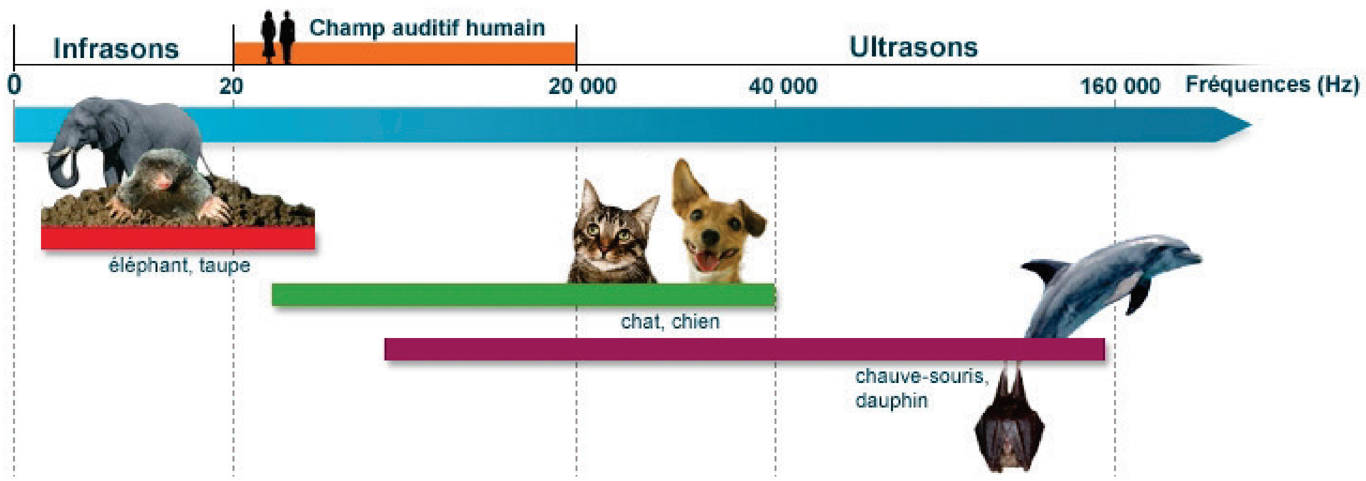
OD2 – Ondes acoustiques dans les fluides

I – Equation de propagation

I-1) Fréquences des ondes sonores

L'oreille humaine moyenne est sensible aux ondes sonores de fréquences comprises entre f = 20 Hz (graves) et f = 20 kHz (aigus). À plus basse fréquence se trouve le domaine des infrasons et, à partir de 20 kHz, les ondes sonores sont nommées ultrasons. Citons un exemple d'utilisation des ultrasons. Ceux-ci sont au cœur du dispositif de sonar. La propagation d'ondes sonores dans l'eau et leur éventuelle réflexion permet de localiser des obstacles, objets, poissons…



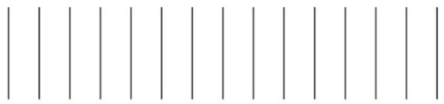
I-2) Approximation acoustique

Imaginons un haut-parleur dans une pièce. Lorsque celui-ci fonctionne, une fine membrane vibre, engendrant une onde sonore se propageant dans une certaine direction choisie comme axe Ox. Cherchons à interpréter les phénomènes. Au contact de la membrane du haut-parleur, les tranches d'air sont entraînées. Elles se mettent à vibrer ; elles se compriment et se détendent alternativement, engendrant de petites différences de pression par rapport à la pression moyenne p_o de la pièce.

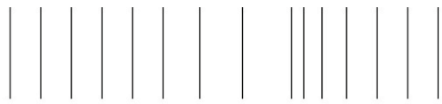
On pose ainsi :

$$p(x,t) = p_o + p_1(x,t)$$

p_1 est appelée surpression ou pression acoustique.



Air au repos : Les différentes couches d'air sont au repos



En présence d'une perturbation : les différentes couches d'air sont comprimées puis détendues.

Les ondes sonores sont des ondes longitudinales de surpression se propageant dans un milieu matériel. C'est l'élasticité du milieu qui permet la propagation des ondes.

On se place dans le référentiel où le fluide est au repos en l'absence d'onde sonore. En présence d'une onde sonore, il y a perturbation du fluide au repos. On adopte les notations suivantes dans la suite du cours.

Grandeur	Unité	Fluide au repos	En présence d'une onde sonore
Champ des vitesses	ms^{-1}	$\vec{v}(M,t) = \vec{0}$	$\vec{v}(M,t) = \vec{v_1}(M,t)$
Champ de pression	Pa	$p(M,t) = p_0$	$p(M,t) = p_0 + p_1(M,t)$
Masse volumique	$kg\,m^{-3}$	$\mu(M,t) = \mu_0$	$\mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t)$
Déplacement des particules	m	$\xi(M,t) = 0$	$\xi(M,t) = \xi_1(M,t)$

Les quantités comportant l'indice 1 sont supposées être des infiniment petits du premier ordre. Ainsi, l'approximation acoustique s'écrit :

L'approximation acoustique concerne les champs caractérisant l'onde acoustique, portant l'indice 1 : ce sont des infiniment petits d'ordre 1, ainsi que leurs dérivées spatiales et temporelles.

$$\frac{p_1}{p_0} \ll 1, \qquad \frac{\mu_1}{\mu_0} \ll 1, \quad \frac{v_1}{c} \ll 1 \; et \; \frac{\xi_1}{\lambda} \ll 1$$

On mènera les calculs au premier ordre, en négligeant l'influence de la pesanteur et en considérant le fluide parfait.

I-3) Equations de couplage

a) Equation d'Euler

Vu que le fluide est parfait et qu'on néglige la pesanteur on a :

$$\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}\, p$$

$$\Rightarrow \left(\mu_0 + \underbrace{\mu_1}_{\ll\mu_0}\right)\left(\underbrace{\frac{\partial\overrightarrow{v_1}}{\partial t}}_{\substack{ordre\ 1\\ en\ v_1}} + \underbrace{(\vec{v}_1.\overrightarrow{grad})\overrightarrow{v_1}}_{ordre\ 2\ en\ v_1}\right) = -\overrightarrow{grad}\left(\underbrace{p_0}_{cste} + p_1\right)$$

On se limite aux termes du premier ordre donc tout produit de deux termes du premier ordre est un deuxième ordre et sera négligé d'où :

$$\mu_0 \frac{\partial\overrightarrow{v_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\, p_1$$

b) Equation de conservation de la masse

On a :

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} + div(\mu\vec{v}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\mu_0 + \mu_1)}{\partial t} + div\left((\mu_0 + \mu_1)\vec{v}_1\right) = 0$$

En se limitant aux termes du premier ordre on a donc :

$$\Rightarrow \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 div\, \vec{v}_1 = 0$$

c) Transformation thermodynamique

Enfin, il reste à trouver un lien entre les variations de pression et celles de masse volumique, c'est-à-dire préciser la nature de la transformation thermodynamique associée au passage de l'onde.

Les vibrations des tranches de fluide sont suffisamment rapides pour que des transferts thermiques ne puissent pas se produire.

Les transformations des tranches d'air sont donc supposées adiabatiques. En l'absence de tout phénomène dissipatif, elles sont réversibles et par conséquent isentropiques. Les fluides sont caractérisés par leur coefficient de compressibilité isentropique :

$$\chi_s = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_s \Rightarrow \chi_s = \frac{1}{\mu_0 + \mu_1}\left(\frac{\mu - \mu_0}{p - p_0}\right)_s$$

$$\Rightarrow \chi_s \sim \frac{1}{\mu_0}\frac{\mu_1}{p_1}\ car\ \mu_0 \gg \mu_1$$

D'où :

$$\mu_1 = \mu_0 p_1\, \chi_s$$

d) Equations linéarisées

Dans le cadre de l'approximation acoustique on a obtenu trois équations linéarisées :

$$\begin{cases} Euler :\ \mu_0 \dfrac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\, p_1 = \vec{0} \\ Conservation\ de\ la\ masse : \dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 div\, \vec{v}_1 = 0 \\ Transformation\ isentropique :\ \mu_1 = \mu_0\, p_1\, \chi_s \end{cases}$$

I-4) Equation de propagation

a) Equation unidimensionnelle

On envisage une propagation suivant (Ox) d'où :

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1} = v_1(x,t)\,\overrightarrow{u_x} \\ p_1 = p_1(x,t) \end{cases}$$

Les équations de couplage à une dimension donnent :

$$\begin{cases} \mu_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial t} + \dfrac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \quad (1) \\ \dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (2) \\ \mu_1 = \mu_0\, p_1\, \chi_s \quad (3) \end{cases}$$

Afin de découpler les équations on va calculer : $\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t}$ de deux façons :

$$(1) \Rightarrow \mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$$

$$(2) \Rightarrow \mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2}$$

Le théorème de Schwarz affirme que :

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2}$$

$$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (\mu_0\, p_1\, \chi_s)}{\partial t^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

La surpression p_1 obéit donc à l'équation de d'Alembert, unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \text{ où } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$$

La masse volumique μ_1 et la vitesse v_1 vérifient la même équation.

b) Equation tridimensionnelle

Si on s'intéresse à $p_1(M,t)$ l'équation vérifiait par la surpression s'écrit :

$$\Delta p_1 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \text{ où } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$$

I-5) Célérité du son

a) Dans un gaz

En assimilant l'air à un gaz parfait de rapport γ, il est possible de calculer le coefficient de compressibilité. Il doit être évalué dans des conditions adiabatiques réversibles. On utilise la loi de Laplace :

$$pV^\gamma = cste \Leftrightarrow p\left(\frac{\mathrm{m}}{\mu}\right)^\gamma = cste$$

$$\Rightarrow p = A\mu^\gamma$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = \gamma\frac{d\mu}{\mu}$$

D'où :

$$\chi_s = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\mu}{p}\right) = \frac{1}{\gamma p}$$

La célérité du son dans l'air est alors :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\mu_0}}$$

Or la loi des gaz parfaits s'écrit :

$$pV = nRT \Leftrightarrow p = \frac{\mu RT}{M} \sim \frac{\mu_0 RT_0}{M}$$

Donc :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

La célérité des ondes sonores dans un gaz supposé parfait s'écrit :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$$

Dans l'air à 20°c, on obtient $c = 343\, ms^{-1}$

b) Dans un liquide

Le coefficient de compressibilité d'un liquide dépend assez peu des conditions expérimentales. D'autre part, il est beaucoup plus faible que dans le cas d'un gaz.

Pour l'eau $\chi_s = 5\ 10^{-10}\mathrm{Pa}^{-1} \Rightarrow \mathrm{c} = 1500\mathrm{ms}^{-1}$

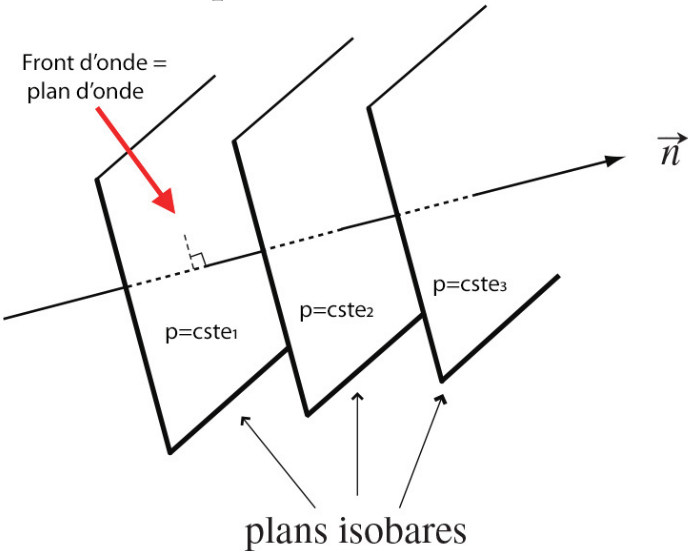
Etat	Gaz à 20°C			Liquide		Solide $\left(c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}\right)$
Matière	Air	Dioxygène	Dihydrogène	Eau	Mercure	Fer
c (en ms^{-1})	343	317	1270	1480	1450	4900

II – Ondes planes progressives harmoniques (OPPH)

II-1) Ondes planes

Si l'ensemble des points M tels que $p_1(M,t) = p_{10} = cste$ à t fixé, est un plan, alors l'onde est dite plane.
Dans le cas où $\vec{n} = \overrightarrow{u_x}$, alors l'onde plane est du type $p_1(x,t)$

À chaque valeur de p_{10} correspond un plan affine, appelé plan d'onde, tous ces plans étant parallèles entre eux.



II-2) OPPH

a) Intérêt

Comme cela a été établi au chapitre précédent, l'équation de d'Alembert unidimensionnelle admet des solutions en ondes planes progressives monochromatiques :

$$p_1(M,t) = p_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi\right) \text{ où } \vec{k} = k\,\vec{n} \text{ et } \vec{r} = \overrightarrow{OM}$$

L'intérêt principal de l'onde plane progressive monochromatique réside en fait dans l'analyse de Fourier. En sommant de telles ondes harmoniques, il est possible de reconstituer toute onde physique. La linéarité des équations de l'acoustique obtenues ici est alors fondamentale.

b) Notation complexe

Les équations qui décrivent le phénomène étant linéaires, l'utilisation de la notation complexe s'impose :

$$\underline{p_1}(M,t) = \underline{p_0}\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \text{ où } \underline{p_0} = p_0 e^{i\varphi}$$

La notation complexe des OPPH permet de simplifier les calculs dans les dérivées spatiales et temporelles :

$p_1 = p_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi\right)$	$\frac{\partial p_1}{\partial t}$	$\frac{\partial p_1}{\partial x}$	$\overrightarrow{grad}\, p_1$	$\overrightarrow{rot}\, \vec{v_1}$	$div\, \vec{v_1}$
$\underline{p_1} = \underline{p_0}\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$	$i\omega \underline{p_1}$	$-ik\, \underline{p_1}$	$-i\vec{k}\, \underline{p_1}$	$-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{v_1}}$	$-i\vec{k}.\underline{\vec{v_1}}$
$\underline{p_1} = \underline{p_0}\, e^{i(\omega t + \vec{k}.\vec{r})}$	$i\omega \underline{p_1}$	$ik\, \underline{p_1}$	$i\vec{k}\, \underline{p_1}$	$i\vec{k} \wedge \underline{\vec{v_1}}$	$i\vec{k}.\underline{\vec{v_1}}$

c) Impédance acoustique

A l'aide de la notation complexe, les équations de couplage s'écrivent :

$$\begin{cases} \mu_0 \dfrac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\, p_1 = \vec{0} \Rightarrow \mu_0 i\omega\, \underline{\vec{v_1}} - i\vec{k}\, \underline{p_1} = \vec{0} \\ \dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 div\, \vec{v}_1 = 0 \Rightarrow i\omega\mu_1 + \mu_0\left(-i\vec{k}.\underline{\vec{v_1}}\right) = 0 \\ \underline{\mu_1} = \mu_0\, \underline{p_1}\, \chi_s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\vec{v_1}} = \dfrac{\vec{k}}{\mu_0 \omega}\, \underline{p_1} \\ \vec{k}.\underline{\vec{v_1}} = \dfrac{\omega\mu_1}{\mu_0} \\ \underline{\mu_1} = \mu_0\, \underline{p_1}\, \chi_s \end{cases}$$

La vitesse est colinéaire au vecteur $\vec{k}$ donc à la direction de propagation : l'onde de vitesse est longitudinale.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{v}_1 = \dfrac{k}{\mu_0 \omega}\underline{p}_1 \Leftrightarrow \underline{p}_1 = \mu_0 c\, \underline{v}_1 \\ \dfrac{k^2 p_1}{\mu_0 \omega} = \omega p_1 \chi_s \Rightarrow k^2 = \mu_0 \omega^2 \chi_s = \dfrac{\omega^2}{c^2} \end{cases}$$

Si l'onde se propage suivant les x négatifs il faut changer $\vec{k}$ en $-\vec{k}$ d'où la relation : $\underline{p}_1 = -\mu_0 c\, \underline{v}_1$

Pour une OPPH se propageant dans le sens des « x » croissants on définit l'impédance acoustique par :

$$p_1 = p_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi\right) \Rightarrow Z_a = \frac{p_1}{v_1} = \mu_0 c$$

Si l'onde se propage suivant les « x » négatifs on a :

$$p_1 = p_0 \cos\left(\omega t + \vec{k}.\vec{r} + \varphi\right) \Rightarrow Z_a = \frac{p_1}{v_1} = -\mu_0 c$$

L'onde est longitudinale et vérifie $p_1\, \vec{n} = Z_a\, \overrightarrow{v_1}$ et $\omega = kc$

Tout comme en électrocinétique, l'impédance acoustique exprime la proportionnalité entre deux grandeurs d'intérêt, en régime sinusoïdal forcé. L'impédance acoustique ne peut donc être employée que pour des ondes planes progressives monochromatiques. Citons quelques ordres de grandeur :

- Pour l'eau, $Z_{eau} = 1{,}4\ 10^6 kg\ m^{-2}s^{-1}$
- Pour l'air, $Z_{air} = 410\ kg\ m^{-2}s^{-1}$

L'impédance acoustique d'un milieu est d'autant plus élevée que le milieu est dense et peu compressible :

$$Z_{solide} > Z_{liquide} > Z_{gaz}$$

Cela signifie notamment que, pour une même surpression, la vitesse particulaire est bien plus élevée dans l'air que dans l'eau.

d) Retour sur l'approximation acoustique

A quelle condition a-t-on le droit de négliger dans l'expression de l'accélération le terme $(\vec{v}_1.\overrightarrow{grad})\overrightarrow{v_1}$ devant $\frac{\partial\overrightarrow{v_1}}{\partial t}$

Cette approximation est légitime lorsque :

$$v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} \ll \frac{\partial v_1}{\partial t}$$
$$\Leftrightarrow -ik\,\underline{v}_1^2 \ll i\omega\,\underline{v}_1$$
$$\Leftrightarrow v_1 \ll c$$

De plus en notant $\xi(M,t)$ le déplacement des particules de fluide sous l'effet de l'onde on a :

$$v_1 = \frac{\partial\xi}{\partial t} \Rightarrow \underline{v}_1 = i\omega\,\underline{\xi} \Rightarrow v_1 = kc\xi$$
$$\Rightarrow \xi k = \frac{v_1}{c} \ll 1$$
$$\Rightarrow \xi \ll \lambda$$

On retrouve bien l'approximation acoustique dans la démonstration de l'équation de d'Alembert.

II-3) Solutions en ondes planes

Par superposition d'ondes planes progressives sinusoïdales dans la direction $\vec{n}$, on peut former n'importe quelle onde plane progressive :

$$p_1(M,t) = \sum_i p_{0i}\cos\left(\omega_i t - \overrightarrow{k_i}.\vec{r} + \varphi_i\right)$$
$$= \sum_i p_{0i}\cos\left(\omega_i\left(t - \frac{\vec{n}.\vec{r}}{c}\right) + \varphi_i\right) = f\left(t - \frac{\vec{n}.\vec{r}}{c}\right)$$

D'où pour la vitesse :

$$\overrightarrow{v_1}(M,t) = \frac{1}{Z_a} f\left(t - \frac{\vec{n}.\vec{r}}{c}\right)\vec{n}$$

De même, dans la direction $-\vec{n}$:

$$\begin{cases} p_1(M,t) = g\left(t + \dfrac{\vec{n}.\vec{r}}{c}\right) \\ \overrightarrow{v_1}(M,t) = \dfrac{1}{Z_a} g\left(t + \dfrac{\vec{n}.\vec{r}}{c}\right)\vec{n} \end{cases}$$

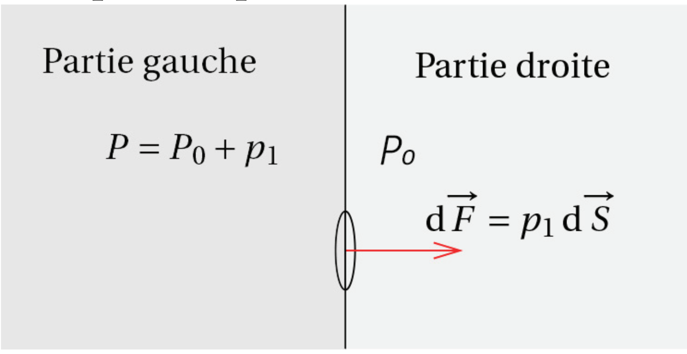
Dans le cas général, les solutions en ondes planes se mettent sous la forme :

$$p_1(M,t) = f\left(t - \frac{\vec{n}.\vec{r}}{c}\right) + g\left(t + \frac{\vec{n}.\vec{r}}{c}\right)$$

$$\overrightarrow{v_1}(M,t) = \frac{\vec{n}}{\mu_0 c}\left(f\left(t - \frac{\vec{n}.\vec{r}}{c}\right) - g\left(t + \frac{\vec{n}.\vec{r}}{c}\right)\right)$$

III – Aspects énergétiques

III-1) Puissance transportée par une onde sonore



La force exercée par la partie gauche du fluide sur la partie droite s'écrit :

$$d\vec{F} = p_1\overrightarrow{dS}$$

Par conséquent, la puissance de la force transmise à l'élément de surface s'écrit :

$$dP = d\vec{F}.\overrightarrow{v_1} = p_1\overrightarrow{dS}.\overrightarrow{v_1}$$

La puissance totale transmise à travers une surface S s'obtient par sommation :

$$P = \iint_S p_1\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{dS}$$

On pose le vecteur densité de courant énergétique $\vec{\Pi}$ aussi appelée vecteur de Poynting sonore :

$$\vec{\Pi} = p_1 \vec{v_1}$$

La puissance transportée par une onde sonore est le flux à travers une surface finie S du vecteur de Poynting sonore :

$$P = \iint_S \vec{\Pi}.\vec{dS} \text{ où } \underbrace{\vec{\Pi}}_{Wm^{-2}} = p_1 \vec{v_1}$$

La direction et le sens de $\vec{\Pi}$ expriment la direction et le sens de transmission de l'énergie sonore en M.

III-2) Énergies volumiques

En chaque région de l'espace atteinte par l'onde sonore, on s'attend à la présence d'énergie cinétique vu la mise en mouvement des tranches d'air, ainsi qu'à la présence d'énergie potentielle, liée aux compressions et détentes du fluide. L'existence même de cette énergie potentielle est loin d'être immédiate. Néanmoins, vu le caractère non dissipatif de la propagation d'une onde, il serait souhaitable que des échanges d'énergies cinétique et potentielle puissent s'effectuer sans perte entre des couches voisines.

On est donc amené à définir :

- La densité volumique d'énergie cinétique e_c telle que :

$$dE_c = \frac{1}{2} dm\, {v_1}^2 = \frac{1}{2} \mu d\tau\, {v_1}^2 = \frac{1}{2} \mu_0 d\tau\, {v_1}^2$$

à l'ordre le plus bas non nul (ordre 2). Ainsi, la densité volumique d'énergie cinétique a pour expression :

$$e_c = \frac{1}{2} \mu_0 {v_1}^2$$

- La densité volumique d'énergie potentielle e_p, telle que :

$$dE_p = e_p d\tau$$

est l'énergie potentielle contenue dans le volume dτ. Elle est liée à la compression/dilatation des tranches de fluide. On va démontrer qu'elle se met sous la forme :

$$e_p = \frac{1}{2}\chi_s p_1^2 = \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{\mu_0 c^2}$$

La densité d'énergie volumique s'écrit :

$$e(M,t) = \underbrace{\frac{1}{2}\mu_0 v_1^2}_{e_c} + \underbrace{\frac{1}{2}\chi_s p_1^2}_{e_p}$$

III-3) Bilan énergétique local

Recherchons les équations de couplage en $(p_1, \vec{v}_1)$:

$$\begin{cases} \mu_0 \dfrac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\, p_1 = \vec{0} \\ \dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 div\, \vec{v}_1 = 0 \Leftrightarrow \chi_s \dfrac{\partial p_1}{\partial t} + div\, \vec{v}_1 = 0 \end{cases}$$

Or :

$$div(p_1\vec{v_1}) = p_1 div\, \vec{v_1} + \vec{v_1}.\overrightarrow{grad}\, p_1$$

On essaye de faire apparaître les deux termes à l'aide des équations de couplage :

$$\begin{cases} \mu_0 \vec{v_1}.\dfrac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} + \vec{v_1}.\overrightarrow{grad}\, p_1 = \vec{0} \\ \chi_s p_1 \dfrac{\partial p_1}{\partial t} + p_1 div\, \vec{v}_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v_1}.\overrightarrow{grad}\, p_1 = -\mu_0 \vec{v_1}.\dfrac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} \\ p_1 div\, \vec{v}_1 = -\chi_s p_1 \dfrac{\partial p_1}{\partial t} \end{cases}$$

Par conséquent :

$$div(p_1\vec{v_1}) = -\mu_0 \vec{v_1}.\frac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} - \chi_s p_1 \frac{\partial p_1}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow div(\vec{\Pi}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu_0 v_1^2 + \frac{1}{2}\chi_s p_1^2\right)$$

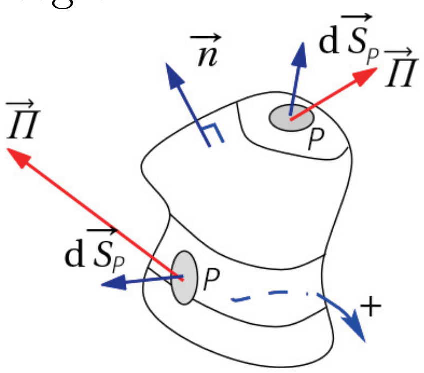
Le bilan d'énergie local s'écrit :

$$div(\vec{\Pi}) + \frac{\partial e}{\partial t} = 0 \text{ où } \begin{cases} \vec{\Pi} = p_1\vec{v_1} \\ e(M,t) = \underbrace{\frac{1}{2}\mu_0 v_1^2}_{e_c} + \underbrace{\frac{1}{2}\chi_s p_1^2}_{e_p} \end{cases}$$

L'onde sonore est caractérisée par :

- Une onde de vitesse traduisant un déplacement des particules de fluide, auquel nous pouvons associer une énergie cinétique volumique.
- Une onde de pression traduisant une compression ou une dilatation des particules de fluide ; nous pouvons donc associer une énergie potentielle qui correspond à un surcroît d'énergie interne de l'élément fluide en présence de l'onde sonore.

III-4) Bilan d'énergie intégral



Considérons un volume de fluide V quelconque fixe et indéformable. À l'instant t, il contient l'énergie :

$$\varepsilon(t) = \iiint_{M\epsilon V} e(M,t)d\tau_M$$

À l'instant t + dt, son énergie est devenue :

$$\varepsilon(t+dt) = \iiint_{M\epsilon V} e(M, t+dt) d\tau_M$$

Entre les instants t et t+dt, il a **perdu** l'énergie :

$$\delta\varepsilon_{V\to ext} = P_{V\to ext} dt = \oiint_{P\in S} \vec{\Pi}(\mathrm{P},\mathrm{t}).\overrightarrow{\mathrm{dS}_\mathrm{P}}\mathrm{dt}$$

où S est la surface qui délimite le volume V, avec le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{dS}_\mathrm{P}}$ orienté selon la normale sortante à S au point P.

La conservation de l'énergie du fluide contenu dans le volume V s'écrit :

$$\varepsilon(t+dt) - \varepsilon(t) = -\delta\varepsilon_{V\to ext}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} + P_{V\to ext} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\iiint_{M\epsilon V} e(M,t) d_{\tau M}\right) + \oiint_{P\in S} \vec{\Pi}(\mathrm{P},\mathrm{t}).\overrightarrow{\mathrm{dS}_\mathrm{P}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \iiint_{M\epsilon V} \frac{\partial e(M,t)}{\partial t} d_{\tau M} + \iiint_{M\epsilon V} div\vec{\Pi}(M,t) d\tau_M = 0$$

$$\Leftrightarrow \iiint_{M\epsilon V} \left(\frac{\partial e(M,t)}{\partial t} + div\vec{\Pi}(M,t)\right) = 0$$

Cette équation étant valable quel que soit le volume V, on retrouve l'équation locale de conservation de l'énergie.

III-5) Intensité sonore

a) Définitions

On définit l'intensité sonore comme la puissance moyenne transférée par l'onde sonore par unité de surface :

$$\underbrace{I}_{W.m^{-2}} =< \pi >=< p_1.v_1 >$$

L'intensité des sons naturels varie énormément : du bourdonnement d'un moustique au bruit d'un avion au décollage, l'oreille humaine est capable de détecter des sons dont l'intensité varie d'un facteur 10^{12} environ. D'autre part, quand l'intensité d'un son est multipliée par dix, l'oreille le perçoit comme un doublement du volume sonore : l'oreille est un récepteur logarithmique. C'est pourquoi l'intensité sonore s'exprime en bels ou en décibels. On définit alors l'intensité sonore en décibels (ou niveau sonore) par :

$$I_{dB} = 10 log\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ où } I_0 = 10^{-12} Wm^{-2}$$

L'intensité de référence correspond au seuil d'audibilité pour une fréquence voisine de 4000 Hz, c'est-à-dire à l'intensité minimale que peut détecter l'oreille humaine.

Pour une OPPH, $I =< p_1 v_1 >=< \frac{p_1^2}{Z_a} >$, l'intensité sonore en décibels peut donc également être définie à l'aide de la pression.

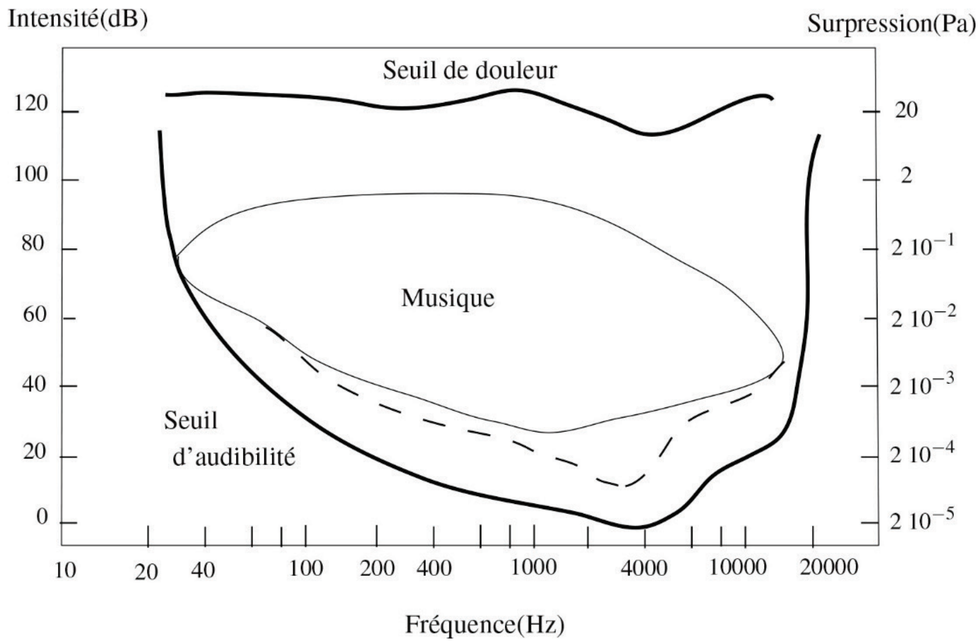
On définit l'intensité sonore en dB ou niveau sonore par :

$$\begin{cases} I_{dB} = 10 log\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ où } I_0 = 10^{-12} Wm^{-2} \\ I_{dB} = 20 log\left(\frac{p_{1,eff}}{p_{ref}}\right) \text{ où } p_{ref} = 2.10^{-5} Pa \end{cases}$$

b) Seuil d'audibilité

Les seuils d'audibilité et de la douleur de l'oreille humaine dépendent de la fréquence, comme le présente la figure ci-dessous.

Environ 1 % des gens peuvent entendre un son dont l'intensité se situe en dessous de la courbe en pointillés. La région située entre les deux courbes en traits plus fins correspond au niveau sonore courant de la musique.



c) Ordres de grandeur

Donnons quelques ordres de grandeur des différents paramètres acoustiques. On obtient les différentes valeurs à l'aide des formules suivantes :

$$\begin{cases} p_{1,eff} = p_{ref} 10^{\frac{I_{dB}}{20}} \\ v_{1,eff} = \dfrac{I}{p_{1,eff}} \\ \xi_{eff} = \dfrac{v_{1,eff}}{2\pi f} \end{cases}$$

Son	Seuil d'audition	Ronronnement d'un chat	Conversation normale (à 1m)	Cri (à 1m)	Boîte de nuit
I_{dB}	0	15	60	100	120
$I\ en\ Wm^{-2}$	10^{-12}	$3{,}2\ 10^{-11}$	10^{-6}	10^{-2}	1
$p_{1,eff}\ en\ Pa$	2.10^{-5}	10^{-4}	2.10^{-2}	2	20
$v_{1,eff}\ en\ ms^{-1}$	$4{,}5\ 10^{-8}$	$3{,}2\ .\ 10^{-7}$	$4{,}5\ 10^{-5}$	$5\ 10^{-3}$	$4{,}5\ 10^{-2}$
$\xi_{eff}\ en\ m$ (à 2kHz)	$3{,}6\ 10^{-12}$	$2{,}5\ 10^{-11}$	$3{,}6\ 10^{-9}$	$4\ 10^{-7}$	$3{,}6\ 10^{-6}$

On remarque que les déplacements auxquels est sensible le tympan sont vraiment très faibles, inférieurs à la taille caractéristique d'un atome.

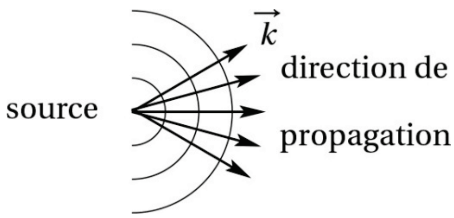
Dans le cas de N sources sonores incohérentes (sans interférences) émettant chacune une intensité I, l'intensité sonore en décibels est : $I_{dB,N} = 10\log\left(\frac{NI}{I_0}\right) = 10\ logN + I_{dB,1}$

Ainsi, si un moustique seul à 1m d'une personne produit un son près du seuil d'audibilité (0 dB), 100 moustiques produisent un son de 20 dB.

IV – Ondes sphériques

IV-1) Ondes sphériques harmonique

Une onde sonore (personne qui parle, sifflet, ...) n'est pas entendue dans une seule direction, mais dans plusieurs. L'onde émise dans plusieurs directions est un morceau d'onde sphérique.



La surpression $p_1(r,t)$ est solution de l'équation de d'Alembert :

$$\Delta p_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

Or le laplacien d'une fonction $p_1(r,t)$ en coordonnées sphériques donne :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rp_1)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2(rp_1)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(rp_1)}{\partial t^2}$$

La fonction rp_1 peut donc être cherchée sous la forme d'une onde harmonique :

$$rp_1 = A_0\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

$$\Rightarrow p_1(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

Une onde sphérique divergente est décrite par :

$$p_1(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0) \text{ où } \omega = kc$$

Une onde sphérique convergente est décrite par :

$$p_1(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t + kr + \varphi_0) \text{ où } \omega = kc$$

On peut aussi l'écrire en notation complexe :

$$\underline{p_1}(r,t) = \frac{A_0}{r}e^{i(\omega t - kr + \varphi_0)}$$

La puissance de l'onde est proportionnelle à $< \frac{p_1^2}{Z_a} >$ et à la surface de la sphère en $4\pi r^2$. Il est donc logique que la surpression varie en $\frac{1}{r}$.

IV-2) Solutions générales

L'équation d'Alembert :

$$\frac{\partial^2(rp_1)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(rp_1)}{\partial t^2}$$

Admet pour solution générale la superposition d'ondes sphériques qui peuvent se mettre sous la forme :

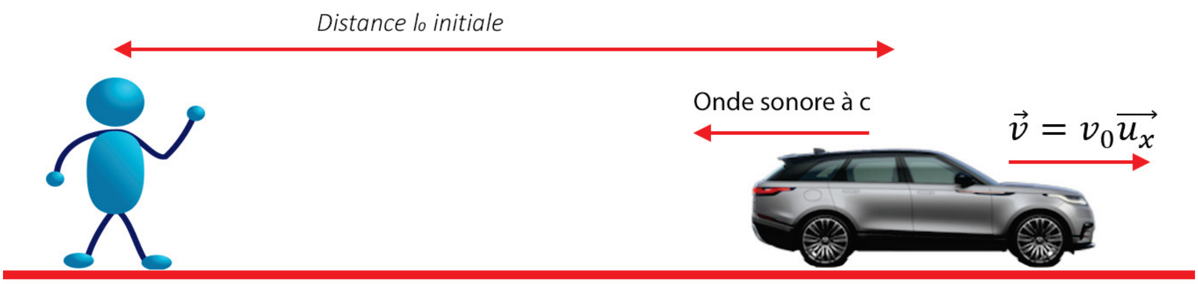
$$p_1(r,t) = \underbrace{\frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}}_{\text{Onde sphérique divergente}} + \underbrace{\frac{g\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r}}_{\text{Onde sphérique convergente}}$$

V - Effet Doppler longitudinal

V-1) Effet Doppler

La fréquence d'une onde (sonore) n'est pas un caractère absolu de l'onde. Elle dépend du mouvement relatif de l'émetteur et de l'observateur, et plus précisément de leur vitesse relative.

Une personne fixe écoute des bips émis périodiquement tous les T par un haut-parleur en mouvement à la vitesse $\vec{v} = v_0\overrightarrow{u_x}$. En fait, à cause de l'éloignement progressif du haut-parleur, la personne reçoit des bips séparés d'une durée T' supérieure à T.



Formalisons cette situation : la distance initiale entre la personne et le haut-parleur est notée l_0.

- Le premier bip est émis en $t_0 = 0$. Il est reçu en $t'_0 = \frac{l_0}{c}$ et ainsi de suite…

N° du Bip	Instant d'émission	Distance	Instant de réception
Bip 0	$t_0 = 0$	l_0	$t'_0 = \frac{l_0}{c}$
Bip 1	$t_1 = T$	$l_1 = l_0 + v_0 T$	$t'_1 = T + \frac{l_1}{c}$
…Bip n-1	$t_{n-1} = (n-1)T$	$l_{n-1} = l_0 + v_0(n-1)T$	$t'_{n-1} = (n-1)T + \frac{l_{n-1}}{c}$
Bip n	$t_{n-1} = nT$	$l_n = l_0 + v_0 nT$	$t'_n = nT + \frac{l_n}{c}$

On déduit la période T' perçue par l'observateur :

$$T' = t'_{n+1} - t'_n = T + \frac{v_0 T}{c} = T\left(1 + \frac{v_0}{c}\right)$$

ainsi que la fréquence mesurée par l'observateur :

$$f' = \frac{f}{1 + \frac{v_0}{c}}$$

La fréquence f' mesurée par le détecteur est reliée à la fréquence de l'émetteur par :

$$f' = \frac{f}{1 + \frac{v_0}{c}}$$

- Si la source s'éloigne $v_0 > 0 \Rightarrow f' < f$
- Si la source se rapproche : $v_0 < 0 \Rightarrow f' > f$

Ce phénomène peut être observé lors du passage d'un véhicule muni d'une sirène (ambulance par exemple), voire même avec le bruit du moteur. Quand le véhicule s'approche, la période diminue et le son est plus aigu que celui originel. Dès que le véhicule passe devant la personne, il s'en éloigne, l'effet Doppler s'inverse et le son devient plus grave.

Les radars routiers utilisent l'effet Doppler, mais avec des ondes électromagnétiques.

V-2) Détection synchrone (TP)

Les variations de fréquences mises en jeu dans l'effet Doppler sont faibles. Or l'effet Doppler est utilisé pour mesurer la vitesse de la source. Comment faire pour mesurer une si faible différence de fréquence ?

Nous disposons du signal émis, de fréquence f et du signal reçu, de fréquence $f' = f + \Delta f$.

On utilise alors un multiplieur en sortie duquel on récupère un signal proportionnel au produit des deux signaux mis en entrée. Le signal de sortie comporte donc deux composantes :

- L'une de fréquence $f + f' \sim 2f$
- L'autre de fréquence $f' - f = \Delta f$

Il ne reste plus qu'à filtrer ce signal grâce à un filtre passe-bas qui ne laisse passer que la composante de plus basse fréquence. La mesure de Δf nous permet d'accéder à la vitesse v de l'émetteur. Ce procédé porte le nom de détection synchrone.