

# OD1 – Equation d'Alembert

La partie « **Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert** » est consacrée à l'étude de phénomènes ondulatoires non dispersifs régis par l'équation d'onde de d'Alembert. Le choix a été fait ici de privilégier les solutions harmoniques dans la résolution pour leur universalité comme solutions adaptées aux équations d'ondes linéaires. S'agissant de la modélisation microscopique des solides, l'objectif est uniquement de proposer une interprétation du module d'Young d'un solide ; par la suite, la mise en équations des ondes longitudinales dans les solides est conduite directement dans l'approximation du solide continu. Dans le cadre de la physique des ondes, on qualifiera de plane ou sphérique une onde par référence à sa dépendance spatiale  $f(x,t)$  ou  $f(r,t)$ .

6.1. Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert		
6.1.1. Ondes mécaniques unidimensionnelles dans les solides déformables		
Ondes transversales sur une corde vibrante.	Établir l'équation d'onde décrivant les ondes transversales sur une corde vibrante infiniment souple dans l'approximation des petits mouvements transverses.	L'équation des cordes vibrantes.
Domaine d'élasticité d'un solide : module d'Young, loi de Hooke.	Exploiter le modèle de la chaîne d'atomes élastiquement liés pour relier le module d'Young d'un solide élastique à ses caractéristiques microscopiques.	
Ondes mécaniques longitudinales dans une tige solide dans l'approximation des milieux continus.	Établir l'équation d'onde décrivant les ondes mécaniques longitudinales dans une tige solide.	
Équation de d'Alembert ; célérité.	Identifier l'équation de d'Alembert. Relier qualitativement la célérité d'ondes mécaniques, la raideur et l'inertie du milieu support.	
Ondes progressives, ondes progressives harmoniques ; ondes stationnaires.	Différencier une onde stationnaire d'une onde progressive. Utiliser qualitativement l'analyse de Fourier pour décrire une onde non harmonique.	On va retrouver l'analyse de Fourier vu en TP et en PCSL.
Modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités. Résonances d'une corde de Melde.	Décrire les modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités. Interpréter quantitativement les résonances observées avec la corde de Melde en négligeant l'amortissement.	On retrouvera une analogie avec le cours sur le Laser à la fin des OD.

## I - Etablissement de l'équation d'onde

### I-1) Ondes sur une corde

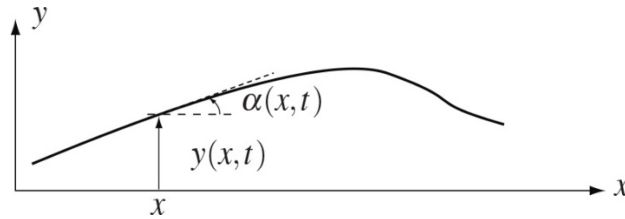
#### a) Hypothèses

Considérons une corde de longueur  $L$ , homogène, sans raideur, de masse  $m$  donc de masse linéique  $\mu_l$ .

Au repos, la corde est tendue, avec la tension  $T_0$ . Nous supposons la corde horizontale, ce qui revient à négliger l'effet de la pesanteur devant la tension.

On s'intéresse aux petits mouvements transversaux, c'est-à-dire orthogonaux à la direction initiale de la corde : le point de la corde

situé à l'abscisse  $x$  au repos s'est déplacé à l'instant  $t$  de  $y(x,t)$  selon l'axe  $Oy$  :



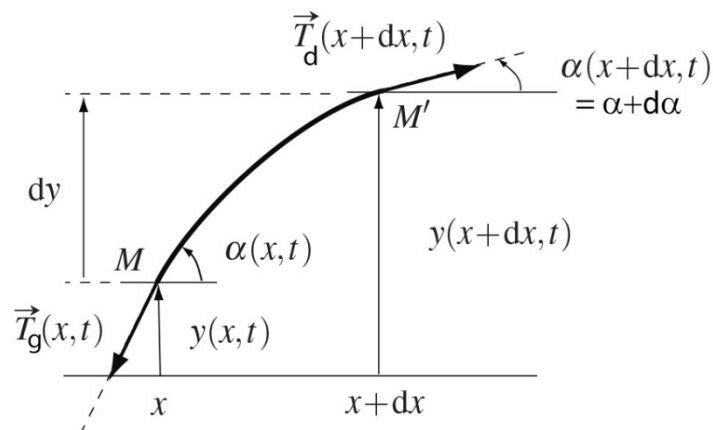
On appelle  $\alpha(x,t)$  l'angle que fait la tangente à la corde au point  $x$ , à l'instant  $t$ , avec l'axe horizontal  $Ox$ . Les mouvements étudiés sont petits, ce qui revient à faire les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x,t) \ll L \\ \alpha(x,t) \ll 1 \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \ll 1 \\ \text{Poids négligé} \end{array} \right.$$

### b) Equation d'onde

Puisque le poids est négligé, l'élément de corde, de masse  $dm$ , est soumis à :

- La tension de la portion de fil située à droite du point  $M'$ .
- La tension de la portion de fil située à gauche du point  $M$ .



La loi de la quantité de mouvement appliquée à cet élément de corde s'écrit :

$$dm \vec{a} = \vec{T}_g(x,t) + \vec{T}_d(x+dx,t)$$

En projection sur  $(Ox)$  :

$$\begin{aligned}\vec{0} &= -T_g(x, t) \cos \alpha + T_d(x + dx, t) \cos(\alpha + d\alpha) \\ \Rightarrow T_g(x, t) \cos(\alpha(x)) &= T_d(x + dx, t) \cos(\alpha(x + dx)) \\ \Rightarrow T \cos(\alpha) &= cste = T_0\end{aligned}$$

En projection sur (Oy) :

$$\begin{aligned}dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) &= -T(x, t) \sin \alpha(x, t) + T(x + dx, t) \sin \alpha(x + dx, t) \\ \Leftrightarrow dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{\partial(T \sin \alpha)}{\partial x} dx \\ \Leftrightarrow dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{\partial \left( \frac{T_0 \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right)}{\partial x} dx \\ \Leftrightarrow dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) &= T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \\ \Leftrightarrow dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) &= T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx\end{aligned}$$

Or :  $dm = \mu_l dl \sim \mu_l dx$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = \frac{T_0}{\mu_l} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t)$$

L'équation d'onde vérifiée par la corde s'écrit :

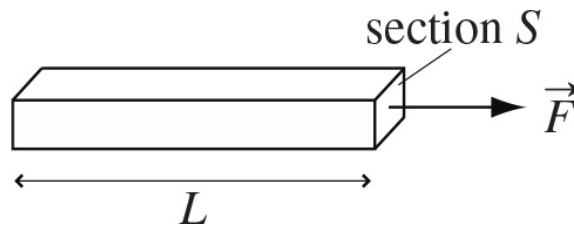
$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \text{ où } \underbrace{c}_{ms^{-1}} = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_l}}$$

Cette équation se nomme équation d'Alembert unidimensionnelle.

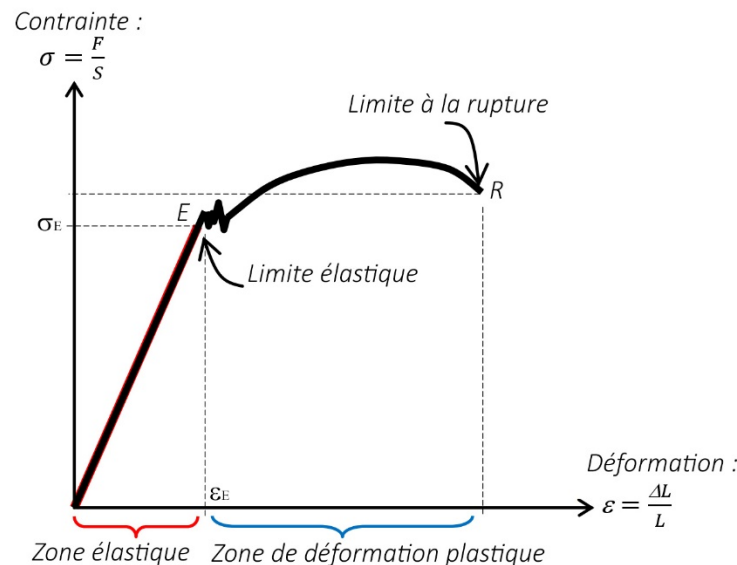
## I-2) Ondes acoustique dans un solide élastique

### a) Module d'Young

Les solides sont souvent caractérisés par leur module d'Young noté  $E$  qui caractérise l'allongement du solide sous l'action d'une force extérieure. Plus précisément, considérons un échantillon de solide de longueur  $L$  et de section  $S$ .



Quand on exerce la force  $\vec{F}$  dans le sens de la longueur de l'échantillon, celui-ci s'allonge de  $\Delta L$ . La courbe donnant la contrainte  $\sigma = \frac{F}{S}$  en fonction du taux d'allongement  $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$  à l'allure suivante :



Quand on augmente progressivement la contrainte, le taux d'allongement varie linéairement en fonction de celle-ci.

Si on ne dépasse pas la limite d'élasticité représentée par le point  $E$ , la déformation est réversible. Si on fait décroître la contrainte, l'échantillon reprend sa forme initiale.

En revanche, si on dépasse la limite d'élasticité, les déformations ne sont plus réversibles et le taux d'allongement ne varie plus linéairement en fonction de la contrainte.

Dans la zone d'élasticité,  $\sigma$  est donc proportionnelle à  $\varepsilon$ . Le coefficient de proportionnalité est le module d'Young.

Dans la zone d'élasticité,  $\sigma$  est proportionnelle à  $\varepsilon$  telle que :

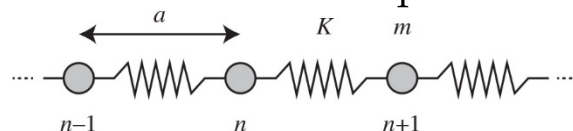
$$\sigma = \underbrace{E}_{Pa} \varepsilon \text{ où } \begin{cases} \sigma = \frac{F}{S} \\ \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \end{cases}$$

E est appelée module d'Young et s'exprime en Pa ou  $Nm^{-2}$

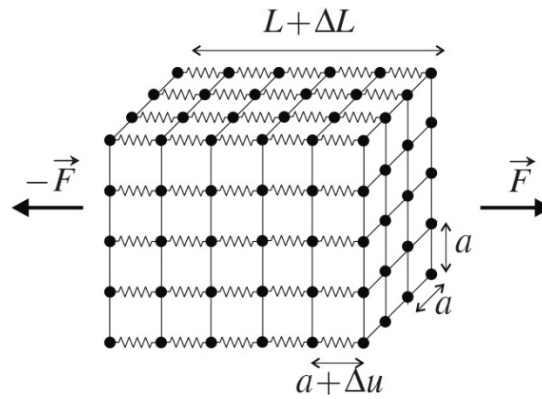
Matériau	Aluminium	Acier	Zinc	Cuivre	Titane
E(GPa)	69	~ 200	78	122	114

### b) Chaîne d'atomes élastiquement liés

La disposition des atomes dans un solide peut être modélisée par des points matériels  $A_i$  identiques, de masse  $m$ , reliés par des ressorts, tous identiques également, de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ . Cette modélisation permet d'étudier la propagation d'ondes élastiques dans un réseau cristallin simple.



La raideur  $k$  du ressort modélisant l'interaction entre deux atomes voisins est liée aux propriétés d'élasticité du solide, caractérisées par le module d'Young. Le module d'Young et la raideur du ressort modélisant les interactions entre atomes sont caractéristiques du même phénomène, le premier à l'échelle macroscopique, le second à l'échelle microscopique.



Supposons que les atomes forment un réseau cubique simple de paramètre de maille égal à  $a$ . Pour simplifier le raisonnement, on suppose que les ressorts ne se déforment que dans la direction d'application de la force et qu'il n'y a aucune contraction dans les directions perpendiculaires à cette force. Exprimons le module d'Young en fonction de la raideur du ressort.

L'allongement  $\Delta u$  des ressorts peut s'écrire :

$$\begin{cases} \Delta L = N \Delta u \\ L = Na \end{cases} \Rightarrow \Delta u = a \varepsilon$$

Or la force subie par un atome :

$$f = k\Delta u$$

Par conséquent sur la surface  $S$  on a :

$$F = n k\Delta u \text{ où } n = \frac{S}{a^2}$$

$$\Rightarrow \Delta u = \frac{F}{nk} = \frac{F a^2}{S k} = \sigma \frac{a^2}{k}$$

Par conséquent :

$$\Rightarrow a \varepsilon = \sigma \frac{a^2}{k} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{k}{a}$$

Le module d'Young est relié à la constante caractéristique du ressort modélisant les interactions entre deux atomes voisins :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{k}{a}$$

c) Ordre de grandeur de  $E$

On assimile l'énergie de liaison à l'énergie potentielle élastique d'où :

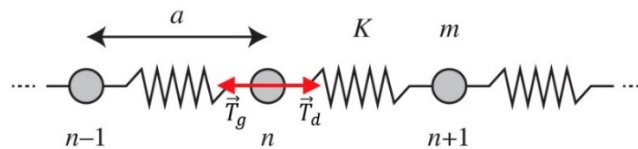
$$E_l = \frac{1}{2}ka^2 \Rightarrow E_l = \frac{1}{2}E a^3 \Rightarrow E = \frac{2E_l}{a^3}$$

Or pour les métaux :

$$\begin{cases} E_l \sim 200 \text{ kJ mol}^{-1} \sim 2 \text{ eV} \\ a = 200 \text{ pm} \end{cases} \Rightarrow E = \frac{2E_l}{a^3} = 4 \times \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{(200 \cdot 10^{-12})^3} \sim 100 \text{ GPa}$$

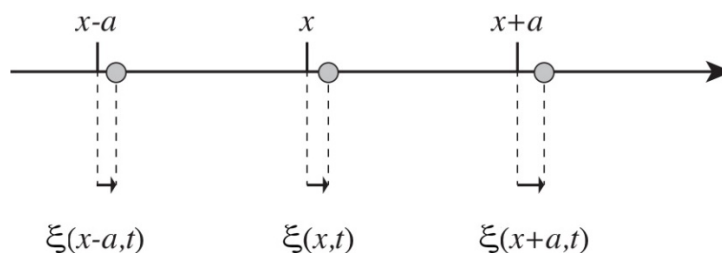
On retrouve l'ordre de grandeur du module d'Young des métaux.

d) Chaîne « infinie » de ressorts



Si on applique le PFD à la masse  $n$  on a :

$$\begin{cases} \vec{T}_g = -k(l_g - l_0)\vec{u}_x = -k(x_n - x_{n-1} - a)\vec{u}_x \\ \vec{T}_d = k(l_d - l_0)\vec{u}_x = k(x_{n+1} - x_n - a)\vec{u}_x \end{cases} \Rightarrow m \frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2} = k(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1})$$



Or :

$$\begin{cases} x_{n+1} = (n+1)a + \xi(x+a, t) \\ x_n = na + \xi(x, t) \\ x_{n-1} = (n-1)a + \xi(x-a, t) \end{cases}$$

On note  $\xi$  l'écart à la position au repos de la masse, et on passe à un modèle continu :

$$m \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = k(\xi(x + a, t) - 2\xi(x, t) + \xi(x - a, t))$$

$$\Leftrightarrow m \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = k \left( a \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{ka^2}{m} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2}$$

L'onde longitudinale se propageant le long de la chaîne de ressort vérifie :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} \text{ où } c = a \sqrt{\frac{k}{m}} = a \omega_0$$

e) Ondes longitudinales dans la lame

Dans le domaine d'élasticité du matériau, la force de traction  $T$  permettant à la lame de section  $S$  et de longueur  $L$  de s'allonger de  $\Delta L$  est donnée par la loi de Hooke :

$$\sigma = E \varepsilon \Rightarrow T = ES \frac{\Delta L}{L}$$

On envisage le cas où l'allongement est positif :  $\frac{\partial \xi}{\partial x} > 0$  ainsi :

- La force de traction  $\vec{T}_d$  sera dirigée dans le sens positif de l'axe (Ox).
- La force de traction  $\vec{T}_g$  sera dirigée dans le sens négatif de l'axe (Ox).

La tranche qui se trouve au repos entre les plans d'abscisses  $x$  et  $x+dx$  s'est allongée de :

$$d\xi = \xi(x + dx, t) - \xi(x, t)$$



Par conséquent la force de traction exercée par la partie gauche de la lame sur le système s'écrit :

$$\vec{T}_g = -T(x, t)\vec{u}_x = -ES \frac{\xi(x + dx, t) - \xi(x, t)}{dx} \vec{u}_x = -ES \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \vec{u}_x$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée à cette tranche de lame dx s'écrit, en négligeant la pesanteur :

$$\begin{aligned} \delta m \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} \vec{u}_x &= -T(x, t)\vec{u}_x + T(x + dx, t)\vec{u}_x \\ \Leftrightarrow \delta m \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial T}{\partial x} dx \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \left( ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)}{\partial x} dx \\ &\Leftrightarrow \mu S dx \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \\ &\Leftrightarrow \mu \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Les ondes longitudinales progressant le long de la lame solide vérifient l'équation d'Alembert :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} \text{ où } c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

On a obtenu l'équation d'Alembert avec :

$$\begin{cases} c^2 = \frac{E}{\mu} : \text{lame solide} \\ c^2 = \frac{ka^2}{m} : \text{chaîne d'oscillateurs} \end{cases} \Rightarrow \frac{ka^2}{m} = \frac{E}{\mu}$$

Or dans le modèle adopté, une maille est occupée par un motif d'où :

$$\mu = \frac{m}{a^3} \Rightarrow E = \frac{k}{a}$$

On retrouve le résultat qu'on avait prévu dans notre modèle simpliste.

## II – Solutions de l'équation d'Alembert

### II-1) Ondes progressives

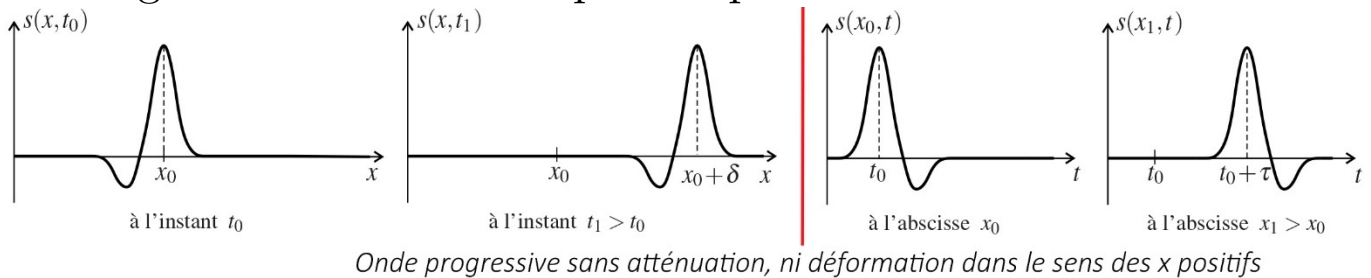
Une onde progressive se propageant à la vitesse  $c$  dans la direction de l'axe (Ox), dans le sens positif de cet axe, sans atténuation ni déformation, est de la forme suivante :

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \text{ ou } f(x - ct)$$

Une onde progressive se propageant à la vitesse  $c$  dans la direction de l'axe (Ox), dans le sens négatif de cet axe, sans atténuation ni déformation, est de la forme suivante :

$$s(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right) \text{ ou } G(x - ct)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions quelconques.



### II-2) Onde plane progressive harmonique

#### a) OPPH

Dans la suite, nous allons nous focaliser sur l'étude d'un type d'onde particulier satisfaisant l'équation d'onde. Il s'agit des ondes planes progressives harmoniques (OPPH). Leur caractère particulier tient à la forme de la fonction  $f$ .

OPPH :

$$s(x, t) = s_0 \cos\left(\underbrace{\omega t - kx + \varphi_0}_{\text{phase}}\right) \text{ où } \begin{cases} \omega = \frac{2\pi}{T} : \text{pulsation} \\ k = \frac{2\pi}{\lambda} : \text{vecteur d'onde} \\ \varphi_0 : \text{phase à l'origine} \end{cases}$$

L'onde progressive harmonique admet une double périodicité spatio-temporelle :

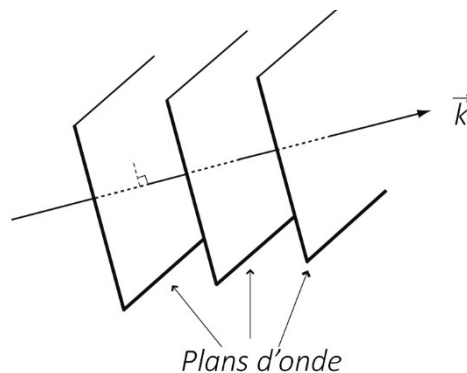
	Période	Fréquence	Pulsation
Temps	$T$	$f = \frac{1}{T}$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$
Espace	$\lambda$	$\sigma = \frac{1}{\lambda}$	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Implicitement, en ne retenant que la norme  $k$ , on a supposé que les OPPH ici considérées se propagent dans la direction (Ox). Le vecteur  $\vec{k}$  sera dans ce cas parallèle à l'axe (Ox).

$$\vec{k} = k \vec{u}_x$$

Le vecteur d'onde caractérise la direction de propagation.

On définit le front d'onde comme l'ensemble des valeurs de  $x$  telles que  $s(M, t) = cste$ . Si le front d'onde est un plan on parle d'onde plane.



### b) Relation de dispersion

Avec ce type de solutions l'équation d'Alembert s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} \\ \Rightarrow -\omega^2 &= -c^2 (-k)^2 \\ \Rightarrow \omega^2 &= k^2 c^2 \end{aligned}$$

La relation qui lie  $\omega$  à  $k$  est appelée relation de dispersion

Dans le cas d'une OPPH on a :

$$\omega = kc \Rightarrow \lambda = cT$$

On définit la vitesse de phase par :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \Rightarrow v_\varphi(\text{OPPH}) = c$$

c) Notation complexe

Dans le cas d'une direction quelconque on écrira l'OPPH sous la forme :

$$s(M, t) = s_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)$$

Il sera utile dans certains calculs d'utiliser la notation complexe :

$$\underline{s}(M, t) = s_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)} = \underline{s}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \text{ où } \underline{s}_0 = s_0 e^{i\varphi_0}$$

### II-3) Solutions en ondes progressives

Les ondes planes progressives harmoniques ont peu de réalité physique car elles ont une extension spatiale et temporelle infinie. Cependant, il faut décrire les solutions de l'équation d'Alembert comme des ondes planes réelles. Elles s'écrivent comme une superposition d'ondes planes progressives harmoniques de pulsation variant continûment dans un intervalle fini.

La linéarité de l'équation de d'Alembert permet de n'étudier qu'une famille privilégiée de solutions particulières : les ondes planes progressives harmoniques, à partir de laquelle il est possible de reconstituer, par superposition, toutes les ondes observées dans la réalité.

OPPH	Onde plane réelle
$s_{oppH}(x, t) = s_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}$	$s_{réel}(x, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underbrace{s_0(\omega) e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}}_{OPPH} d\omega = F(x - ct)$
Peu de sens physique	Superposition d'OPPH aussi appelée paquet d'ondes

On peut montrer que la forme générale de l'équation d'Alembert s'écrit comme la superposition de deux ondes progressives.

La solution générale de l'équation d'Alembert s'écrit :

$$s(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Elle s'écrit comme la superposition de deux OPPH.

## II-4) Ondes stationnaires

### a) Superposition d'OPPH

Considérons la superposition de deux ondes planes progressives harmoniques de même pulsation se propageant en sens inverse :

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) + s_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_0)$$

Or :

$$\begin{aligned} \cos(p) + \cos(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \Rightarrow s(x, t) &= s_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(kx) \end{aligned}$$

La somme de ces deux solutions est encore solution de l'équation de d'Alembert. Elle se met donc sous la forme du produit d'une fonction du temps par une fonction de l'abscisse x : il n'y a plus de propagation. C'est une onde stationnaire.

## b) Résolution

Cette fois-ci, on ne s'intéresse pas à la solution générale de l'équation de d'Alembert, mais à un certain type de solutions, dans lesquelles les variables sont séparées.

Supposons que  $s(x, t)$ , solution de l'équation de d'Alembert, soit à variables séparées, c'est-à-dire s'écrive sous la forme :

$$s(x, t) = f(x)g(t).$$

Alors, en remplaçant dans l'équation de d'Alembert, on obtient :

$$f(x)g''(t) = c^2 f''(x)g(t) \Leftrightarrow \frac{g''(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(x)}{f(x)} = C$$

Le premier terme ne dépend que du temps, alors que le second ne dépend que de la coordonnée  $x$ . Ainsi, ils sont constants et valent  $C$ . La forme de la solution dépend du signe de  $C$ .

- Si  $C > 0$ , alors  $g$  est de la forme :

$$g(t) = Ae^{\sqrt{C}t} + Be^{-\sqrt{C}t}$$

Le premier terme diverge avec le temps et n'est donc pas physique. Le second terme, quant à lui, disparaît et s'apparente à un régime transitoire.

- Si  $C < 0$  et on posera  $C = -\omega^2$  tel que :

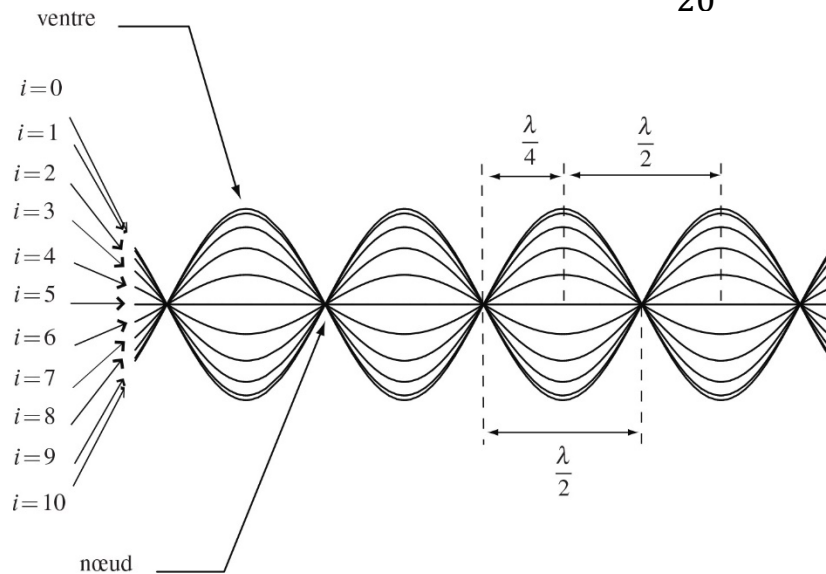
$$\begin{cases} \ddot{g} + \omega^2 g = 0 \\ f'' + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0 \Leftrightarrow f'' + k^2 f = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \\ f(x) = B \cos(k x + \psi) \end{cases}$$

La solution sous forme d'ondes stationnaires de l'équation d'Alembert s'écrit :

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(k x + \psi)$$

## c) Ventres et nœuds

Pour dégager le contenu physique de l'onde stationnaire, nous revenons à l'exemple de la corde vibrante. L'aspect de la corde est représenté sur la figure aux instants  $t_i = i \frac{T}{20}$  pour  $i \in \{0,10\}$ .



Cette fois-ci, l'onde ne se propage clairement plus. Bien au contraire, elle oscille sur place : c'est pourquoi on l'appelle onde stationnaire. Cette onde est plane : en effet, dans les plans  $x = \text{cte}$ , l'amplitude de vibration est la même.

On note sur la figure que certains points ne vibrent jamais : ce sont les nœuds de vibration, alors que certains points vibrent avec une amplitude maximale : on les nomme ventres de vibration. Sur cette même figure, on remarque que la distance entre deux nœuds ou deux ventres successifs vaut une demi-longueur d'onde.

Position des nœuds :

$$\begin{aligned} \cos(kx_n + \varphi) &= 0 \Rightarrow kx_n + \varphi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \\ \Rightarrow x_n &= \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi}{k} + C_1 = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda}{2} + C_1 \\ &\Rightarrow \Delta x_n = \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

Position des ventres :

$$\cos(kx_m + \varphi) = 1 \Rightarrow kx_m + \varphi = m \pi$$

$$\Rightarrow x_m = \frac{m\pi}{k} + C_1 = \frac{m\lambda}{2} + C_1$$

$$\Rightarrow \Delta x_m = \frac{\lambda}{2}$$

d) Superposition d'ondes stationnaires

On envisage la superposition de deux ondes stationnaires :

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) \\ + s_0 \sin(\omega t + \varphi) \sin(kx + \psi)$$

Or :

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y) \\ \Rightarrow s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kx + \varphi - \psi)$$

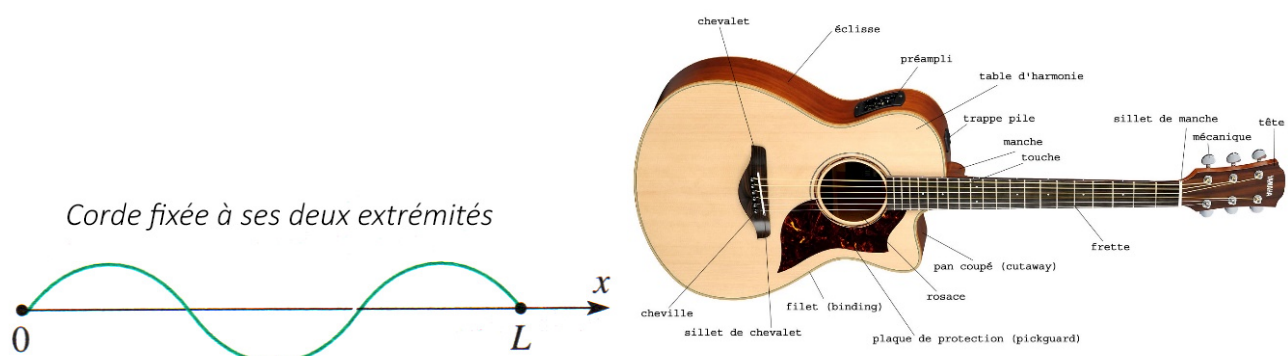
On retrouve une OPPH.

La solution générale de l'équation d'Alembert peut s'écrire comme :

- La superposition d'OPPH qui sera préférée si le milieu est illimité d'au moins un côté.
- Ou la superposition d'ondes stationnaires qui sera préférée si le milieu est limité des deux côtés.

## III – Régime libre d'une corde fixée à ses 2 extrémités

### III-1) Position du problème





Considérons une corde de longueur  $L$  fixée à ses deux extrémités. Les conditions aux limites imposées sont donc :

$$CL : \begin{cases} y(0, t) = 0 \\ y(L, t) = 0 \end{cases}, \forall t$$

À l'instant initial, on déforme la corde en imposant les conditions initiales suivantes :

$$CI : \begin{cases} y(x, 0) = a(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = b(x) \end{cases}$$

où  $a(x)$  et  $b(x)$  sont des fonctions données, définies sur l'intervalle  $[0, L]$ .

Vu que les deux extrémités sont fixées, nous allons rechercher des solutions particulières sous forme d'ondes stationnaires.

### III-2) Pulsations et modes propres

Cherchons  $y(x, t)$  sous la forme :

$$y(x, t) = C \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

Les conditions aux limites donnent, pour tout  $t$  :

$$\begin{cases} y(0, t) = C \cos(\omega t + \varphi) \cos(\psi) = 0 \\ y(L, t) = C \cos(\omega t + \varphi) \cos(kL + \psi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi = \frac{\pi}{2} [\pi] \\ \cos\left(kL + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\psi = \frac{\pi}{2} \text{ et } \sin(kL) = 0$$

Par conséquent :

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \text{ et}$$

La norme du vecteur d'onde  $k$  et la pulsation ne peuvent prendre que des valeurs discrètes.

Les solutions particulières en ondes stationnaires sont :

$$y_n(x, t) = C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x) \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$

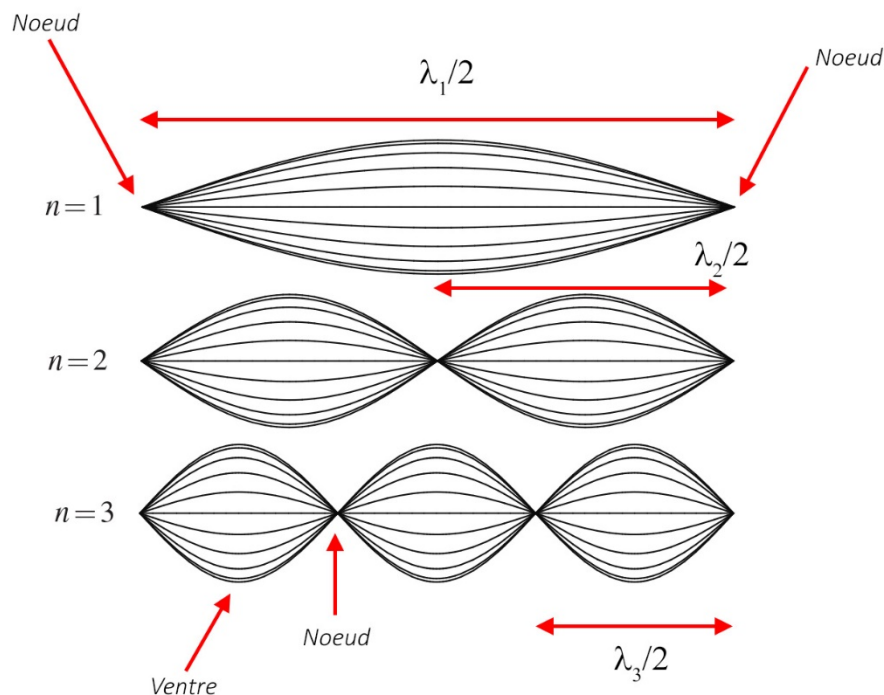
Ce sont les modes propres.

Les pulsations  $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$  étant les pulsations propres.

Pour  $n = 1$ , on parle de mode fondamental et pour  $n > 1$  d'harmonique de rang  $n$ .

Pulsation propre	Fréquence propre	Vecteur d'onde	Longueur d'onde
$\omega_n = n \underbrace{\frac{\pi c}{L}}_{\omega_0}$	$f_n = n \frac{c}{\underbrace{2L}_{f_0}}$	$k_n = n \frac{\pi}{\underbrace{L}_{k_0}}$	$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n}$

On représente les trois premiers modes propres de la corde.



Par exemple, pour une corde de guitare de longueur  $L=64,0\text{cm}$ , on a :  $f_0 = \frac{c}{2L} = 331 \text{ Hz}$  c'est un  $mi_3$ . Plus  $L$  est grand, plus le son émis est grave, ce qu'on peut vérifier en comparant violoncelle et violon ou guitare et guitare basse.



Les modes propres vérifient les conditions aux limites mais correspondent à des solutions initiales particulières. **Pour que la corde vibre selon un de ses modes propres, il faut l'exciter dans ce mode propre.** Mais qu'en est-il pour les conditions initiales générales ?

### III-3 Solutions générales

La solution générale de l'équation d'onde sur la corde vibrante de longueur  $L$ , fixée aux deux extrémités, s'obtient comme une superposition générale de tous les modes propres :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x)$$

Dans le cas de notre problème :

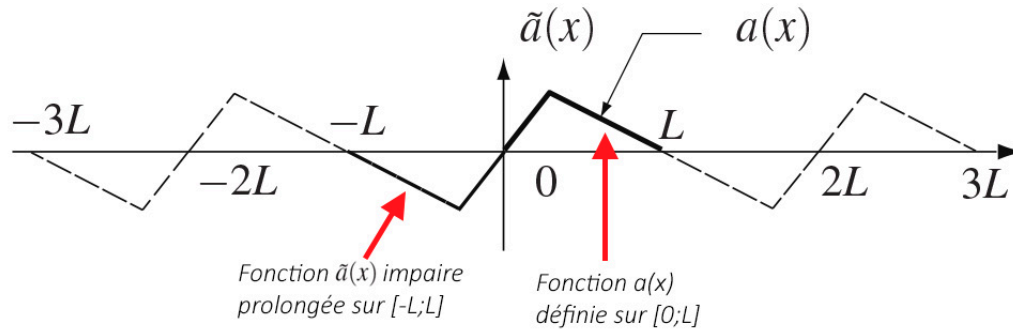
$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \sin(k_n x)$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) = a(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \sin(k_n x) = b(x) \end{array} \right.$$

Les coefficients  $A_n$  apparaissent comme les coefficients du développement en série de Fourier d'une fonction impaire définie à

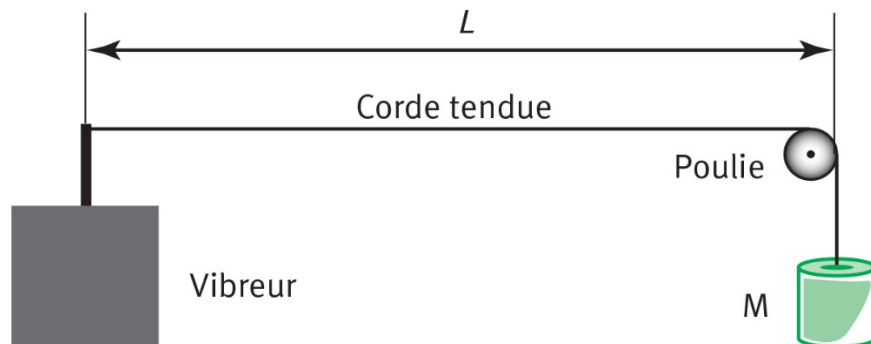
partir de  $a(x)$  de la façon suivante : la fonction  $a(x)$  étant définie sur  $[0, L]$ , on construit la fonction impaire, définie sur  $[-L, L]$  qui coïncide avec  $a(x)$  sur  $[0, L]$ , puis on la prolonge sur  $\mathbb{R}$  tout entier en une fonction périodique, de période  $2L$ . Nous appellerons  $\tilde{a}(x)$  la fonction ainsi obtenue.



Les  $A_n$  sont donc les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction  $\tilde{a}(x)$ . On procède de la même façon pour les  $B_n$  à partir de  $b(x)$ .

## IV – Régime forcé de la corde fixée à une extrémité

### IV-1) Résonance



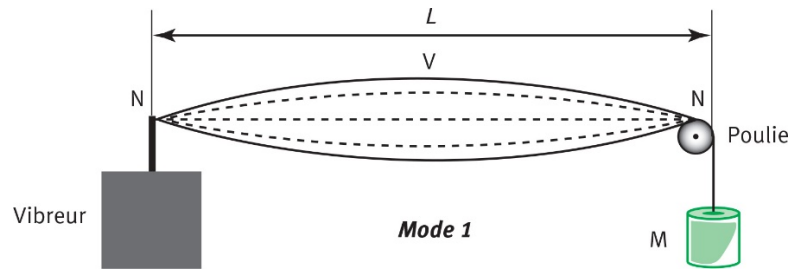
Ce type de dispositif est appelée corde de Melde. Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\begin{cases} y(0, t) = y_0 \cos(\omega t) \\ y(L, t) = 0 \end{cases}$$

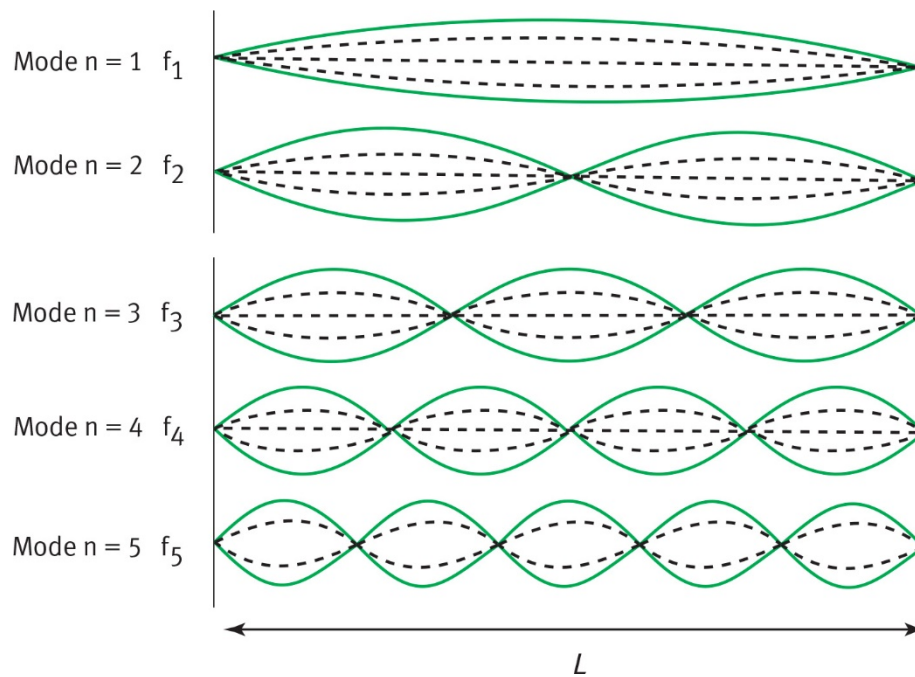
La masse impose la tension  $T_0 = mg$  (la poulie est supposée parfaite et la masse est immobile).

On observe sur la corde des ondes stationnaires de petite amplitude sauf pour certaines valeurs de la fréquence du courant alimentant le vibreur, pour lesquelles cette amplitude devient importante : il y a résonance.

Pour la plus petite de ces fréquences  $f_0$ , la corde présente un seul fuseau, avec un ventre de vibration au milieu.



Les autres fréquences pour lesquelles la corde entre en résonance sont les multiples entiers  $f_n = n f_0$ .



#### IV-2) Solutions

Cherchons une solution sous forme d'onde stationnaire de même pulsation que l'excitation :

$$y(x, t) = C \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

Les conditions aux limites donnent :

$$\begin{cases} y(0, t) = C \cos(\omega t + \varphi) \cos(\psi) = y_0 \cos(\omega t) \\ y(L, t) = C \cos(\omega t + \varphi) \cos(kL + \psi) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Or : } \cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C (\cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \sin(\varphi)) \cos(\psi) = y_0 \cos(\omega t) \\ \cos(kL + \psi) = 0 \end{cases}$$

Ceci est vraie pour tout t donc :

$$\begin{cases} \varphi = 0 \text{ et } C \cos(\psi) = y_0 \\ \cos(kL + \psi) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \text{ et } C = \frac{y_0}{\cos(\psi)} \\ kL + \psi = \left(p + \frac{1}{2}\right) \pi \end{cases}$$

Donc :

$$y(x, t) = \frac{y_0 \cos(\omega t)}{\cos\left(\left(p + \frac{1}{2}\right) \pi - kL\right)} \cos\left(\left(p + \frac{1}{2}\right) \pi + kx - kL\right)$$

$$= \frac{y_0 \cos(\omega t)}{\sin\left(\left(p + \frac{1}{2}\right) \pi\right) \sin(-kL)} \sin\left(\left(p + \frac{1}{2}\right) \pi\right) \sin(k(x - L))$$

$$\Leftrightarrow y(x, t) = \frac{y_0 \cos(\omega t)}{\sin(kL)} \sin(k(L - x))$$

Quand  $kL = n\pi$ , donc quand la fréquence excitatrice est une des fréquences propres de la corde,  $y(x, t)$  tend vers l'infini : il y a résonance.

Il peut sembler étrange que l'on retrouve les modes propres précédents. En effet, pour une corde fixée aux deux extrémités,  $x = 0$  est un nœud de vibration alors qu'ici cette position est celle du vibreur qui excite la corde. Comme l'amplitude des modes propres est infinie, l'excitation par la vibration est très faible en comparaison et donc assimilable à un nœud de vibration.

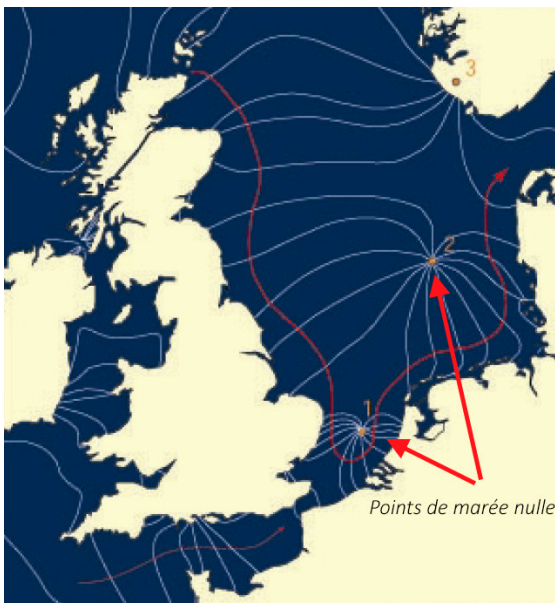
Notons enfin que l'on a négligé toute perte énergétique dans la corde. Le vibreur donne sans cesse de l'énergie à la corde qui la stocke sans perte. L'énergie de la corde diverge, ainsi que l'amplitude

de ses oscillations. En pratique, les frottements limitent cette amplitude.

#### IV-3) Autres exemples d'ondes stationnaires

On retrouve des ondes stationnaires dans les cavités lasers, les points amphidromiques où l'amplitude des marées est toujours nulle et les vibrations d'une timbale.

Dans le cas des vibrations d'une timbale : lorsqu'on force la vibration de la surface, il apparaît pour des fréquences données, des lignes nodales (ou la vibration est nulle). Les particules détectrices s'y regroupent et permettent d'observer ses nœuds à deux dimensions.



Lignes nodales (nœuds à 2D) de vibration où les particules détectrices se regroupent.

