

## Sujet IX :

## 9a - Ligne haute-tension

1) L'ARQS consiste à négliger les phénomènes de propagation dans le circuit, c'est-à-dire que l'on néglige le temps de propagation  $\frac{OM}{c}$  devant le temps caractéristique  $T$  des variations temporelles des sources. Le critère est donc en fonction de la longueur caractéristique  $L$  du circuit :

$$\frac{L}{c} \ll T.$$

On a donc :

$$L \ll cT = \frac{c}{f} = \lambda.$$

$\lambda$  représente la longueur d'onde. Ici la condition est la suivante :

$$L \ll 3.10^8 \times \frac{1}{50} = 6.10^6 \text{ m.}$$

Ici, on justifie le fait que le fil est de longueur finie et que l'on néglige les effets de bords pour le calcul du champ magnétique. On garde les propriétés du fil infini pour la géométrie.

Les équations de Maxwell sont les suivantes :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

Pour un conducteur ohmique, la densité volumique de charges est nulle. Dans le cas de l'ARQS, on peut négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction et on obtient donc les équations simplifiées suivantes :

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

2) En coordonnées cylindrique, le champ magnétique est de la forme  $\vec{B}(r, \theta, z)$ . Le problème est invariant par translation le long du fil et donc le champ magnétique ne dépend pas de  $z$ . Le problème est aussi invariant par rotation autour de l'axe ( $Oz$ ) donc le champ magnétique ne dépend pas de l'angle  $\theta$ .

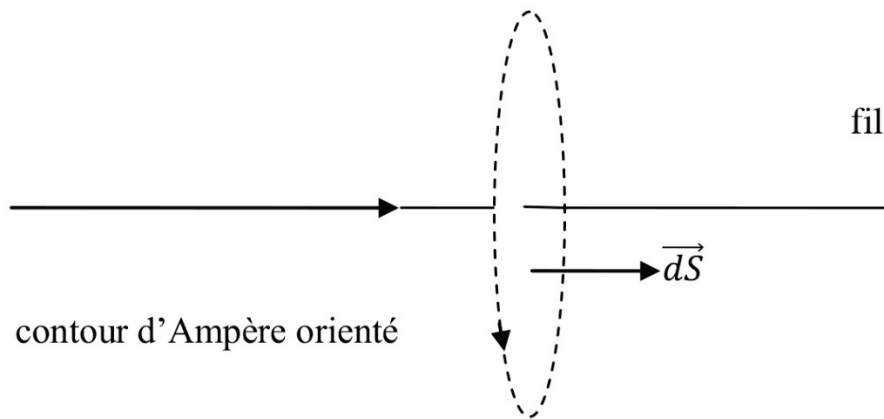
Le plan contenant le fil et le point où l'on calcule le champ magnétique est un plan de symétrie (plan  $\vec{e}_r, Oz$ ) donc le champ est perpendiculaire à ce plan.

On a donc :

$$\vec{B}(r, \theta, z) = B(r)\vec{e}_\theta.$$

Les lignes de champ sont donc des cercles.

On a ainsi le schéma suivant :



*L'orientation du contour d'Ampère et l'orientation de la surface s'appuyant sur le contour sont liées.*

Le théorème d'Ampère donne :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl}.$$

Comme le champ magnétique est selon  $\vec{e}_\theta$ , il est donc colinéaire à  $d\vec{l}$ . On a donc :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B \cdot dl = B \oint dl = B2\pi r.$$

Comme le courant  $i(t)$  est dans le même sens que  $d\vec{S}$ , le courant enlacé est égal à :  $I_{enl} = i(t)$ . On trouve donc :

$$B2\pi r = \mu_0 i(t)$$

$$B = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}.$$

Le champ magnétique vaut :

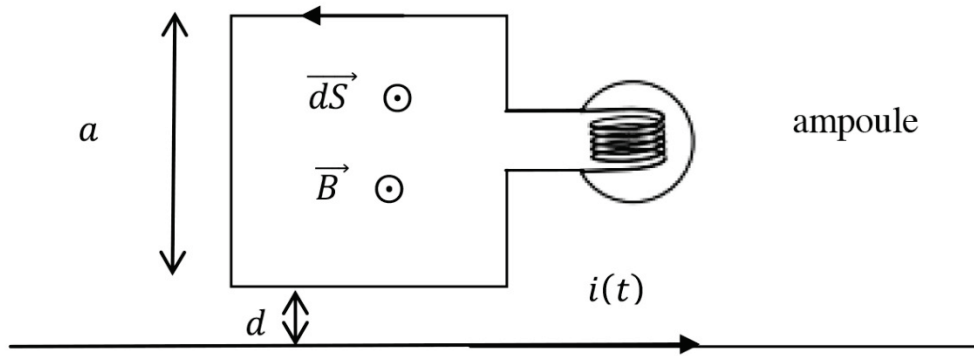
$$\boxed{\vec{B}(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} \vec{e}_\theta.}$$

*On retrouve bien le champ créé par un fil infini. Penser à vérifier l'homogénéité.*

3) Pour calculer le flux à travers le circuit, on utilise l'expression du flux qui est :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Il faut donc orienter le circuit. Pour cela, il est nécessaire et obligatoire de faire un schéma :



L'orientation du circuit est arbitraire. Celle de la surface est liée à l'orientation du contour par la règle du tire bouchon.

On a donc :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint B \cdot dS.$$

On prend pour élément de surface élémentaire un rectangle de hauteur  $a$  et d'épaisseur  $dr$ . On a donc pour une spire :

$$\begin{aligned} \phi &= \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{dr}{r} \\ \phi &= \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} [\ln(r)]_d^{d+a} \\ \phi &= \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right). \end{aligned}$$

Pour  $N$  spires, on obtient donc le flux magnétique suivant :

$$\boxed{\phi = N \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right).}$$

Penser à multiplier le flux par le nombre de spires.

4) On a donc un circuit placé dans un champ magnétique variable créé par le fil. Le circuit fermé est donc le siège d'un phénomène d'induction électromagnétique et la fem induite est donnée par la loi de Faraday :

$$e = - \frac{d\phi}{dt}.$$

On obtient en dérivant l'intensité par rapport au temps :

$$e = -N \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \frac{di}{dt}.$$

L'expression du courant est donc la suivante :

$$i(t) = I_{eff} \sqrt{2} \cos(2\pi f t).$$

La dérivée est donc égale à :

$$\frac{di}{dt} = -2\pi f I_{eff} \sqrt{2} \sin(2\pi ft).$$

La fem induite est donc égale à :

$$e = N \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) 2\pi f I_{eff} \sqrt{2} \sin(2\pi ft).$$

En simplifiant, on obtient donc :

$$e = N \mu_0 a \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) f I_{eff} \sqrt{2} \sin(2\pi ft).$$

Pour que la lampe puisse s'allumer, il faut comme l'indique l'énoncé que l'amplitude efficace de la fem soit supérieure à la tension efficace soit :

$$N \mu_0 a \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) f I_{eff} > E.$$

Donc le nombre de spires vérifie l'inégalité suivante :

$$N > \frac{E}{\mu_0 a \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) f I_{eff}}.$$

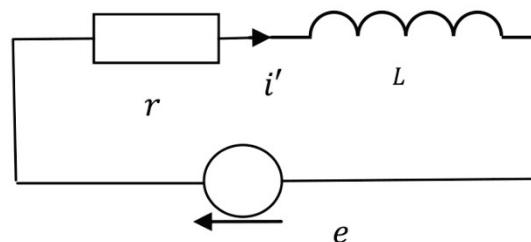
L'application numérique donne :

$$N > \frac{1,5}{4\pi 10^{-7} \times 30 \cdot 10^{-2} \times \ln\left(\frac{2+30}{2}\right) \times 50 \times 1000}$$

$$N > 28,7.$$

Il faut donc au minimum 29 spires afin que la lampe puisse s'allumer.

5) Le circuit est donc maintenant équivalent à un circuit  $RL$ . On a donc le schéma suivant :



On a donc l'équation de maille qui est :

$$e = ri' + L \frac{di'}{dt}.$$

En remplaçant, on obtient :

$$L \frac{di'}{dt} + ri' = E\sqrt{2} \sin(2\pi ft).$$

On passe en notations complexes en prenant la partie imaginaire. On a donc en posant  $\omega = 2\pi f$ :

$$(jL\omega + r)\underline{i}' = E\sqrt{2}e^{j\omega t}.$$

$$\underline{i}' = \frac{E\sqrt{2}e^{j\omega t}}{r + jL\omega}.$$

Le courant efficace est donc égal à :

$$I' = \frac{E}{\sqrt{r^2 + (L\omega)^2}}.$$

Le déphasage vaut :

$$\tan \phi' = -\frac{L\omega}{r}.$$

L'intensité est définie en complexe par  $\underline{i}' = I'\sqrt{2}e^{j(\omega t + \phi')}$ . La convention est ici en fonction d'un sinus donc pour revenir au courant réel, il faut prendre :

$$i' = \text{Im}(\underline{i}') = I'\sqrt{2} \sin(\omega t + \phi') = I'\sqrt{2}(\sin \omega t \cos \phi' + \cos \omega t \sin \phi').$$

Pour retrouver les expressions de  $\phi'$  il suffit d'identifier les deux expressions soit :

$$\underline{i}' = \frac{E\sqrt{2}e^{j\omega t}}{r + jL\omega} = \frac{E\sqrt{2}e^{j\omega t}}{r^2 + L^2\omega^2}(r - jL\omega)$$

$$\underline{i}' = \frac{E\sqrt{2}}{r^2 + L^2\omega^2}(\cos \omega t + j \sin \omega t)(r - jL\omega).$$

On prend la partie imaginaire :

$$i' = \frac{E\sqrt{2}}{r^2 + L^2\omega^2}(r \sin \omega t - L\omega \cos \omega t).$$

En identifiant, on trouve bien que :

$$\tan \phi' = -\frac{L\omega}{r}.$$

Les applications numériques donnent :

$$I' = \frac{1,5}{\sqrt{10^2 + (10 \cdot 10^{-3} \times 2\pi \times 50)^2}}$$

$$I' = 0,14 \text{ A.}$$

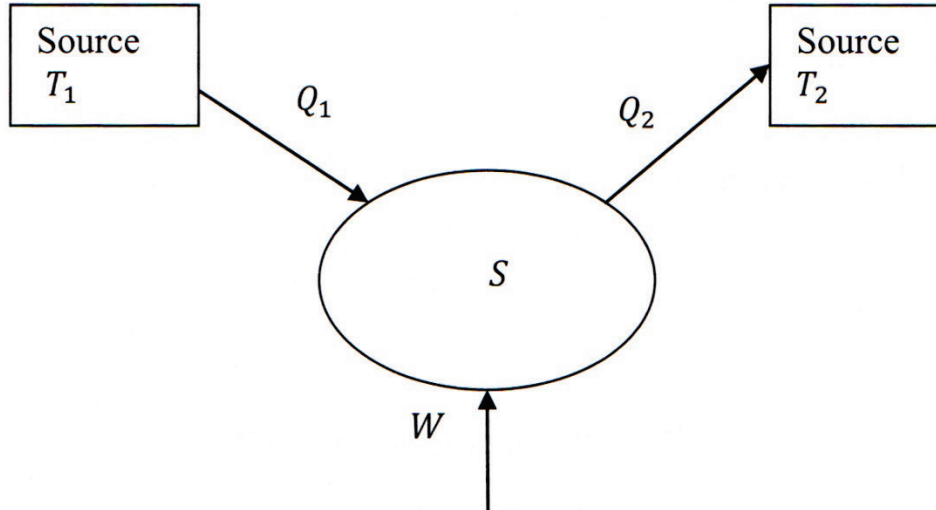
$$\tan \phi' = -\frac{10 \cdot 10^{-3} \times 2\pi \times 50}{10} = -\frac{\pi}{10}$$

$$\phi' = -0,3 \text{ rad.}$$

## 9b - Réfrigérateur

On commence par définir le système  $S$  (fluide réfrigérant) qui reçoit le travail  $W$ , le transfert thermique  $Q_1$  de la source froide et le transfert thermique  $-Q_2$  de la source chaude.

*Attention aux définitions qui sont différentes de celles de votre cours.*



L'efficacité est définie par le rapport gain sur dépense. Le gain correspond au transfert thermique prélevé à la source froide donc ici à  $Q_1$  et la dépense correspond au travail fourni par le moteur  $W$ .

D'où l'expression de l'efficacité :

$$\varepsilon = \frac{Q_1}{W}.$$

Il faut donc exprimer  $Q_1$  en fonction de  $W$ .

On applique le premier principe de la thermodynamique au système  $S$  pour un cycle :

$$\Delta U = W + Q_1 - Q_2 = 0.$$

*Il faut prendre les grandeurs reçues par le système.*

On applique ensuite le deuxième principe de la thermodynamique au système  $S$  pour un cycle :

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

On obtient donc un système de deux équations qui va nous permettre de trouver une relation entre  $W$  et  $Q_1$  :

$$\begin{aligned} W + Q_1 - Q_2 &= 0 \\ \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} &= 0. \end{aligned}$$

On exprime  $Q_2$  dans la deuxième équation :

$$Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

Puis on remplace dans la première équation :

$$W + Q_1 - Q_1 \frac{T_2}{T_1} = 0.$$

De là on en déduit :

$$Q_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = -W.$$

D'où l'efficacité :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{T_1}{T_2 - T_1}.$$

2) On utilise la relation donnée dans l'énoncé :

$$\left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)_{\text{réel}} = k \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)_{\text{réversible}}.$$

Or en utilisant les résultats de la question 1) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)_{\text{réversible}} &= \frac{T_2}{T_1}. \\ \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)_{\text{réel}} &= k \frac{T_2}{T_1}. \end{aligned}$$

On reprend l'expression du premier principe de la thermodynamique :

$$W + Q_1 - Q_2 = 0$$

qui reste inchangé car ne dépend pas de la réversibilité de la transformation.

On exprime ensuite  $W$  en fonction de  $Q_1$  :

$$W = Q_2 - Q_1 = Q_1 \left(k \frac{T_2}{T_1} - 1\right)$$

On trouve alors l'efficacité réelle :

$$\boxed{\varepsilon' = \frac{T_1}{kT_2 - T_1}.$$

3) Reste à faire les applications numériques :

$$\varepsilon = \frac{T_1}{T_2 - T_1} = \frac{273 + 3}{20 - 3}$$

$$\boxed{\varepsilon = 16,23.}$$

$$\varepsilon' = \frac{T_1}{kT_2 - T_1} = \frac{273 + 3}{1,1 \times (273 + 20) - 273 - 3}$$

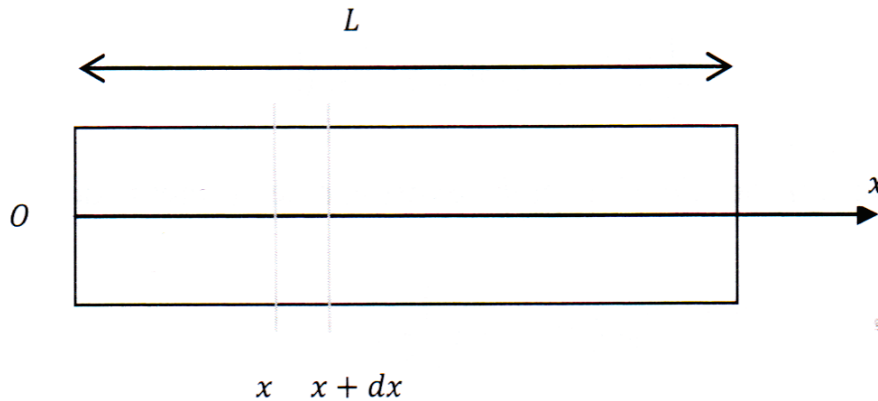
$$\boxed{\varepsilon' = 5,96.}$$

L'efficacité est donc bien inférieure pour la transformation réelle.

## Sujet X :

## 10a - Conduites cylindriques

1) On commence par faire le schéma de la tige de longueur  $L$  et de section  $\sigma$ . On appelle  $Ox$  l'axe de la tige. On a donc ici un problème de conduction unidirectionnelle le long de l'axe  $Ox$  avec des pertes latérales.



On va donc effectuer un bilan thermique sur la tranche de tige comprise entre  $x$  et  $x + dx$ . Ce système reçoit un flux thermique  $j_{th}(x)\sigma$  du côté gauche et reçoit un flux thermique  $-j_{th}(x + dx)\sigma$  du côté droit.

On met un signe moins car ce flux est effectivement perdu par le système.

On a directement utilisé les scalaires car le vecteur densité de courant thermique est colinéaire au vecteur surface.

Le système perd aussi une puissance par la surface latérale qui est donnée dans l'énoncé par :

$$dP = h(T - T_e)dx .$$

D'où la puissance reçue par le système :

$$dP_{reçue} = -h(T - T_e)dx .$$

En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système compris entre  $x$  et  $x + dx$ , on obtient :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = j_{th}(x)\sigma - j_{th}(x + dx)\sigma - h(T - T_e)dx$$

où  $\rho$  représente la masse volumique de la tige et  $c$  sa capacité thermique.

On n'était pas obligé de les introduire car on se place en régime permanent.

Donc :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 .$$



On obtient dans le cas du régime permanent l'équation suivante :

$$j_{th}(x)\sigma - j_{th}(x + dx)\sigma - h(T - T_e)dx = 0$$

or

$$j_{th}(x + dx) = j_{th}(x) + \frac{\partial j_{th}}{\partial x} dx$$

donc :

$$-\frac{\partial j_{th}}{\partial x} dx \sigma - h(T - T_e)dx = 0.$$

En simplifiant par  $dx$ , on trouve alors :

$$-\frac{\partial j_{th}}{\partial x} \sigma - h(T - T_e) = 0.$$

Reste à utiliser la loi de Fourier pour exprimer le vecteur densité de flux thermique :

$$\vec{j}_{th}(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{x}.$$

En utilisant la projection sur l'axe  $Ox$  pour la diffusion unidirectionnelle, on obtient :

$$j_{th}(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}.$$

L'équation de diffusion devient alors :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{h}{\sigma} (T - T_e) = 0.$$

On l'écrira plutôt sous la forme suivante afin de reconnaître une équation différentielle du second ordre à coefficients constants et avec second membre :

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{h}{\sigma \lambda} T = -\frac{h}{\sigma \lambda} T_e.}$$

*Penser à vérifier l'homogénéité de la formule.*

*Le premier terme a pour unité :  $K.m^{-2}$ .*

*Le coefficient  $h$  est égal à une puissance divisée par une température et divisée par une longueur ; donc  $h$  a pour unité :  $W.K^{-1}m^{-1}$ .  $\sigma$  est une surface et a comme unité :  $m^2$ . La conductivité thermique  $\lambda$  a pour unité :  $W.m^{-1}K^{-1}$ .*

*Alors le deuxième terme s'exprime en :  $K.m^{-2}$  comme le premier. Ceci confirme alors l'homogénéité de l'équation trouvée. Il faut penser à vérifier systématiquement l'homogénéité.*

*Ceci vous évitera beaucoup d'erreurs.*

2) On va donc résoudre l'équation différentielle trouvée en 1).

La solution particulière de cette équation vaut  $T = T_e$ .

La solution générale de l'équation sans second membre :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{h}{\sigma} T = 0$$

est obtenue en écrivant l'équation caractéristique :

$$\lambda r^2 - \frac{h}{\sigma} = 0.$$

Cette équation caractéristique admet comme solutions :

$$r = \pm \sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}$$

D'où la solution générale de l'équation sans second membre :

$$T(x) = \alpha e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x} + \beta e^{\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x}.$$

Il faut maintenant ajouter la solution particulière pour obtenir la solution de l'équation 1) :

$$T(x) = \alpha e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x} + \beta e^{\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x} + T_e.$$

Reste maintenant à déterminer les constantes d'intégration  $\alpha$  et  $\beta$ .

Pour y parvenir, on va utiliser les conditions aux limites lorsque  $x = 0$  et lorsque  $x$  tend vers l'infini.

On commence par  $x$  tendant vers l'infini. La température reste finie donc on en déduit  $\beta = 0$ .

La température est continue en  $x = 0$  donc  $T_1 = T(0) = \alpha + T_e$ .

On trouve alors :

$$\alpha = T_1 - T_e.$$

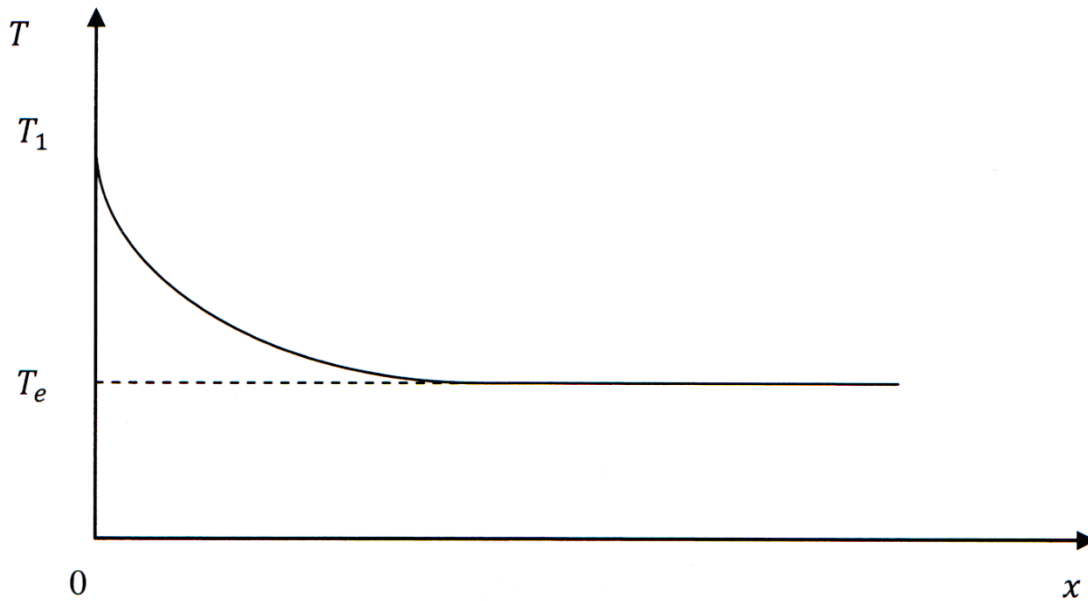
Finalement on en déduit l'expression de la température :

$$T(x) = (T_1 - T_e)e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x} + T_e.$$

On peut représenter, même si l'énoncé ne la demande pas, l'allure de la température en fonction de  $x$  afin d'avoir une idée de sa variation.

$T(x)$  est une fonction décroissante qui vaut  $T_1$  en  $x = 0$  et qui vaut  $T_e$  quand  $x$  tend vers l'infini.

D'où l'allure de la fonction température en fonction de la longueur  $x$  :



Pour la longueur de la tige, on pourra la supposer très grande si :

$$\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}} L \gg 1$$

donc pour :

$$L \gg \sqrt{\frac{\sigma\lambda}{h}}$$

Pour se rendre compte de la valeur de  $L$ , on peut faire une application numérique pour une section de  $1 \text{ cm}^2$ , et un coefficient  $h$  égal à environ  $30 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ .

On trouve alors :

$$L \gg \sqrt{\frac{10^{-4} \cdot 390}{30}} = 3,6 \text{ cm.}$$

3) On appelle  $T_{60}$  la température de fusion de la paraffine.

Pour le cuivre, on utilise le résultat de la question 2). On remplace  $x$  par  $x_1$  et  $\lambda$  par  $\lambda_{Cu}$  et on obtient la relation suivante :

$$T_{60} = (T_1 - T_e) e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Cu}}} x_1} + T_e.$$

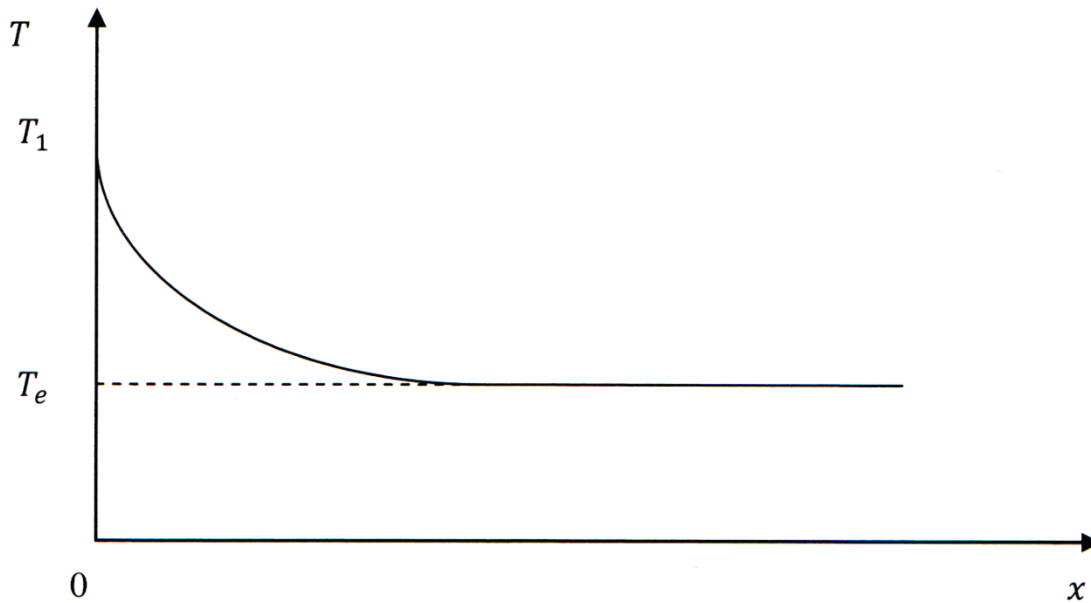
On procède de même pour la tige en étain et on obtient :

$$T_{60} = (T_1 - T_e) e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Sn}}} x_2} + T_e.$$

Reste alors à égaler les deux expressions :

$$(T_1 - T_e) e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Cu}}} x_1} + T_e = (T_1 - T_e) e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Sn}}} x_2} + T_e.$$

D'où l'allure de la fonction température en fonction de la longueur  $x$  :



Pour la longueur de la tige, on pourra la supposer très grande si :

$$\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}L \gg 1$$

donc pour :

$$L \gg \sqrt{\frac{\sigma\lambda}{h}}$$

Pour se rendre compte de la valeur de  $L$ , on peut faire une application numérique pour une section de  $1 \text{ cm}^2$ , et un coefficient  $h$  égal à environ  $30 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ .

On trouve alors :

$$L \gg \sqrt{\frac{10^{-4} \cdot 390}{30}} = 3,6 \text{ cm.}$$

3) On appelle  $T_{60}$  la température de fusion de la paraffine.

Pour le cuivre, on utilise le résultat de la question 2). On remplace  $x$  par  $x_1$  et  $\lambda$  par  $\lambda_{Cu}$  et on obtient la relation suivante :

$$T_{60} = (T_1 - T_e)e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Cu}}}x_1} + T_e.$$

On procède de même pour la tige en étain et on obtient :

$$T_{60} = (T_1 - T_e)e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Sn}}}x_2} + T_e.$$

Reste alors à égaliser les deux expressions :

$$(T_1 - T_e)e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Cu}}}x_1} + T_e = (T_1 - T_e)e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Sn}}}x_2} + T_e.$$

On peut maintenant simplifier les  $T_e$ , donc on obtient :

$$(T_1 - T_e)e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Cu}}}x_1} = (T_1 - T_e)e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Sn}}}x_2}$$

$(T_1 - T_e)$  est en facteur et donc se simplifie.

On arrive donc à l'égalité suivante :

$$e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Cu}}}x_1} = e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Sn}}}x_2}$$

Reste maintenant à appliquer le logarithme à chacun des membres et on obtient :

$$-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Cu}}}x_1 = -\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Sn}}}x_2.$$

On veut maintenant exprimer  $\lambda_{Sn}$ .

En élevant au carré l'expression précédente, on obtient :

$$\frac{h}{\sigma\lambda_{Cu}}x_1^2 = \frac{h}{\sigma\lambda_{Sn}}x_2^2.$$

On peut donc, en simplifiant par  $\frac{h}{\sigma}$ , trouver  $\lambda_{Sn}$  :

$$\boxed{\lambda_{Sn} = \lambda_{Cu} \frac{x_2^2}{x_1^2}}$$

*On constate immédiatement que l'expression est bien homogène.*

On peut alors faire l'application numérique afin de trouver  $\lambda_{Sn}$ .

$$\lambda_{Sn} = 390 \frac{(12,4)^2}{(30)^2}.$$

On peut laisser les longueurs en cm puisqu'elles interviennent sous forme d'une fraction.

On trouve alors :

$$\boxed{\lambda_{Sn} = 66,63 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}}.$$

Penser à préciser l'unité de la grandeur calculée.

Ce système peut illustrer le principe de fonctionnement du banc Kofler que l'on utilise en chimie pour déterminer le point de fusion d'un corps.

4) La puissance dissipée  $\Phi$  est égale à la puissance fournie par le thermostat. Elle est donc égale au flux du vecteur densité de courant thermique en  $x = 0$ . On obtient donc :

$$\Phi = j_{th}(0)\sigma$$

avec :

$$j_{th}(0) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(0).$$

Or :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x) = -\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}(T_1 - T_e)e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x}.$$

Donc en  $x = 0$ , on obtient :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0) = -\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}(T_1 - T_e).$$

On peut donc en déduire la puissance dissipée au niveau du thermostat :

$$\Phi = \lambda \sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}(T_1 - T_e)\sigma.$$

En simplifiant au maximum on obtient alors :

$$\boxed{\Phi = (T_1 - T_e)\sqrt{h\sigma\lambda}.}$$

On procède maintenant au calcul direct de la puissance dissipée.

Par définition, elle est égale à :

$$\Phi = \int_0^\infty h(T - T_e)dx.$$

On remplace  $T - T_e$  par son expression.

On obtient alors :

$$\Phi = \int_0^\infty h(T_1 - T_e)e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x} dx.$$

Reste ainsi à calculer la primitive de  $e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x}$  :

$$\Phi = -h(T_1 - T_e) \sqrt{\frac{\sigma\lambda}{h}} \left[ e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x} \right]_0^\infty.$$

$e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x}$  vaut 1 pour  $x = 0$ .

$e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x}$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers l'infini.

Et finalement :

$$\boxed{\Phi = (T_1 - T_e)\sqrt{h\sigma\lambda}.}$$

On a donc bien obtenu deux expressions identiques pour la puissance dissipée.

## 10b - Eau lourde

<b>S'approprier le problème.</b>	– Identifier les grandeurs physiques pertinentes, leur attribuer un symbole.
----------------------------------	--

- Système : glaçons de  $H_2O$  et  $D_2O$  dans le verre d'eau.
- Informations utiles dans les documents présentés :
  - D'après la photographie 1, le glaçon de  $D_2O$  coule alors que celui de  $H_2O$  flotte.
  - La structure de la glace fournie nous permettra de calculer la masse volumique de  $H_2O$  et de  $D_2O$ .
  - Le volume de la maille cristalline est donné.
  - La photographie de l'iceberg permet d'estimer la proportion de volume immergé dans l'eau.

<b>Analyser</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Organiser et exploiter ses connaissances ou les informations extraites.</li> <li>– Déterminer et énoncer les lois physiques qui seront utilisées.</li> <li>– Évaluer quantitativement les grandeurs physiques inconnues et non précisées.</li> <li>– Établir une stratégie de résolution.</li> </ul>
-----------------	---

- Données supposées être connues :
  - $D$  est un des isotopes de l'hydrogène. Son écriture symbolique est  ${}^2H$ ,
  - la constante d'Avogadro :  $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ,
  - les masses molaires atomiques de  ${}^1H$  et  ${}^2H$ .
- Hypothèses à faire :
  - L'eau lourde cristallise avec la même structure que  $H_2O$  et les mêmes paramètres de maille.
  - Même si la photographie de l'iceberg est réalisée dans l'eau de mer (donc de l'eau salée), il est possible, grâce à cette photographie, d'évaluer la proportion immergée de l'iceberg, et de le réinvestir dans le cadre du glaçon dans l'eau.
- La stratégie sera de calculer la masse volumique de  $D_2O$  solide et de la comparer à celle de  $H_2O$  liquide et de faire de même avec  $H_2O$  solide et  $H_2O$  liquide.
- Deux voies de résolution peuvent être adoptées :
  - un point de vue microscopique avec l'utilisation de la maille fournie. Des calculs de cristallographie seront alors réalisés.
  - un point de vue macroscopique, avec l'utilisation de l'équilibre mécanique du glaçon et de la poussée d'Archimède.

<b>Réaliser</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Mener la démarche jusqu'au bout afin de répondre explicitement à la question posée.</li> <li>– Savoir mener efficacement les calculs analytiques et la traduction numérique.</li> </ul>
-----------------	--

Première voie de résolution :

- Population de la maille (il suffit de compter le nombre d'atomes d'oxygène pour connaître le nombre de molécules d'eau) :  $Z(H_2O) = 8 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{4} + 2 \times 1 = 4$  molécules d'eau. On peut le vérifier en comptant le nombre d'atomes d'hydrogène :  $Z(H) = 4 \times \frac{1}{4} + 7 \times 1 = 8$  atomes d'hydrogène.
- Volume de la maille : on trouve  $V = a^3 \sqrt{2}$  avec la relation  $c/a$  donnée.
- Expression de la masse volumique de  $H_2O$  et  $D_2O$  :

$$\rho(X_2O) = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{Z(X_2O) M(X_2O)}{N_a a^3 \sqrt{2}}$$

## Applications numériques :

$$\rho(H_2O_{\text{solide}}) = \frac{4 \times 18 \times 10^{-3}}{6,02 \times 10^{23} \times (452 \times 10^{-12})^3 \times \sqrt{2}} = 915,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho(D_2O_{\text{solide}}) = \frac{4 \times 20 \times 10^{-3}}{6,02 \times 10^{23} \times (452 \times 10^{-12})^3 \times \sqrt{2}} = 1018 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

On a donc  $\rho(D_2O_{\text{solide}}) > \rho(H_2O_{\text{liquide}}) > \rho(H_2O_{\text{solide}})$ . Il est normal que le glaçon de  $D_2O$  soit au fond du verre contrairement au glaçon de  $H_2O$  qui est en partie émergé.

Deuxième voie de résolution :

Le glaçon de  $H_2O$  flotte à la surface de l'eau liquide : l'équilibre est obtenu lorsque le poids et la poussée

d'Archimède se compensent exactement.

On peut écrire :  $\rho(H_2O_{liquide}) V_{immerg} g = \rho(H_2O_{solide}) V_{total} g$ .

Soit :  $\frac{V_{immerg}}{V_{total}} = \frac{\rho(H_2O_{solide})}{\rho(H_2O_{liquide})}$ .

Sur la photographie 2, représentant un iceberg, on peut estimer que 10% du volume total est émergé (c'est un ordre de grandeur que les élèves devraient connaître).

On a alors :  $0,9 = \frac{\rho(H_2O_{solide})}{\rho(H_2O_{liquide})}$ .

On en déduit que :  $\rho(H_2O_{solide}) = 0,9 \rho(H_2O_{liquide}) = 0,9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

En ce qui concerne  $D_2O$  solide, sa masse molaire est augmentée de  $2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  par rapport aux  $18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  de  $H_2O$  solide, donc on peut en déduire qu'à volume constant, sa masse est plus grande.

On a alors la valeur  $\rho(D_2O_{solide}) = \frac{20}{18} \rho(H_2O_{solide}) = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

On trouve alors que le glaçon de  $D_2O$  a la même masse volumique que l'eau liquide... Il est alors possible de discuter sur le fait que cette approche n'est pas la meilleure. En effet, la photographie représente un iceberg dans l'eau de mer, soit de l'eau salée !

<b>Valider</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Discuter de la pertinence du résultat trouvé (identification des sources d'erreur, choix des modèles, formulation des hypothèses,...).</li> <li>– Étudier des cas limites plus simples dont la solution est plus facilement vérifiable ou bien déjà connue</li> </ul>
----------------	--

Le résultat montrant que le glaçon de  $H_2O$  flotte est cohérent avec ce que l'étudiant connaît et avec la photographie 2.

De plus, le nom « eau lourde » semble valider le résultat qui dit que le glaçon de  $D_2O$  se trouve au fond du verre.

Un regard plus critique peut être amené sur la voie de résolution 2 car :

- la méthode d'évaluation du volume immergé est plus approximative
- la photographie 2 montre un « glaçon » (iceberg) dans de l'eau salée et non dans de l'eau pure.

L'étudiant peut exercer son esprit critique en remarquant que les mêmes paramètres de maille ont été considérés pour  $D_2O$  solide et pour  $H_2O$  solide alors que le rayon atomique de  $D$  est vraisemblablement plus grand que celui de  $H$  : les paramètres de maille de l'eau deutérée sont sans doute plus grands que ceux de l'eau non deutérée.



## Sujet XI :

## 11a - Potentiel de Yukawa

1) On donne l'expression du potentiel qui ne dépend que de  $r$ . Le problème est donc à symétrie sphérique. Le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire et on a donc la relation suivante :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V.$$

En coordonnées sphériques pour un potentiel qui ne dépend que de  $r$ , on a :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r \\ \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{qe^{-\frac{r}{a}}}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \vec{e}_r\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{qe^{-\frac{r}{a}}}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{ra} \right) \vec{e}_r.}$$

On vérifie que le champ est bien homogène. Un champ électrique est homogène à charge divisée par  $\epsilon_0$  et divisée par une distance au carré. Ici le terme  $e^{-\frac{r}{a}}$  est bien sans dimension.

2) On détermine maintenant le flux  $\phi$  du champ à travers une sphère de rayon  $r$ . On a :

$$\phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS}.$$

Or  $\vec{E}$  et  $\vec{dS}$  sont colinéaires donc :

$$\phi = \oiint E dS.$$

Mais  $E$  ne dépend que de  $r$ , donc :

$$\phi = E \oiint dS.$$

On trouve finalement :

$$\phi = E(r)4\pi r^2.$$

En remplaçant avec l'expression du champ :

$$\phi = \frac{qe^{-\frac{r}{a}}}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{ra} \right) 4\pi r^2$$

et en simplifiant :

$$\phi(r) = \frac{qe^{-\frac{r}{a}}}{\epsilon_0} \left( 1 + \frac{r}{a} \right).$$

En utilisant le théorème de Gauss, on a :

$$\phi(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}.$$

Lorsque  $r$  tend vers 0, alors :

$$\phi(r) \rightarrow \frac{q}{\epsilon_0} \text{ quand } r \text{ tend vers } 0.$$

On en déduit qu'il existe une charge ponctuelle  $q$  placée au centre 0.

Lorsque  $r$  tend vers  $+\infty$ , alors :

$$\phi(r) \rightarrow 0 \text{ quand } r \text{ tend vers } +\infty.$$

On en déduit que la charge totale est nulle.

Il existe donc une charge volumique négative répartie dans l'espace.

3) On détermine le flux à travers la sphère de rayon  $r + dr$  :

$$\phi(r + dr) = \frac{Q_{int}(r + dr)}{\epsilon_0}.$$

De même pour le sphère de rayon  $r$ , on a :

$$\phi(r) = \frac{Q_{int}(r)}{\epsilon_0}.$$

Donc en faisant la différence, on obtient le flux à travers la couronne sphérique :

$$\phi(r + dr) - \phi(r) = \frac{\rho 4\pi r^2 dr}{\epsilon_0}.$$

Et la différence des charges intérieures est égale à la charge contenue dans la couronne sphérique considérée, c'est-à-dire à  $\rho 4\pi r^2 dr$ .

On obtient l'équation suivante :

$$\frac{d\phi}{dr} dr = \frac{\rho 4\pi r^2 dr}{\epsilon_0}.$$

On en déduit la densité volumique de charges après simplifications :

$$\rho = \frac{\epsilon_0}{4\pi r^2} \frac{d\phi}{dr}.$$

En utilisant l'expression du flux de la question 2), on obtient :

$$\rho = \frac{\epsilon_0}{4\pi r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{qe^{-\frac{r}{a}}}{\epsilon_0} \left( 1 + \frac{r}{a} \right) \right)$$

$$\rho = \frac{qe^{-\frac{r}{a}}}{4\pi r^2} \left( -\frac{1}{a} \left( 1 + \frac{r}{a} \right) + \frac{1}{a} \right)$$

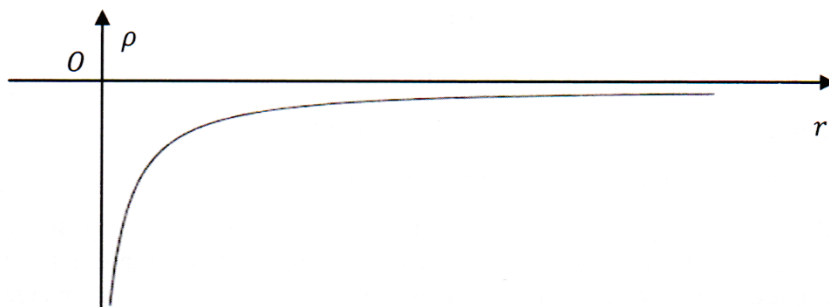
$$\rho = -\frac{qe^{-\frac{r}{a}}}{4\pi r a^2}.$$

On trouve donc une densité volumique de charges négatives.

On aurait pu aussi utiliser la loi locale suivante :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Cette charge diverge quand  $r$  tend vers 0. Cette charge volumique tend vers 0 quand  $r$  tend vers l'infini. D'où l'allure de la charge volumique  $\rho$  en fonction de  $r$  :



4) On détermine la charge de la couronne sphérique considérée :  $dQ = \rho 4\pi r^2 dr$ .

On en déduit la charge surfacique  $\sigma$  :

$$\sigma = \frac{dQ}{dr} = \rho 4\pi r^2.$$

Et en remplaçant par la valeur de  $\rho$  :

$$\sigma = - \frac{qe^{-\frac{r}{a}}}{4\pi r a^2} 4\pi r^2.$$

En simplifiant on trouve :

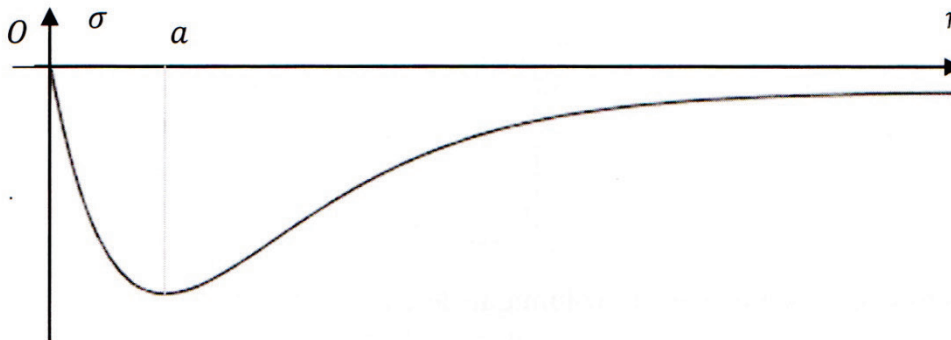
$$\sigma = - \frac{qre^{-\frac{r}{a}}}{a^2}.$$

On cherche les variations de  $\sigma(r)$ , on va donc calculer sa dérivée :

$$\frac{d\sigma(r)}{dr} = - \frac{q}{a^2} \left(1 - \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}}.$$

On obtient donc un minimum pour  $r = a$ .

On peut représenter  $\sigma$  en fonction de  $r$  :



Pour la valeur  $r = a$ , on a donc la charge de la couronne la plus importante (en valeur absolue).

5) Le potentiel Coulombien est donné pour une charge ponctuelle par :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

C'est le potentiel que l'on a quand on fait tendre  $r$  vers 0.

Le potentiel est alors écranté par la charge volumique négative.

On a un écrantage total lorsque l'on fait tendre  $r$  vers l'infini.

Ce potentiel de Yukawa peut modéliser l'atome d'hydrogène avec un noyau de charge  $q = e$  et une densité volumique de charges négatives qui représente le nuage électronique. On a estimé dans la question précédente la taille du nuage électronique qui est de l'ordre de  $a$ .

6) On ne peut pas trouver de modèle équivalent en gravitation car il n'existe pas de masses négatives.

## 11b - Dismutation des ions hypochlorites

1°) Soit :  $\text{ClO}^- \rightarrow 1/3.\text{ClO}_3^- + 2/3\text{Cl}^-$

$$\text{On a } v = k[\text{A}]^2 \text{ donc } \frac{1}{[\text{A}]} - \frac{1}{[\text{A}]_0} = \alpha kt \Rightarrow [\text{ClO}^-] = \frac{[\text{ClO}^-]_0}{1 + kt[\text{ClO}^-]_0}$$

2°) Il reste 70% donc  $t = \frac{1}{k[\text{ClO}^-]_0} \left( \frac{1}{0.7} - 1 \right) = 1380\text{s} = 23\text{min}$

3°) On a  $t$  proportionnel à  $k$  donc  $\frac{t}{t'} = \frac{k'}{k} = \frac{Ae^{-\frac{E_a}{R}(\frac{1}{T'})}}{Ae^{-\frac{E_a}{R}(\frac{1}{T})}}$   
 $\Rightarrow t' = te^{\frac{E_a}{R}(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'})} = 556\text{s} = 9,3\text{min}$

## Sujet XII :

### 12a - Câble coaxial

1) La forme du champ magnétique est donné par :

$$\vec{B} = B(r, \theta, z)\vec{e}_\theta.$$

Le problème est invariant par rotation autour de l'axe  $Oz$ , donc le champ ne dépend pas de l'angle  $\theta$ . Donc :

Le champ magnétique vérifie l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

On se place en régime quasi-permanent, donc on peut négliger le courant de déplacement. On a donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Le théorème de Stokes est donné par :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

On en déduit le théorème d'Ampère :

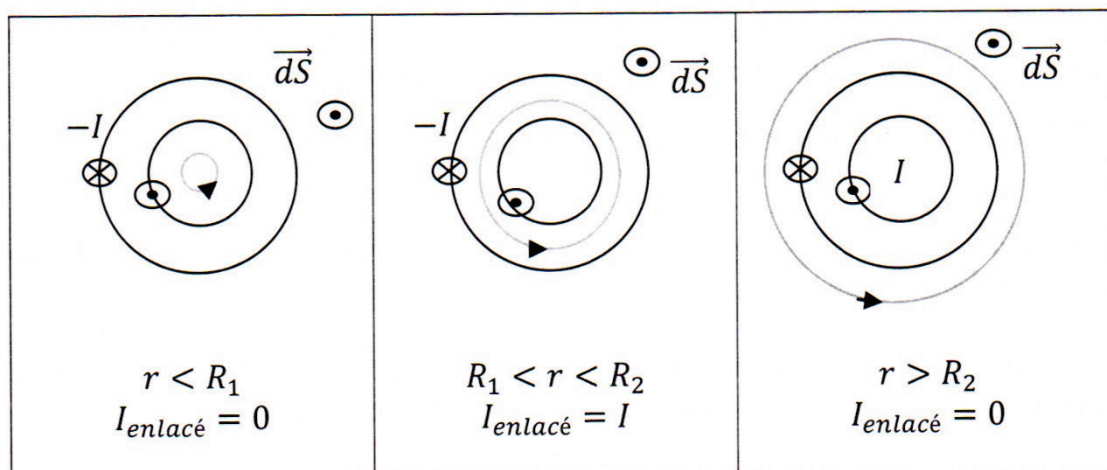
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

En calculant la circulation du champ magnétique sur une ligne de champ (ici un cercle de rayon  $r$ ), on trouve :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r).$$

On doit alors distinguer trois régions de l'espace pour calculer le flux du vecteur densité de courant à travers la surface s'appuyant sur le contour.

On place sur le schéma les trois contours d'Ampère orientés correspondant aux trois cas. La normale qui oriente le contour est sortante.





Pour  $r < R_1$ , on a :

$$\iint \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{dS} = 0$$

donc le champ magnétique est nul dans cette région :

$$\vec{B}(r < R_1) = 0.$$

Pour  $R_1 < r < R_2$ , on a :

$$\iint \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{dS} = \mu_0 I$$

donc :

$$2\pi r B(r, z, t) = \mu_0 I$$

soit :

$$B(r, z, t) = \frac{\mu_0 I_0 \cos(\omega t - kz)}{2\pi r}.$$

Et enfin pour  $r > R_2$ , on a :

$$\iint \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{dS} = \mu_0 (I - I) = 0$$

donc :

$$B(r > R_2) = 0.$$

En conclusion, le champ magnétique est non nul uniquement entre les deux conducteurs constituant le câble et vaut :

$$\boxed{\vec{B}(r, z, t) = \frac{\mu_0 I_0 \cos(\omega t - kz)}{2\pi r} \vec{e}_\theta.}$$

2) On utilise maintenant la relation de Maxwell-Faraday qui relie le champ électrique au champ magnétique :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

On peut commencer par les cas  $r < R_1$  et  $r > R_2$ , où le champ magnétique est nul.

On trouve donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = 0.$$

Il s'agit donc d'un champ électrostatique que l'on prendra égal à 0 car on s'intéresse ici uniquement à un champ variable au cours du temps.

On va donc se placer entre les deux conducteurs, c'est-à-dire pour :

$$R_1 < r < R_2.$$

Le problème est invariant par rotation autour de l'axe  $Oz$ , donc le champ électrique ne dépend pas de l'angle  $\theta$ .

On ne connaît pas l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques, donc on va utiliser le théorème de Stokes afin de calculer une circulation :

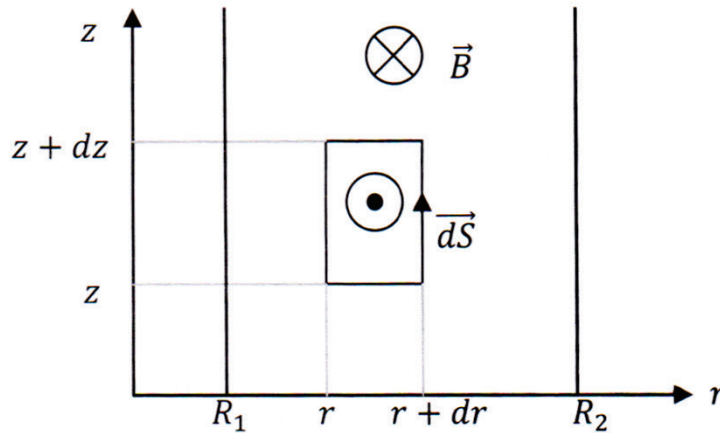
$$\oint \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = \iint \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

donc en utilisant la relation de Maxwell-Faraday, on obtient :

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = \iint -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}.$$

Il faut maintenant prendre le contour adéquat.

Le contour est soit une ligne de champ, soit un morceau de ligne de champ. Ici le champ électrique est suivant la direction  $\vec{e}_r$  et il dépend de  $r$  et de  $z$ . On prendra donc comme contour élémentaire un petit rectangle de hauteur  $dz$  suivant  $\vec{z}$  et de longueur  $dr$  suivant  $\vec{e}_r$ . On obtient donc le schéma suivant :



On exprime alors la circulation élémentaire du champ électrique sur le contour fermé :

$$dC = E(r, z, t)dr - E(r, z + dz, t)dr.$$

Le flux du champ magnétique à travers ce contour est égal à :

$$d\phi = -B(r, z, t)drdz.$$

En remplaçant dans la relation de Maxwell-Faraday, on obtient :

$$E_r(r, z, t)dr - E_r(r, z + dz, t)dr = \frac{\partial B(r, z, t)}{\partial t} drdz.$$

Reste maintenant à simplifier :

$$-\frac{\partial E(r, z, t)}{\partial z} drdz = \frac{\partial B(r, z, t)}{\partial t} drdz.$$

D'où la relation demandée :

$$\boxed{-\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial t}.$$

On peut maintenant remplacer par les expressions des champs :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu_0 I_0 \cos(\omega t - kz)}{2\pi r} \right) \\ \frac{\partial E}{\partial z} &= \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r} \sin(\omega t - kz). \end{aligned}$$



En intégrant par rapport à  $z$  et en ne gardant que les termes variables :

$$E = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r k} \cos(\omega t - kz).$$

D'où l'expression du champ électrique :

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r k} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_r.$$

3) On va maintenant établir l'équation de propagation entre les deux conducteurs.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) &= \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Reste maintenant à remplacer avec l'expression du champ, en utilisant l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \frac{\partial E}{\partial z} \vec{e}_\theta.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} &= k \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r k} \sin(\omega t - kz) \vec{e}_\theta \\ \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} &= \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r} \sin(\omega t - kz) \vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

On réapplique le rotationnel :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x}\left(r \frac{\partial E}{\partial z}\right) \vec{z}$$

donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = k \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_r.$$

Puis, on calcule la dérivée seconde par rapport au temps :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r k} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_r.$$

En remplaçant dans l'équation de propagation :

$$k \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_r = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r k} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_r.$$

En simplifiant, on obtient :

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2$$

avec :

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}.$$

Donc en prenant la valeur positive :

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}}.$$

4) On calcule le vecteur de Poynting. Attention à prendre les expressions réelles des champs car le produit vectoriel n'est pas une opération linéaire.

Le vecteur de Poynting a pour expression :

$$\vec{\pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}.$$

En remplaçant :

$$\vec{\pi} = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r k} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_r \wedge \frac{\mu_0 I_0 \cos(\omega t - kz)}{2\pi r \mu_0} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{\pi} = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi^2 k r^2} I_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \vec{z}.$$

Le vecteur de Poynting donne la direction de propagation de l'énergie. Elle se propage donc suivant l'axe  $Oz$ .

On calcule maintenant le flux à travers une section du cylindre. On prend comme surface élémentaire une petite couronne comprise entre les rayons  $r$  et  $r + dr$  :

$$dS = 2\pi r dr.$$

Donc le flux élémentaire est égal à :

$$d\Phi = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi^2 k r^2} I_0^2 \cos^2(\omega t - kz) 2\pi r dr$$

donc :

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 \omega}{4\pi^2 k r^2} I_0^2 \cos^2(\omega t - kz) 2\pi r dr$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 \omega}{2\pi k} I_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 \omega}{2\pi k} I_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

On l'écrit en fonction de la célérité :

$$\Phi = \frac{\mu_0 c}{2\pi} I_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

On détermine la moyenne temporelle du flux :  $\langle \Phi \rangle = \frac{\mu_0 c}{4\pi} I_0^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$

5) On détermine maintenant la densité volumique d'énergie électromagnétique à l'aide de la formule suivante :

$$e = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

En remplaçant par les expressions des champs :

$$\begin{aligned} e &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r k} \cos(\omega t - kz) \right)^2 + \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I_0 \cos(\omega t - kz)}{2\pi r} \right)^2 \\ e &= \frac{(I_0 \cos(\omega t - kz))^2}{8\pi^2 r^2} \left( \varepsilon_0 \mu_0^2 \frac{\omega^2}{k^2} + \mu_0 \right) \\ e &= \frac{\mu_0 (I_0 \cos(\omega t - kz))^2}{4\pi^2 r^2}. \end{aligned}$$

On détermine la moyenne temporelle de la densité volumique d'énergie qui vaut :

$$\langle e \rangle = \frac{\mu_0 I_0^2}{8\pi^2 r^2}.$$

L'énergie contenue entre les deux conducteurs de hauteur  $v_e dt$  est égale au flux du vecteur de Poynting à travers la section du cylindre multiplié par  $dt$ . Donc :

$$\int_{R_1}^{R_2} \langle e \rangle 2\pi r dr v_e dt = \Phi dt.$$

On en déduit la vitesse de propagation de l'énergie :  $v_e = \frac{\langle \Phi \rangle}{\int_{R_1}^{R_2} \langle e \rangle 2\pi r dr}$ .

On calcule déjà l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} \langle e \rangle 2\pi r dr &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I_0^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I_0^2}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \\ \int_{R_1}^{R_2} \langle e \rangle 2\pi r dr &= \frac{\mu_0 I_0^2}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right). \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression de la vitesse, on trouve :

$$v_e = \frac{\frac{\mu_0 c I_0^2}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{\frac{\mu_0 I_0^2}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

et finalement après simplification :

$$\boxed{v_e = c.}$$

On trouve donc que l'énergie se propage à la vitesse de la lumière.

## 12b - La Pile

1°) Soit :

$$E_1 = E_1^0 + \frac{0,06}{2} \text{Log} \left( \frac{[\text{Hg}^{2+}]^2}{[\text{Hg}_2^{2+}]} \right) = 0,97\text{V} \text{ (pôle +)}$$

Et

$$E_2 = E_2^0 + \frac{0,06}{2} \log \left( \frac{[\text{Sn}^{4+}]}{[\text{Sn}^{2+}]} \right) = 0,09\text{V} \text{ (pôle -)}$$

d'où  $2\text{Hg}^{2+} + \text{Sn}^{2+} \rightarrow \text{Hg}_2^{2+} + \text{Sn}^{4+}$

2°) A l'équilibre  $E_1 = E_2 \Rightarrow K^\circ = \frac{[\text{Hg}_2^{2+}][\text{Sn}^{4+}]}{[\text{Sn}^{2+}][\text{Hg}^{2+}]^2} = 2,2 \cdot 10^{25}$

Avec un tableau d'avancement on obtient :  $[\text{Sn}^{2+}] = 0,5 \text{ mol/L}$ ,  $[\text{Hg}_2^{2+}] = 1,5 \text{ mol/L}$ ,  $[\text{Sn}^{4+}] = 0,51 \text{ mol/L}$  et  $[\text{Hg}^{2+}] = 2 \cdot 10^{-13} \text{ mol/L}$

Or :

$$Q = n(e^-)F = 2\Delta n(\text{Sn}^{4+})F = 4,8 \text{ kC}$$