2 r_0^2} = 2.9mm$.

La valeur obtenue est assez grande. L'approximation $a \ll r_0$ est tout juste vérifiée (le rapport entre les deux est égal à 0, 059).

OD26 - Détermination de la célérité des ondes acoustiques

1°) Nous pouvons rechercher les solutions sous forme d'ondes stationnaires ou bien comme superposition d'ondes planes progressives harmoniques, l'une dans un sens,

l'autre dans l'autre. La première méthode est plus logique puisqu'il y a deux conditions aux limites, la seconde est plus simple à mettre en œuvre grâce à la notion d'impédance acoustique.

- *Première méthode :*

Cherchons la surpression sous la forme : $p(x, t) = p_0 \cos(\omega t + \psi) \cos(kx + \varphi)$

où ω est la pulsation du haut-parleur et $\omega = kc$. La vitesse particulière s'en déduit grâce à une des deux équations de couplage, par exemple l'équation d'Euler linéarisée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Il vient : $u(x, t) = \frac{p_0}{\rho_0 c} \sin(\omega t + \psi) \sin(kx + \varphi)$

Les conditions aux limites sont :

- vitesse nulle en $x = 0$,
- vitesse égale à celle du haut-parleur en $x = L$.

La première relation donne : $\sin \varphi = 0$. On choisit $\varphi = 0$ (un choix différent ne fait que changer le signe de p_0).

Le déplacement de la membrane du haut-parleur est $\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t)$ sa vitesse est $v(t) = -\omega \xi_0 \sin(\omega t)$.

La deuxième condition aux limites s'écrit : $u(L, t) = v(t)$, soit :

$$\frac{p_0}{\rho_0 c} \sin(\omega t + \psi) \sin(kL) = -\omega \xi_0 \sin(\omega t)$$

Nous en déduisons que $\psi = 0$ et $p_0 = -\frac{\omega \xi_0 \rho_0 c}{\sin(kL)}$

La surpression dans le tuyau est donc :

$$p(x, t) = -\frac{\omega \xi_0 \rho_0 c}{\sin(kL)} \cos(\omega t) \cos(kx).$$

- *Deuxième méthode :*

Cherchons la surpression sous la forme :

$$\underline{p}(x, t) = \underline{p}_1 \exp(i(\omega t + kx)) + \underline{p}_2 \exp(i(\omega t - kx))$$

La vitesse s'écrit :

$$\underline{u}(x, t) = \frac{1}{Z_a} \left(-\underline{p}_1 \exp(i(\omega t + kx)) + \underline{p}_2 \exp(i(\omega t - kx)) \right)$$

où $Z_a = \rho_0 c$

On pose : $\xi(t) = \xi_0 \exp(i\omega t)$

Les conditions aux limites donnent :

- en $x = 0$: $\underline{p}_1 - \underline{p}_2 = 0$
- en $x = L$: $\frac{1}{Z_a} \left(\underline{p}_2 \exp(-ikL) - \underline{p}_1 \exp(ikL) \right) = i\omega \xi_0$

ce qui donne $\underline{p}_1 = \underline{p}_2 = -\frac{\omega \xi_0 \rho_0 c}{2 \sin(kL)}$. La surpression est donc égale à :

$$\underline{p}(x, t) = -\frac{\omega \xi_0 \rho_0 c}{\sin(kL)} \cos(kx) \exp(i\omega t)$$

ou encore :
$$p(x, t) = -\frac{\omega \xi_0 \rho_0 c}{\sin(kL)} \cos(kx) \cos(\omega t)$$

2°) Les nœuds de pression sont espacés de $\frac{\lambda}{2}$, avec $c = \lambda f$ et $\gamma = \frac{M c^2}{RT}$ car $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$.

L'application numérique donne :

- pour $f = 300$ Hz, $\lambda = 114$ cm, $c = 342$ m.s⁻¹ et $\gamma = 1,40$;
- pour $f = 500$ Hz, $\lambda = 68,2$ cm, $c = 341$ m.s⁻¹ et $\gamma = 1,39$;
- pour $f = 988$ Hz, $\lambda = 34,7$ cm, $c = 342$ m.s⁻¹ et $\gamma = 1,40$.

On prendra $c = 342$ m.s⁻¹ et $\gamma = 1,40$.

3°) Il y a résonance quand $\sin(kL) = 0$ donc pour les fréquences $f_n = \frac{nc}{2L}$. Avec les valeurs numériques précédentes, les résonances ont lieu pour des fréquences égales à 118 Hz, 236 Hz, 354 Hz, 472 Hz, 590 Hz, 708 Hz, etc. Les fréquences relevées par l'expérimentateur font bien partie de cette suite.

En $x = 0$, à la résonance, l'amplitude de vibration maximale des couches d'air est très grande devant l'amplitude de vibration du haut-parleur. Le haut-parleur peut donc être considéré comme un nœud de vibration c'est-à-dire une paroi rigide et on se trouve dans le cas d'un tuyau fermé à ses deux extrémités. Il y a résonance quand la fréquence du haut-parleur est une des fréquences propres du tuyau.

OD27 – Dérivation de l'équation des ondes sonores

a) Au repos, le volume du système vaut $S dx$ et sa masse est $dm = \mu_0 S dx$. Lors du passage d'une onde sonore, le volume du système varie car il se dilate ou se contracte selon la direction Ox . En présence de l'onde, le système se situe entre $x + \xi(x, t)$ et $x + dx + \xi(x + dx, t)$ (Fig. 19), et sa masse volumique vaut $\mu_0 + \mu_1(x, t)$. Par conservation de la masse, $dm = (\mu_0 + \mu_1) S(x + dx + \xi(x + dx, t) - x - \xi(x, t))$. On effectue un développement limité :

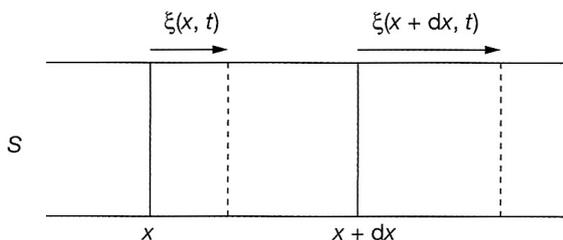
$$dm = (\mu_0 + \mu_1) S \left(dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \right) = (\mu_0 + \mu_1) S dx \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right).$$

On identifie les deux masses : $\mu_0 = (\mu_0 + \mu_1) \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$,

soit $1 = \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_0} \right) \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$. À l'ordre 1, on obtient

$$\mu_1 = -\mu_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}. \text{ Si la tranche se dilate } \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} > 0 \right), \text{ la}$$

masse volumique diminue ($\mu_1 < 0$).



b) dx doit être faible par rapport à la distance de variation des différentes grandeurs, c'est-à-dire $dx \ll \lambda$. En effet, on assimile les taux de variations tels que $\frac{\xi(x + dx, t) - \xi(x, t)}{dx}$ à la dérivée partielle $\frac{\partial \xi}{\partial x}$.

En revanche, le volume particulière défini doit posséder entre deux instants quasiment les mêmes particules (système fermé), soit $dx \gg \ell$.

c) Dans cette expression, $\frac{\partial \mu}{\partial p}$ représente la petite variation de masse volumique divisée par la petite variation de pression due au passage de l'onde, soit μ_1 / p_1 . Ainsi, $\chi_S = \frac{1}{\mu} \frac{\mu_1}{p_1}$. À l'ordre le plus bas non nul, $\mu \simeq \mu_0$, soit

$$\chi_S = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_1}{p_1}.$$

d) La relation fondamentale de la dynamique, projetée sur Ox , donne :

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (p_0 + p_1(x, t)) S - (p_0 + p_1(x + dx, t)) S.$$

En effet, les seules forces agissant sur le système sont la pression à gauche qui pousse dans le sens des x positifs et la pression à droite qui pousse dans le sens des x négatifs :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p_1}{\partial x}.$$

e) On dérive cette dernière relation par rapport à x . Sachant que les dérivées par rapport à x et par rapport à t commutent (elles concernent des variables indépendantes), il en résulte $-\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$. Comme

$\mu_1 = \mu_0 \chi_S p_1$, on conclut par :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0.$$

La pression p vérifie la même équation de d'Alembert car elle ne diffère de p_1 que par une constante. Les ondes sonores vérifient aussi l'équation de d'Alembert.

f) On a montré que les ondes sonores se propagent à la vitesse $v = 1/\sqrt{\mu_0 \chi_S}$. Pour un gaz parfait, $pV = nRT$, soit $p = \mu RT / M$, où M est la masse molaire du gaz parfait. On en déduit $\mu_0 = p_0 M / RT_0$.

Pour déterminer χ_S , il faut exprimer $\frac{\partial \mu}{\partial p}$. De la relation

des gaz parfaits, on obtient par dérivée logarithmique : $\frac{dp}{p} = \frac{d\mu}{\mu} + \frac{dT}{T}$. On est à entropie constante, donc la loi de Laplace $pV^\gamma = \text{cte}$ (ou aussi $p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte}$) s'applique. Sa dérivée logarithmique s'écrit

$$(1 - \gamma) \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dT}{T} = 0. \text{ Ainsi, } \frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\mu}{\mu}, \text{ soit } \chi_S = \frac{1}{\gamma p}.$$

Dans les conditions usuelles, $\chi_S = 1 / (\gamma p_0)$.

On en déduit bien $c = \sqrt{\frac{RT_0 \gamma p_0}{p_0 M}} = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$. Fai-

sons l'application numérique :

$$v = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,3 \cdot 298}{29 \cdot 10^{-3}}} = 340 \text{ m.s}^{-1}.$$

OD28 - Influence du milieu sur la propagation d'une onde sonore

1°) La surpression p est constante $p=p_0$. La solution de l'équation différentielle est :

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \frac{1}{\chi_s \rho_0} \left(\mu + \tau \frac{d\mu}{dt} \right) \\
 \Leftrightarrow \frac{\mu}{\tau} + \frac{d\mu}{dt} &= \frac{\rho_0 p_0 \chi_s}{\tau} \\
 \Rightarrow \mu(t) &= \rho_0 p_0 \chi_s \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)
 \end{aligned}$$

μ retrouve donc la valeur $\rho_0 p_0 \chi_s$ qu'après un certain temps de l'ordre de quelques τ .

2°)

a) Equation du mouvement :

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) &= -\overrightarrow{\text{grad}} (p_0 + p) \\
 \Rightarrow \left(\rho_0 + \underbrace{\mu}_{\ll \rho_0} \right) \left(\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\substack{\text{ordre 1} \\ \text{en } v}} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}}_{\text{ordre 2 en } v} \right) &= -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\underbrace{p_0}_{\text{cste}} + p \right)
 \end{aligned}$$

On se limite aux termes du premier ordre donc tout produit de deux termes du premier ordre est un deuxième ordre et sera négligé d'où :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p$$

En projection sur le vecteur \vec{u}_x , cette relation devient : $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$

b) Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

or $\rho = \mu + \rho_0$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\vec{v}) \cdot (\mu + \rho_0) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\mu + \rho_0) = 0$$

Or $\mu \ll \rho_0$ et $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \mu$ est un terme d'ordre 2 $\ll \frac{d\mu}{dt}$

Donc :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\vec{v}) \cdot (\rho_0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x}$$

3°) Posons $c^2 = \frac{1}{\chi_s \rho_0}$ d'où $p = c^2 \left(\mu + \tau \frac{d\mu}{dt} \right)$

d'où en dérivant deux fois par rapport à x :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial^3 \mu}{\partial t \partial x^2} \right)$$

Et :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mu}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial^3 \mu}{\partial t \partial x^2} \right) = 0\end{aligned}$$

$$\text{Or : } \mu = \frac{p}{c^2} - \tau \frac{d\mu}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 p}{dt^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}4^\circ) \text{ Soit } \underline{p} &= \underline{p}_0 e^{j(\omega t - kx)} \Rightarrow -\omega^2 + c^2(k^2 + \tau k^2 j\omega) = 0 \\ &\Rightarrow \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{1 + j\tau\omega}\end{aligned}$$

si $\omega\tau \ll 1$, après développement limité :

$$\underline{k} = \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{j\tau\omega}{2} \right)$$

$$\text{Posons } \alpha = \frac{\omega^2 \tau}{2c} \text{ d'où : } \underline{k} = \frac{\omega}{c} - j\alpha$$

$$\Rightarrow \underline{p} = \underline{p}_0 e^{j(\omega t - kx)} = \underline{p}_0 e^{-\alpha x} e^{j\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)}$$

avec le facteur d'atténuation $e^{-\alpha x}$ et la vitesse de phase c .