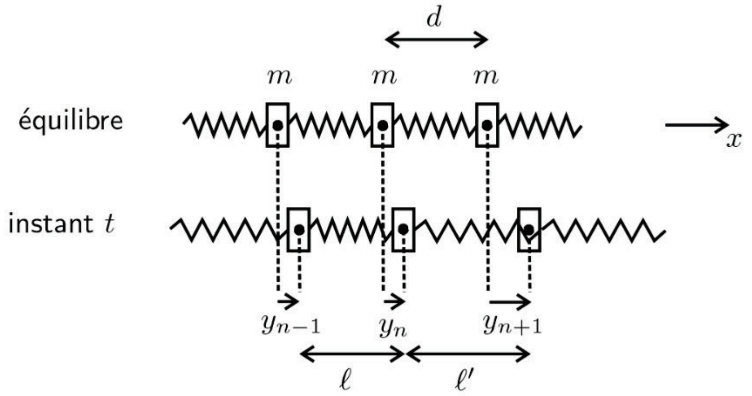
OD1 – Equation d'Alembert

A – Travaux dirigés

OD11 – Tige solide et module d'Young

1. Système : masse m d'indice n.
Référentiel : $\Re = \left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, t\right)$ terrestre galiléen.



Bilan des forces qui s'exercent sur la masse m d'indice n :

- Force exercée par le ressort située entre la masse $(n-1)$ et la masse n : $-k(\ell - d)\vec{u}_x$. On a un signe $-$ puisque la force est dirigée vers $-\vec{u}_x$ si le ressort est étiré. La longueur du ressort est $\ell = d + y_n - y_{n-1}$. L'allongement est donc : $\ell - d = y_n - y_{n-1}$.
- Force exercée par le ressort située entre la masse n et la masse $n+1$: $+k(\ell' - d)\vec{u}_x$. On a un signe $+$ puisque la force est dirigée vers $\vec{u}_x$ si le ressort est étiré. La longueur du ressort est $\ell' = d + y_{n+1} - y_n$. L'allongement est donc : $\ell' - d = y_{n+1} - y_n$.

Théorème de la quantité de mouvement :

$$m\ddot{y}_n = -k\left(y_n - y_{n-1}\right) + k\left(y_{n+1} - y_n\right)$$

2. On pose $y_n(t) = y(nd,t)$
On applique la formule de Taylor à l'ordre 2 :

$$y_{n+1}(t) = y(nd + d,t) = y(nd,t) + d\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{nd} + \frac{d^2}{2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{nd}$$

$$y_{n-1}(t) = y(nd - d,t) = y(nd,t) - d\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{nd} + \frac{d^2}{2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{nd}$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$m\frac{\partial^2 y(nd,t)}{\partial t^2} = -k\left(d\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{nd} - \frac{d^2}{2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{nd}\right) + k\left(d\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{nd} + \frac{d^2}{2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{nd}\right)$$

On obtient alors :

$$m\frac{\partial^2 y(nd,t)}{\partial t^2} = kd^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{nd}$$

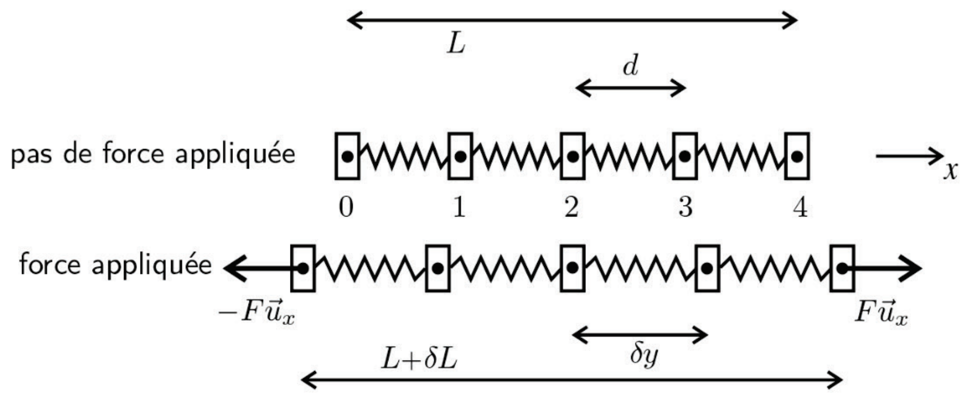
Comme nd est l'abscisse x de l'atome d'indice n, on en déduit finalement :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{kd^2}{m}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

C'est une équation de propagation appelée équation de d'Alembert à une dimension.
La célérité c est définie par :

$$c = \sqrt{\frac{kd^2}{m}}$$

3. Lorsqu'il y n'a pas de force appliquée aux extrémités du solide, la distance entre deux atomes consécutifs est d à l'équilibre.



Lorsqu'on applique lentement une force F aux deux extrémités du solide, la distance entre deux atomes consécutifs est $d + \delta y$ à l'équilibre.
On appelle N le nombre de ressorts. Sur le schéma $N = 4$. En pratique, le nombre d'atomes N est très supérieur à 1. L'ordre de grandeur est le nombre d'Avogadro.
L'équilibre de la masse d'indice 0 et de la masse d'indice N s'écrit : $F = k\delta y$.

La contrainte est : $\sigma = \dfrac{F}{S} = \dfrac{k}{S}\delta y$.
L'allongement total du solide est $\delta L = N\delta y$. On en déduit :

$$\frac{F}{S} = \frac{k}{SN}\delta L$$

Pour exprimer E en fonction de μ, k, d et m, il faut éliminer S et N.
On a deux équations :

- La masse totale du solide est : $\mu SL = (N+1)m \approx Nm$. On a donc :

$$\frac{S}{N} = \frac{m}{\mu L} \text{ (éq.1)}$$

- La longueur totale du solide est : $L = Nd$. On a donc :

$$N^2 = \frac{L^2}{d^2} \text{ (éq. 2)}$$

En faisant le produit des équations (1) et (2), on a :

$$SN = \frac{mL}{\mu d^2}$$

On en déduit la contrainte :

$$\frac{F}{S} = \frac{k\mu d^2}{m}\frac{\delta L}{L} = E\frac{\delta L}{L}$$

Le module d'Young est :

$$E = \frac{k\mu d^2}{m}$$

La célérité des ondes dans le solide est :

$$c = \sqrt{\frac{kd^2}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

4. La célérité des ondes dans l'acier vaut :

$$c = 5{,}2 \times 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

Les ondes sonores ont des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz. Pour pouvoir passer du discret au continu, il faut que la distance interatomique soit très petite devant la longueur d'onde λ. La condition la plus forte est pour la fréquence de 20 kHz. La longueur d'onde vaut alors :

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} = 26\,\text{cm}$$

Cette condition est toujours vérifiée puisque la distance entre deux atomes est de l'ordre de 10^{-10} m.

OD12 – Corde avec frottement fluide

a) On considère la relation fondamentale de la dynamique appliquée à un morceau de corde entre x et $x + \mathrm{d}x$:

$$\mu \mathrm{d}x \vec{a} = \vec{T}(x + \mathrm{d}x, t) - \vec{T}(x, t) + \mu \mathrm{d}x \vec{g} - \lambda \frac{\partial y}{\partial t} \mathrm{d}x \vec{u}_y.$$

On néglige le poids. En projection sur $\vec{u}_x$, on obtient $T_x = T_0 \cos\alpha = \text{cte}$. Pour des ébranlements de faible amplitude, $\alpha \ll 1$ et $T_0 \simeq \text{cte}$. En projection sur $\vec{u}_y$,

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x} - \lambda \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Comme $T_y \simeq T_0 \alpha \simeq T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$, on conclut :

$$\boxed{\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial y}{\partial t}}.$$

Il s'agit d'une équation de d'Alembert, avec un terme supplémentaire (qui s'annule lorsque les frottements disparaissent, soit pour $\lambda = 0$).

b) On remplace la forme proposée dans l'équation de propagation :

$$-\mu \omega^2 \underline{y} = -T_0 k^2 \underline{y} - \lambda(-j\omega)\underline{y}$$

soit :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} + j\omega \frac{\lambda}{T_0} = \frac{\omega^2}{v^2}\left(1 + j\lambda \frac{v^2}{T_0 \omega}\right).$$

On déduit dans la limite de faibles frottements :

$$\boxed{k \simeq \pm \frac{\omega}{v}\left(1 + j\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

c) Il faut alors remplacer l'expression de k dans celle de l'onde. On considère tout d'abord la solution avec le signe plus :

$$\underline{y}(x, t) = A \exp\left[j\left(\frac{\omega}{v}\left(1 + j\frac{\alpha}{2}\right)x\right) - \omega t\right].$$

On repasse à la partie réelle :

$$\boxed{y(x, t) = A \cos\left(\frac{\omega}{v} x - \omega t\right) \exp\left(-\frac{\alpha \omega}{2v} x\right)}.$$

Il s'agit d'une onde se propageant selon les x croissants (terme en cosinus) mais dont l'amplitude décroît au cours de la propagation, suite au frottement fluide.

Pour l'autre solution,

$$\boxed{y(x, t) = A \cos\left(-\frac{\omega}{v} x - \omega t\right) \exp\left(\frac{\alpha \omega}{2v} x\right)}.$$

Il s'agit d'une onde se propageant selon les x décroissants (terme en cosinus) et dont l'amplitude décroît au cours de la propagation (l'exponentielle diminue lorsque x diminue). Le sens de propagation n'est donc pas celui voulu.

OD13 – Câble coaxial

1. La loi des mailles s'écrit :

$$u(x,t) = \lambda \mathrm{d}x \frac{\partial i}{\partial t}(x,t) + u(x+\mathrm{d}x,t)\,.$$

La loi des noeuds donne :

$$i(x,t) = \gamma \mathrm{d}x \frac{\partial u}{\partial t}(x+\mathrm{d}x,t) + i(x+\mathrm{d}x,t)\,.$$

Au premier ordre en dx, ces deux équations s'écrivent :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \lambda \dfrac{\partial i}{\partial t}(x,t)\,, \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x}(x,t) = \gamma \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,. \end{cases}$$

On les découple en dérivant la première par rapport à t et la deuxième par rapport à x. L'équation vérifiée par $i(x,t)$ est :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x,t) = \frac{1}{\lambda\gamma}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,t)\,.$$

La tension $u(x,t)$ vérifie la même équation.

2. $c = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda\gamma}}$.

3. On cherche l'onde de courant sous la forme $i(x,t) = I_0\cos(\omega t - kx)$. L'onde de tension s'en déduit par une des deux équations de couplage, par exemple $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\lambda\dfrac{\partial i}{\partial t}(x,t)$, d'où $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \lambda\,\omega I_0\cos(\omega t - kx)$. On en déduit :

$$u(x,t) = c\lambda I_0\cos(\omega t - kx) + f(t)\,,$$

la fonction $f(t)$ est choisie nulle puisqu'elle ne correspond pas à une onde. D'où :

$$u(x,t) = Z_C i(x,t) \quad \text{où} \quad Z_C = c\lambda = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}\,.$$

Si l'onde se propage dans l'autre sens ($i(x,t) = I_0\cos(\omega t + kx)$), on obtient $u(x,t) = -Z_C i(x,t)$.

4. Dans les deux cas, on cherche les solutions en régime sinusoïdal forcé, on peut donc écrire i et u sous la forme d'ondes planes progressives harmoniques en notation complexe :

$$\underline{i}(x,t) = \underline{I}_1\exp\left(j(\omega t - kx)\right) + \underline{I}_2\exp\left(j(\omega t + kx)\right)\,,$$

et

$$\underline{u}(x,t) = Z_C\left(\underline{I}_1\exp\left(j(\omega t - kx)\right) - \underline{I}_2\exp\left(j(\omega t + kx)\right)\right)\,.$$

a. Les conditions aux limites sont :
- en $x = 0$: $u(0,t) = E_0\cos\omega t$,
- en $x = L$: $i(L,t) = 0$.

soit :

$$E_0 = Z_C\,(\underline{I}_1 - \underline{I}_2) \quad \text{et} \quad 0 = \underline{I}_1 \exp(-jkL) + \underline{I}_2 \exp(jkL)\,.$$

D'où $\underline{I}_1 = \dfrac{E_0}{2Z_C \cos kL} \exp(jkL)$ et $\underline{I}_2 = -\dfrac{E_0}{2Z_C \cos(kL)} \exp(-jkL)$.

Finalement :

$$\underline{i}(x,t) = -j\frac{E_0}{Z_C \cos(kL)} \sin\big(k(L-x)\big) \exp(j\omega t)\,,$$

$$\text{et} \quad \underline{u}(x,t) = \frac{E_0}{\cos(kL)} \cos\big(k(L-x)\big) \exp(j\omega t)\,,$$

ou encore :

$$i(x,t) = -\frac{E_0}{Z_C} \frac{\sin\big(k(L-x)\big)}{\cos(kL)} \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad u(x,t) = E_0 \frac{\cos\big(k(L-x)\big)}{\cos(kL)} \cos(\omega t)\,.$$

On obtient des ondes stationnaires ce qui est normal puisque le milieu est limité aux deux extrémités.

L'impédance d'entrée du câble est $\underline{Z}(0) = \dfrac{\underline{U}(0,t)}{\underline{I}(0,t)} = Z_C \operatorname{cotan}(kL)$. Quand $kL = n\pi$, $\underline{Z}(0)$ est infinie : la tension à l'entrée du câble présente des résonances pour les fréquences $f_n = n\dfrac{c}{2L}$.

Ce dispositif est analogue à celui de la corde de Melde.

B – Exercices supplémentaires

OD14 – Corde de Melde

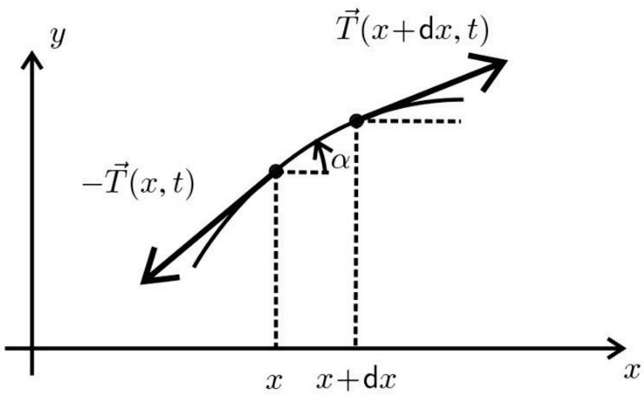
1. À l'instant t, la corde subit un déplacement transversal. On suppose que la corde se déforme faiblement au voisinage de l'axe Ox. On fera donc un développement limité au premier ordre. On écrira par exemple : $\tan\alpha = \alpha$; $\cos\alpha = 1$...

Système : élément de corde compris entre x et $x + \mathrm{d}x$. On a $\mathrm{d}x = \mathrm{d}l\cos\alpha$. On fait un développement limité au premier ordre : $\cos\alpha = 1$, d'où $\mathrm{d}x = \mathrm{d}l$.

Référentiel : $\Re = \left(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t\right)$ terrestre galiléen.

Bilan des actions extérieures :

- poids négligeable.
- la partie droite exerce une force $\vec{T}(x + \mathrm{d}x, t)$ tangente à la corde en $x + \mathrm{d}x$.
- la partie gauche exerce une force $-\vec{T}(x,t)$ tangente à la corde en x.



Théorème de la quantité de mouvement :

$$\mu \mathrm{d}l\vec{a} = -\vec{T}(x,t) + \vec{T}(x + \mathrm{d}x, t)$$

La corde se déforme faiblement au voisinage de l'axe Ox. L'accélération de la corde est uniquement suivant $\vec{u}_y$. Les angles sont fortement augmentés sur la figure pour la clarté de la représentation.

On désigne par T_x et T_y les projections de $\vec{T}$ sur $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$. On projette le théorème de la quantité de mouvement sur $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$:

$$\left|\begin{array}{l} 0 = -T_x(x,t) + T_x(x + \mathrm{d}x, t) \\ \mu \mathrm{d}x \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T_y(x,t) + T_y(x + \mathrm{d}x, t) \end{array}\right.$$

On en déduit que :

$$\left|\begin{array}{l} 0 = \dfrac{\partial T_x}{\partial x}\mathrm{d}x \\ \mu \mathrm{d}x \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial T_y}{\partial x}\mathrm{d}x \end{array}\right.$$

On en déduit de la première équation que T_x est une constante. Au premier ordre, on a : $T_x = T\cos\alpha = T = cte$.

Comme $\vec{T}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ sont colinéaires, on a :

$$\tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{T_y}{T_x}$$

On en déduit :

$$\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{T_y}{T}$$

D'où

$$T_y = T\frac{\partial y}{\partial x}$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial T_y}{\partial x} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Il reste à remplacer dans le théorème de la quantité de mouvement :

$$\mu \mathrm{d}x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

On obtient l'équation de propagation, appelée ici équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

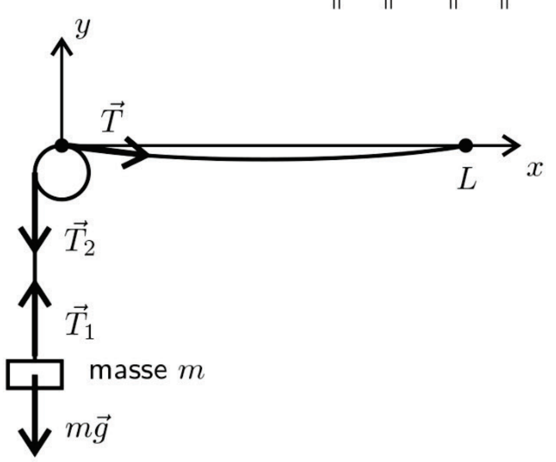
On définit la célérité de l'onde :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

L'onde se propage sur l'axe Ox et le mouvement d'un point de la corde est dans une direction orthogonale à Ox. On dit que **l'onde est transverse**.

2. La poulie et la masse m sont immobiles. La masse m est en équilibre, donc $\vec{T}_1 + m\vec{g} = \vec{0}$. La tension du fil idéal et tendu est uniforme le long de celui-ci. On a donc $\vec{T}_2 = -\vec{T}_1$. On a vu dans la question précédente que $T_x = T = constante$. Comme la poulie est immobile, on en déduit que :

$$T = \left\|\vec{T}_2\right\| = \left\|\vec{T}_1\right\| = mg$$



On cherche $y(x,t)$ de la forme $f(x)\cos\omega t$. Les variables x et t sont découplées.
On dit que l'on a une **onde stationnaire**.
Pour trouver $f(x)$, il suffit de remplacer $y(x,t)$ dans l'équation de d'Alembert :

$$f''(x)\cos(\omega t) = \frac{1}{c^2}\left(-\omega^2\right) f(x)\cos(\omega t)$$

Après simplification , on a :

$$f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0$$

On définit k le module du vecteur d'onde, appelé module d'onde :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

On en déduit directement la solution de cette équation différentielle :

$$f(x) = A\cos kx + B\sin kx$$

On obtient donc :

$$y(x,t) = (A\cos kx + B\sin kx)\cos(\omega t)$$

On a deux fonctions périodiques :

- périodicité temporelle de période T. La pulsation ω est définie par : $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$.
- périodicité spatiale de période λ. Le vecteur d'onde k est défini par : $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma$. On appelle σ le nombre d'onde ou fréquence spatiale.

Deux conditions aux limites

- $y(0,t) = 0 = A\cos\omega t$. On en déduit que $A = 0$.
- $y(L,t) = b\cos\omega t = B\sin kL\cos\omega t$. D'où : $B = \dfrac{b}{\sin kL}$.

On a donc :

$$y(x,t) = \frac{b}{\sin kL}\sin kx\cos(\omega t)$$

On a des noeuds et des ventres de vibration :

Noeuds de vibration : L'amplitude de la vibration est nulle en un noeud de vibration. On n'a pas de mouvement de la corde. Pour déterminer les abscisses correspondantes, il suffit de résoudre : $\sin kx = 0$, soit :

$$kx = n\pi$$

avec n entier. On obtient :

$$x_n = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = n\frac{\lambda}{2}$$

La distance entre deux noeuds successifs est $\dfrac{\lambda}{2}$.

Ventres de vibration : L'amplitude de la vibration est maximale. En un point d'un ventre de vibration, on a :

$$\sin kx = \pm 1$$

D'où :

$$kx = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

avec m entier. On obtient alors :

$$x_m = \frac{\pi}{2k} + m\frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{2\frac{2\pi}{\lambda}} + m\frac{\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{4} + m\frac{\lambda}{2}$$

La distance entre deux ventres successifs est $\frac{\lambda}{2}$.

La distance entre un noeud et un ventre de vibration consécutifs est $\frac{\lambda}{4}$.

3. Si $\sin kL = \sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) \to 0$, l'amplitude tend vers l'infini. On dit que l'on a résonance pour certaines valeurs de k, donc certaines valeurs de la pulsation.

En pratique, l'amplitude reste finie à cause des frottements. Le développement limité effectué précédemment n'est plus valable.
On a alors :

$$kL = \frac{\omega}{c}L = n\pi$$

avec n entier. On a résonance pour les pulsations suivantes :

$$\omega_n = n\frac{\pi c}{L}$$

Pour $x = L$, on a $y = b\cos\omega t$. C'est pratiquement un noeud de vibration puisque l'amplitude b est très faible devant l'amplitude des ventres de vibration.

Étude du cas où $n = 1$ – Excitation du premier mode propre

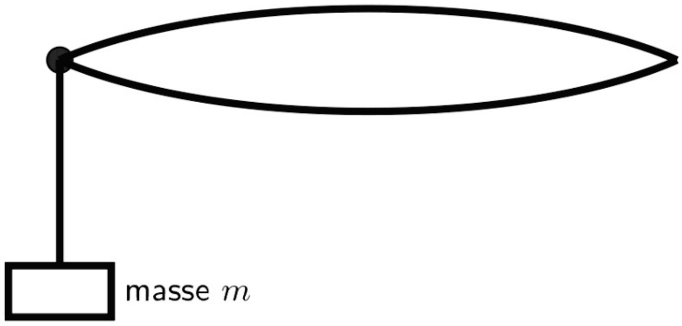
On l'obtient pour une pulsation d'excitation $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$, soit une fréquence $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{c}{2L}$. Cette fréquence est appelée fréquence fondamentale.
La longueur d'onde est :

$$\lambda_1 = cT_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{c}{\frac{c}{2L}} = 2L$$

On a donc la relation :

$$L = \frac{\lambda_1}{2}$$

On a la figure suivante. On a un seul ventre de vibration.



On retient que lorsque la longueur L est égale à la moitié de la longueur d'onde, on a le premier mode propre. On peut mémoriser ce résultat facilement sachant que la distance entre deux noeuds successifs est la moitié de la longueur d'onde.

Étude du cas où $n = 2$ – Excitation du deuxième mode propre

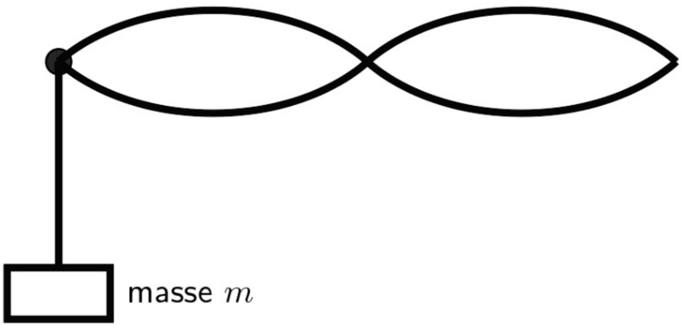
On l'obtient pour une pulsation d'excitation $\omega_2 = \frac{2\pi c}{L}$, soit une fréquence $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{c}{L}$. Cette fréquence est appelée 2^e harmonique.

La longueur d'onde est :

$$\lambda_2 = cT_2 = \frac{c}{f_2} = \frac{c}{\frac{c}{L}} = L$$

On a deux ventres de vibration aux abscisses : $\frac{\lambda_2}{4}$ et $\frac{3\lambda_2}{4}$.

On a trois noeuds de vibration aux abscisses : $0, \frac{\lambda_2}{2}$ et λ_2.



Si on fait l'expérience et qu'on augmente la fréquence de l'excitation, on observe sur la corde des ondes stationnaires de faible amplitude sauf pour certaines valeurs correspondant aux modes propres calculés précédemment.

OD15 – Décomposition en série de Fourier

a) Vu le caractère limité de la corde (ou cavité), on cherche une solution à l'équation de d'Alembert en ondes stationnaires :

$$u(x, t) = D\sin(\omega t + \varphi)\sin(kx + \psi),$$

avec $k = \dfrac{\omega}{v}$.

b) Les conditions (6) imposent, pour tout temps,

$$D\sin(\omega t + \varphi)\sin(\psi) = 0 \quad \text{et} \quad D\sin(\omega t + \varphi)\sin(kL + \psi) = 0.$$

On en déduit $\psi = 0$.

REMARQUE – Il est aussi possible de prendre $\psi = \pi$ et d'absorber le signe négatif résultant dans la constante D.

De plus, $\sin(kL) = 0$, soit :

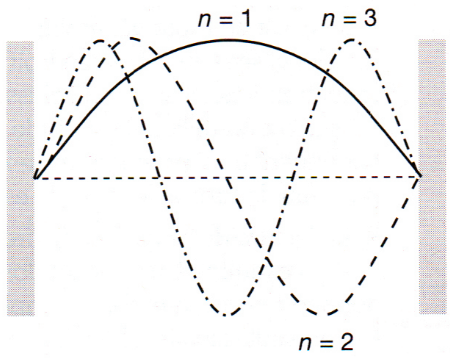
$$\boxed{k = \frac{n\pi}{L},\ n \in \mathbb{N}^*}.$$

On appelle *mode de rang n* la solution correspondant à un entier n. Elle s'écrit explicitement :

$$\boxed{u_n(x, t) = D_n \sin\left(\frac{n\pi v}{L}t + \varphi_n\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)},$$

les constantes D_n et φ_n étant indicées par n. On a utilisé la relation $\omega = vk$.

c) La figure 20 représente l'allure de $u_n(x, t)$ à t fixé pour les modes de rangs $n = 1$, 2 et 3. Ils varient sinusoïdalement dans l'espace, et s'annulent forcément en $x = 0$ et $x = L$.



d) Hormis si la fonction est sinusoïdale de pulsation convenable, il n'existe pas en général de solution construite à partir d'un seul des modes $u_n(x, t)$. Il faut alors remarquer que la linéarité de l'équation de d'Alembert permet de superposer les différents modes :

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)}.$$

On aboutit ainsi naturellement à l'écriture des signaux sous forme de séries harmoniques qui peuvent être vues comme des séries de Fourier de chacune des variables.

On remarque que la forme de la corde est périodique temporellement. Après une durée $T = \dfrac{2L}{v}$, la corde reprend son aspect initial. Cela est cohérent avec l'absence de phénomènes dissipatifs dans la modélisation de la corde.

La corde étant de longueur finie L, sa forme à un instant donné peut être prolongée à loisir, hors de l'intervalle $[0, L]$. Les coefficients a_n et b_n dépendent alors du temps. L'équation de d'Alembert leur impose finalement une forme sinusoïdale.

e) Les valeurs de D_n et φ_n doivent être déterminées. Pour cela, on utilise les conditions initiales données par (9).

La condition relative à la vitesse initiale permet alors d'imposer :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi v}{L}\cos(\varphi_n)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

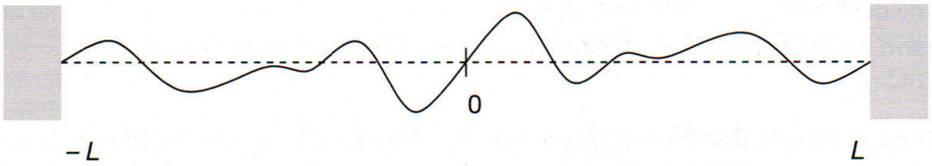
Mais cette valeur doit être nulle en tout point, ce qui conduit à identifier cette série à celle de la fonction nulle. La liberté des $\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$ impose donc $\cos(\varphi_n) = 0$, soit :

$$\forall n,\ \varphi_n = \frac{\pi}{2}.$$

f) La dernière contrainte imposée à la solution correspond à sa valeur initiale (position initiale de la corde). Ainsi,

$$u_0(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

C'est une série de Fourier ! Mais, pour être complètement cohérent avec les définitions, il faut s'assurer que la fonction $u_0(x)$ est bien périodique de période $2L$ (la pulsation spatiale associée au mode fondamental est égale à $\frac{\pi}{L}$, ce qui correspond à une période spatiale $2\pi\frac{L}{\pi} = 2L$). Cela semble curieux à première vue. En général, la vibration de la corde n'est définie que sur l'intervalle $[0, L]$. On est donc amené à prolonger cette fonction sur l'axe des x en la rendant impaire (termes en sinus) et ainsi de période convenable



La détermination des coefficients D_n découle de la forme initiale $u_0(x)$ de l'onde connue : ce sont les coefficients de Fourier de u_0 complétée par imparité puis périodicité.

g) La forme initiale de la courbe impose donc le poids des harmoniques dans le spectre de la corde. Dans le cadre des instruments de musique, la manière d'exciter la corde détermine donc le spectre associé à une même note. Une note n'est pas entendue pure, mais superposée à ses harmoniques.

OD16 - Vibrations longitudinales d'une lame de céramique

1°) La tranche qui se trouve au repos entre les plans d'abscisses x et x+dx s'est allongée de $y(x+dx,t) - y(x,t)$ en présence de la déformation donc, l'allongement relatif de cette tranche est :

$$\frac{y(x+dx,t) - y(x,t)}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$$

au premier ordre en dx. La force de traction exercée par la partie droite de la lame sur la partie gauche est dirigée dans le sens positif de l'axe Ox si le matériau est allongé donc la force recherchée est bien :

$$T(x,t) = ES\frac{\partial y}{\partial x}(x,t).$$

2°) La tranche qui se trouve au repos entre les plans d'abscisses x et x+dx est soumise aux deux forces de traction en x + dx et en x. Le principe fondamental de la dynamique projeté sur Ox donne :

$$dm\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+dx,t) - T(x,t)$$

soit, au premier ordre en dx et après simplification par dx :

$$\mu_0 S\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = ES\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)$$

ou encore :

C'est bien une équation de d'Alembert à une dimension. La célérité des ondes est $c = \sqrt{\frac{E}{\mu_0}}$. Nous retrouvons l'expression vue dans le cours mais présentée à partir d'un modèle différent.

Application numérique : $c = 4851$ m.s^{-1}

3°) Les solutions de cette équation sont de la forme :

$y(x,t) = f\,(x-ct) + g(x+ct)$, le premier terme représentant une onde plane progressive dans le sens des *x* croissants et le second une onde plane progressive dans le sens des *x* décroissants, les deux ondes se propageant à la vitesse c.

OD17 – Corde plombée

1°) Dans les deux parties de la corde, nous pouvons écrire l'élongation y(x,t) comme la superposition de deux ondes qui se propagent en sens inverse ou comme des ondes stationnaires. Choisissons cette seconde possibilité. Les conditions aux limites imposant : $y(0,t) = 0 \; et \; y(L,t) = 0$, l'élongation dans les deux parties de la corde s'écrit :

- pour $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$, $y(x,t) = y_1(x,t) = A_1 sin(kx)cos(\omega t)$
- pour $\frac{L}{2} \leq x \leq L$, $y(x,t) = y_2(x,t) = A_2 sin(k(L-x))cos(\omega t)$

avec $\omega = kc$.

Les conditions aux limites en $x = \frac{L}{2}$ sont données par la continuité de l'élongation et par le PFD appliqué à la masse m.

$Y(t) = A_1 sin(k\frac{L}{2})cos(\omega t) = A_2 sin(k(L-\frac{L}{2}))cos(\omega t)$

$$et \; m\frac{d^2Y}{dt^2}\overrightarrow{u_y} = \vec{T}\left(\frac{L^+}{2},t\right) - \vec{T}\left(\frac{L^-}{2},t\right)$$

En projection sur l'axe Ox, au premier ordre non nul, cette équation montre que le module de la tension est le même dans les deux parties de la corde, égal à T_0. En projection sur l'axe Oy, nous obtenons :

$$m\frac{d^2Y}{dt^2}\overrightarrow{u_y} = T_0\frac{\partial y_2}{\partial x}\left(\frac{L}{2},t\right) - T_0\frac{\partial y_1}{\partial x}\left(\frac{L}{2},t\right)$$

ce qui donne :

$$-mA_1\omega^2 \sin(k\frac{L}{2})cos(\omega t) = -kT_0(A_2 + A_1)cos(k\frac{L}{2})cos(\omega t)$$

Les amplitudes $A_2 \; et \; A_1$ vérifient donc le système d'équations :

$$\begin{cases} (A_1 - A_2)sin\left(k\frac{L}{2}\right) = 0 \\ mA_1\omega^2 \sin(k\frac{L}{2}) = kT_0(A_2 + A_1)cos(k\frac{L}{2}) \end{cases}$$

2°)

a) Si $kL = 2n\pi$ où n est un nombre entier, $A_1 = -A_2$. Les élongations $y_1(x,t) \; et \; y_2(x,t)$ sont les restrictions aux deux demi-cordes des modes propres de la corde non plombée. La présence de la masse ne modifie pas le mouvement de la corde. Elle se trouve sur un nœud de vibration donc ne bouge pas.

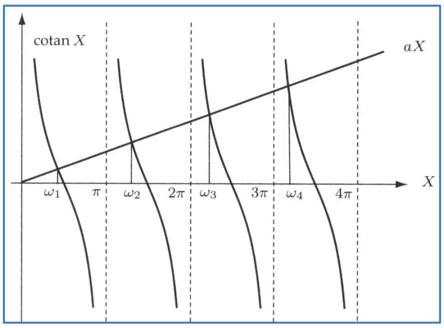
b) Si $kL \neq 2n\pi$, $A_1 = A_2$ et $\tan(k\frac{L}{2}) = \frac{2kT_0}{m\omega^2}$

$$\Leftrightarrow tan\left(\frac{\omega}{c}\frac{L}{2}\right) = \frac{2\frac{\omega}{c}\mu c^2}{m\omega^2}$$

$$\Leftrightarrow tan(\frac{\omega L}{2c}) = \frac{2\mu c}{m\omega}$$

La pulsation ω vérifie donc l'équation : $cotan(\frac{\omega L}{2c}) = \frac{\omega L}{2c} * \frac{m}{\mu L}$

Posons $X = \frac{\omega L}{2c}$. Les valeurs possibles de X sont données par l'intersection de la courbe $cotan(X) = aX$ où $a = \frac{m}{\mu L}$



Il y a une pulsation propre dans chaque intervalle $[(n-1)\pi, n\pi]$ pour X donc dans chaque intervalle $\left[(n-1)\frac{2\pi c}{L}, n\frac{2\pi c}{L}\right]$ pour ω.

- Si $m \ll \mu L,$ la pente de la droite est très faible et les intersections entre la droite et la courbe cotan(X) sont très proches des zéros de la fonction cotan(X), soit :
$$X = \frac{n\pi}{2}\ et\ \omega = n\frac{\pi c}{L}$$
Nous retrouvons les pulsations propres de la corde non lestée, c'est normal puisque la masse du lest est négligeable.

- Si $m \gg \mu L,$ la pente de la droite est très grande et l'intersection entre la droite et la courbe cotan(X) est très proche de 0. Un développement limité au premier ordre de l'équation vérifiée par les pulsations propres donne :
$$\tan\left(k\frac{L}{2}\right) = \frac{2kT_0}{m\omega^2}$$
$$\Leftrightarrow k\frac{L}{2} = \frac{2kT_0}{m\omega^2} \Leftrightarrow \frac{L}{2} = \frac{2T_0}{m\omega^2}$$
$$\Leftrightarrow \omega = 2\sqrt{\frac{T_0}{mL}}.$$

Chaque demi-corde oscille en bloc (la longueur d'onde est très grande devant la longueur de la corde) et se comporte comme un ressort de raideur k telle que :
$$\Leftrightarrow m\omega^2 = \mathrm{k}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{k} = \frac{T_0}{L/4}.$$