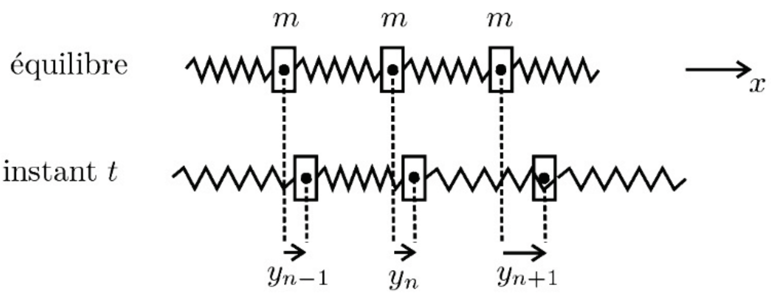
OD1 – Equation d'Alembert

A – Travaux dirigés

OD11 – Tige solide et module d'Young

On étudie la propagation de vibrations longitudinales dans une tige cylindrique d'axe Ox. On appelle μ la masse volumique, S la section et L la longueur du cylindre. On modélise le réseau cristallin par une chaîne infinie d'oscillateurs harmoniques parallèles à Ox. Les atomes sont modélisés par des masses ponctuelles m reliées entre elles par des ressorts sans masse et de constante de raideur k. A l'équilibre, toutes les masses sont équidistantes de d appelé pas du réseau. Un atome d'indice n a pour abscisse x=nd à l'équilibre. On note y_n son élongation à un instant t.



1°) Écrire l'équation différentielle reliant y_n, y_{n-1} et y_{n+1}.
2°) On étudie le passage du discret au continu en supposant que l'élongation varie très peu d'un atome à un autre atome voisin. On définit la fonction y(x,t) par $y_n(t) = y(nd, t)$. Montrer que si $d \to 0$, l'équation différentielle précédente peut se mettre sous la forme d'une équation de d'Alembert. Exprimer la célérité c en fonction de k,d et m.
3°) Si on applique lentement une force F aux deux extrémités du cylindre, on a un allongement δL du cylindre. Le module d'Young E est défini par : $\frac{F}{S} = E\frac{\delta L}{L}$. Exprimer E en fonction de μ, k, d et m. En déduire la célérité des ondes en fonction de E et μ.
4°) Une onde sonore plane progressive harmonique se propage dans la tige étudiée précédemment. Le module d'Young vaut $E = 21 \times 10^{10}\, Pa$ et la masse volumique $\mu = 7{,}9 \times 10^3\, kg.m^{-3}$. Calculer la célérité des ondes c. La condition pour pouvoir passer du discret au continu est-elle vérifiée ?

Rép : 1°) $m\,\ddot{y}_n = -k(y_n - y_{n-1}) + k(y_{n+1} - y_n)$ 2°) $c = \sqrt{\frac{kd^2}{m}}$ 3°) $E = \frac{k\mu d^2}{m}$ 4°) $c = 5200\ ms^{-1}$

OD12 - Corde avec frottement fluide

On s'intéresse à une corde horizontale de masse linéique μ, tendue sous la tension T_o. Chaque point de la corde vibre verticalement, et on note y(x,t) l'altitude d'un point par rapport à l'axe Ox. Un élément dx de la corde subit la force de frottement fluide :

$$\overrightarrow{df} = -\lambda\,\frac{\partial y}{\partial t}\,dx\,\overrightarrow{u_y}$$

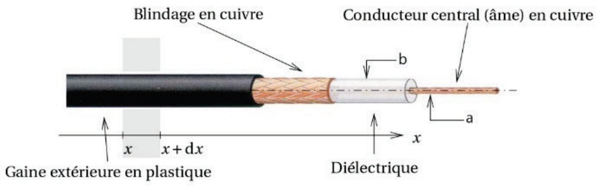
On posera : $v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ et $\alpha = \frac{\lambda}{\mu\omega}$

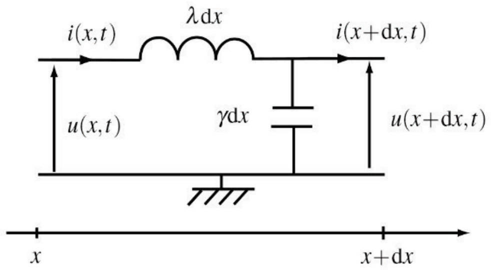
a) Établir l'équation aux dérivées partielles satisfaite par y(x,t) dans le cadre du modèle classique, en ajoutant simplement le frottement fluide.
b) Une onde plane progressive $\underline{y}\,(x,t) = \underline{A}e^{j(\underline{k}x-\omega t)}$, où ω est la pulsation, se propage sur la corde selon les x croissants. Quelles sont alors les valeurs possibles de k, dans la limite des faibles frottements ?
c) Commenter la forme de l'onde y(x,t).

Rép : a) $\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \lambda\frac{dy}{dt}$ b) $k = \pm\frac{\omega}{v}(1+\frac{j\alpha}{2})$ c) $y(x,t) = A\cos\left(\frac{\omega}{v}x - \omega t\right)e^{-\frac{\alpha\omega x}{2v}}$

OD13 – Câble coaxial

Les câbles coaxiaux sont couramment utilisés dans la vie de tous les jours (câble d'antenne de télévision par exemple). La structure d'un câble coaxial est donnée sur la figure :





L'âme est un cylindre conducteur (en cuivre), le conducteur extérieur est constitué d'une tresse de fils de cuivre très fins, ces deux conducteurs étant séparés par un isolant. La tresse extérieure est reliée à la masse du réseau et l'âme « reçoit » le signal.

Si les conducteurs et l'isolant sont parfaits, il n'y a aucune dissipation d'énergie. Un tronçon de câble compris entre les abscisses x et x+dx peut être modélisé par le schéma de la figure de droite, dit « modèle des constantes réparties ». Ce morceau de câble possède une inductance γdx et une capacité λdx : γ et λ sont donc respectivement l'inductance linéique et la capacité linéique du câble. On suppose dx petit devant la distance caractéristique de variation de u(x,t) et i(x,t) de telle sorte que l'on puisse appliquer les lois des mailles et les lois des nœuds sur la portion de câble représentée sur la figure.

1°) Établir les équations aux dérivées partielles vérifiées par i(x,t) et par u(x,t).

2°) Quelle est l'expression de la célérité c des ondes dans le câble ?

3°) On cherche i(x,t) sous la forme d'une onde plane progressive se propageant dans le sens des x positifs. En déduire l'expression de u(x,t) en fonction de i(x,t) et de la grandeur $Z_c = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}$, appelée impédance caractéristique du câble. Qu'en est-il pour une onde se propageant dans l'autre sens ?

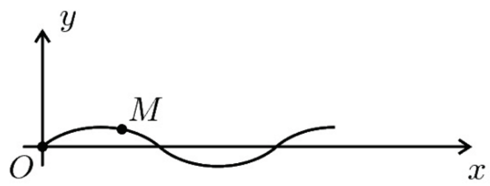
4°) Le câble s'étend de x = 0 à x = L. On branche en x=0 un générateur de tension délivrant la fem $e(t) = E_0\cos(\omega t)$. L'extrémité x = L est ouverte. Déterminer i(x, t) et u(x,t) en régime sinusoïdal forcé. Définir et calculer l'impédance d'entrée du câble. Expliquez pourquoi, quand on fait varier la fréquence de la tension d'alimentation du câble, on observe que la tension à l'entrée $x = 0$ du câble, visualisée à l'aide d'un oscilloscope, présente des maximas d'amplitude pour certaines fréquences f_n régulièrement espacées.

Rép : 1°) $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \frac{1}{\lambda\gamma}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0$ 2°) $c = \sqrt{\frac{1}{\lambda\gamma}}$ 3°) $Z_c = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}$ 4°) Dispositif analogue à la corde de Melde

B – Exercices supplémentaires

OD14 – Corde de Melde

On considère une corde vibrante de masse linéique μ, de longueur L sans élasticité et sans torsion, se déformant faiblement au voisinage d'un axe Ox. On néglige les effets de la pesanteur.



1°) Établir l'équation de propagation de d'Alembert sachant que le déplacement y(x,t) est un infiniment petit d'ordre un, ainsi que l'angle $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ que fait la corde au point d'abscisse x avec l'axe Ox.

2°) La corde est tendue par le poids d'une masse m maintenue fixée sur la poulie en x = 0. Un dispositif impose le mouvement $y(L,t) = b\cos(\omega t)$ avec b « L. On cherche y(x,t) de la forme $f(x)cos\,(\omega t)$. On suppose que $\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \neq 0$. Définir les nœuds et ventres de vibration.

3°) Montrer que pour certaines valeurs de ω, il y a résonance et que les pulsations possibles se mettent sous la forme $\omega_n = n\omega_1$. Représenter les noeuds et les ventres de vibration pour n = 1 et n = 2.

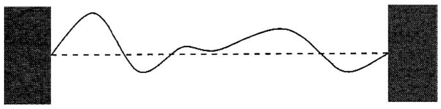
Rép : 1°) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ où $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ 2°) $y(x,t) = \frac{b}{\sin(kL)}\sin(kx)\cos(\omega t)$ 3°) $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$

OD15 – Décomposition en série de Fourier

De nombreux problèmes (corde vibrante, cavité électromagnétique, laser) conduisent à la résolution d'un problème à une dimension spatiale et une dimension temporelle, dans lequel l'inconnue est un signal u(x, t) vérifiant simultanément plusieurs conditions :

- Une équation locale de propagation, de type équation de d'Alembert :
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
- Des conditions aux limites du domaine. On considère ici une corde (une cavité à une dimension) délimitée par les plans d'abscisses x = 0 et x = L. On envisage le cas où les conditions aux limites se traduisent par la nullité à chaque instant du signal sur ces limites :
$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$
- Des conditions initiales. À l'instant pris comme origine des temps, on suppose connues les propriétés du signal, notamment sa valeur sur l'intervalle [0,L] et celles de sa dérivée temporelle. Pour fixer les idées, nous proposerons :
$$u(x,0) = u_o(x) \; et \; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

Ce qui signifie qu'à l'instant initial, la corde (l'onde dans la cavité) possède une forme arbitraire et est immobile.



Nous proposons de déterminer la solution générale de ce problème, en mettant en œuvre l'outil de la décomposition en série de Fourier.

a) Quel type de solution à l'équation de d'Alembert doit-on plutôt envisager : ondes progressives ou ondes stationnaires ?
b) Quelles contraintes imposent les conditions aux limites (8) ? Écrire alors la forme de la solution correspondante $u_n(x, t)$, où n est un entier.
c) Représenter l'allure de $u_n(x, t)$ à un instant donné pour n = 1, 2 et 3.
d) Construire à partir des $u_n(x, t)$ une solution plus générale. Interpréter ce résultat.
e) Quelles simplifications apporte la seconde condition initiale $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$?
f) Déterminer alors exactement la fonction u (x, t) qui vérifie les deux conditions initiales. On pourra faire intervenir une fonction 2L-périodique qui coïncide avec l'allure de la corde sur [0, L], et qui soit impaire.
g) Pour une guitare par exemple, la forme initiale de la corde a-t-elle une influence sur le son entendu ?

Rép : a) $u(x,t) = D\,sin(\omega t + \varphi)\sin(kx + \psi)$ b) $u_n(x,t) = D_n\,sin\left(\frac{n\pi v}{L}t + \varphi_n\right)\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ c) … d) $u(x,t) = \sum_1^\infty u_n(x,t)$ e) $\cos(\varphi_n) = 0$
f) … g) La forme initiale de la courbe impose donc le poids des harmoniques dans le spectre de la corde. Dans le cadre des instruments de musique, la manière d'exciter la corde détermine donc le spectre associé à une même note. Une note n'est pas entendue pure, mais superposée à ses harmoniques.

OD16 - Vibrations longitudinales d'une lame de céramique

On étudie les petits mouvements de déformation le long de l'axe horizontal Ox d'une lame de céramique de section S (perpendiculairement à l'axe Ox) et de masse volumique μ_0. À l'équilibre, la pression est uniforme dans la lame, égale à P_0. À l'instant t, un plan d'abscisse x au repos se trouve à l'abscisse x+y(x,t), s*a* vitesse vibratoire est u(x,t). On néglige tout effet lié à la pesanteur. Dans le domaine d'élasticité du matériau, la force de traction T permettant à la lame de section S et de longueur L de s'allonger de ΔL est donnée par la loi de Hooke : $T = ES\frac{\Delta L}{L}$ où E est le module de Young du matériau.

1°) Montrer qu'a l'abscisse x, à l'instant t, la force de traction que la partie droite de la lame exerce sur la partie gauche est : $T(x,t) = ES\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$

2°) Écrire l'équation du mouvement d'une tranche de lame située au repos entre les plans d'abscisses x et x + dx. En déduire que la déformation y(x,t) vérifie une équation de d'Alembert à une dimension. Quelle est la célérité c des ondes ?

Application numérique :

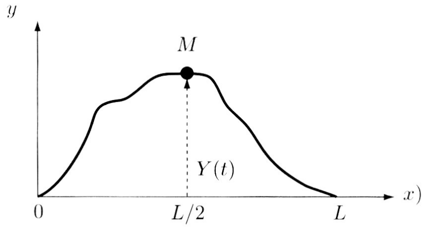
Calculer c pour une lame de masse volumique $\mu_0 = 3400\,kg.m^{-3}$, de module de Young $E = 8{,}0.10^{10}\,N.m^{-2}$.

3°) Donner sans démonstration la forme des solutions de cette équation. Interpréter chaque terme.

Rép : 1°) $\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \frac{\Delta L}{L}$… 2°) c = 4851 m.s^{-1} 3°) $y(x,t) = f\,(x - ct) + g(x + ct)$

OD17 - Corde plombée

La corde représentée ci-dessous est plombée en son milieu M par une masse m. On néglige la pesanteur, et la corde, fixée à ses deux extrémités, est tendue avec la tension T_0 quand l'ensemble est au repos.



1°) L'élongation dans les deux parties de la corde s'écrit :

- pour $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$, $y(x,t) = y_1(x,t) = A_1 sin(kx)cos(\omega t)$
- pour $\frac{L}{2} \leq x \leq L$, $y(x,t) = y_2(x,t) = A_2 sin(k(L-x))cos(\omega t)$

avec $\omega = kc.$

En déduire le système d'équation que vérifie les amplitudes A_1 et A_2 :

$$\begin{cases} (A_1 - A_2)sin\left(k\dfrac{L}{2}\right) = 0 \\ mA_1\omega^2 \sin(k\dfrac{L}{2}) = kT_0(A_2 + A_1)cos(k\dfrac{L}{2}) \end{cases}$$

2°) Le système d'équation présente plusieurs solutions que nous allons étudier :

a) Si : $kL = 2n\pi$, conclure sur la position de la masse

b) Si : $kL \neq 2n\pi$, déterminer en particulier les pulsations propres de la corde et étudier les cas limites m$\ll \mu L$ et $m \gg \mu L$.

Rép : 1°) $y_1\left(\frac{L}{2},t\right) = y_2\left(\frac{L}{2},t\right)$ et $m\frac{d^2Y}{dt^2}\overrightarrow{u_y} = T_0\frac{\partial y_2}{\partial x}\left(\frac{L}{2},t\right) - T_0\frac{\partial y_1}{\partial x}\left(\frac{L}{2},t\right)$ 2a) $A_1 = -A_2$ 2b) $A_1 = A_2$ et $cotan(\frac{\omega L}{2c}) = \frac{\omega L}{2c} * \frac{m}{\mu L}$