

VI – Préparation CCP

Sujet I :

1a – Turbomachine avec changement d'état

a) $l_2 = h_v - h_l = 2454 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

b) L'isentropie de la détente permet d'écrire $s_E - s_D = 0$, exprimée par ailleurs en envisageant la transformation $DHFE$, où H est le point correspondant au liquide saturant à température T_1 . On obtient ainsi :

$$\frac{l_1}{T_1} + c_{\text{liq}} \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) - x_E \frac{l_2}{T_2} = 0.$$

On en déduit : $x_E = 0,68$.

c) $h_E = h_l + (h_v - h_l)x_E = 1753 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

d) $w_u = h_D - h_E = 1047 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

e) $h = u + pv$, donc $\Delta h \approx u_{\text{liq}}(p_1 - p_2) = 4 \text{ kJ.kg}^{-1}$, pour une opération quasi adiabatique. On en déduit donc que le travail fourni dans la pompe est négligeable devant celui cédé par la turbine, pour une même quantité de fluide traité.

f) Dans la chaudière, il n'y a pas de travail fourni : $q_c = h_D - h_G = h_D - h_H + h_H - h_G$ avec $h_D - h_H = l_1$ et $h_H - h_G = c_{\text{liq}}(T_1 - T_2)$. Ainsi, $q_c = 2675 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

Le rendement défini par : $\eta = \frac{w_u}{q_c}$ vaut donc 0,39.

Or, le rendement de Carnot pour ces températures est

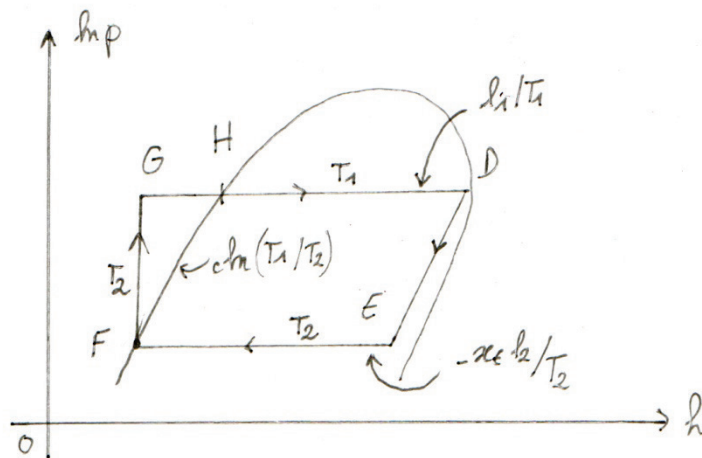
$$\eta_{\text{max}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0,44$$

L'irréversibilité de la transfor-

mation FH est responsable de cet écart.

g) Si D_m est le débit massique, $P = D_m w_u$ donc :

$$D_m = 0,0955 \text{ kg.s}^{-1}$$



1b - Circuit à capacité variable

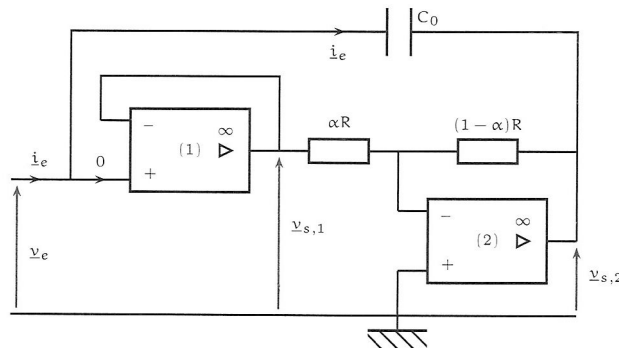
1°) Les ALI idéaux présentent une impédance infinie tel que :

$$\begin{cases} i_+ = 0 \\ i_- = 0 \end{cases}$$

En régime linéaire les ALI idéaux sont tels que :

$$v_+ = v_-$$

2°) Commençons par flécher le circuit et numéroter les amplificateurs opérationnels. La rétroaction de la sortie sur la borne - leur assure un fonctionnement en régime linéaire.



On cherche à montrer que $\underline{i_e} = jC\omega\underline{v_e}$ car c'est la relation courant-tension d'un condensateur.

Sur la borne 2- :

$$\frac{v_{s1}}{\alpha R} + \frac{v_{s2}}{(1-\alpha)R} = 0 \Rightarrow v_{s2} = \frac{\alpha-1}{\alpha} v_e$$

De plus :

$$\begin{aligned} i_e &= jC_0\omega(v_{1+} - v_{s2}) = jC_0\omega(v_{s1} - v_{s2}) \\ \Leftrightarrow i_e &= jC_0\omega\left(v_e - \frac{\alpha-1}{\alpha}v_e\right) = jC_0\omega v_e\left(1 - \frac{\alpha-1}{\alpha}\right) = \frac{jC_0\omega v_e}{\alpha} \\ &\Rightarrow C = \frac{C_0}{\alpha} \end{aligned}$$

3°) On règle facilement la capacité équivalente à l'aide du potentiomètre en ajustant la valeur de α

Sujet II :

2a – Ondes se propageant entre deux plans

1) Pour déterminer le champ magnétique, utilisons l'équation de MAXWELL-FARADAY :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\text{rot } \vec{E} \\ &= E_0 \left(\frac{\pi}{a} \cos \left(\frac{\pi z}{a} \right) \cos (\omega t - kx) \vec{e}_x - k \sin \left(\frac{\pi z}{a} \right) \sin (\omega t - kx) \vec{e}_z \right). \end{aligned}$$

Intégrons cette équation par rapport au temps. À un champ statique près, qui ne participe pas à la propagation, nous obtenons :

$$\vec{B} = E_0 \left(\frac{\pi}{a\omega} \cos \left(\frac{\pi z}{a} \right) \sin (\omega t - kx) \vec{e}_x + \frac{k}{\omega} \sin \left(\frac{\pi z}{a} \right) \cos (\omega t - kx) \vec{e}_z \right).$$

2) Dans un plan $x = \text{cte}$, perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde, le champ électromagnétique dépend encore de z : l'onde n'est pas plane.

Le champ électrique de l'onde est transverse : $\vec{E} \cdot \vec{e}_x = 0$. Ce n'est pas le cas du champ magnétique. Nous pouvons aisément vérifier que les divergences de ces champs sont toutes deux nulles. Ce type d'onde est appelé onde transverse électrique (onde T.E.).

3) Le champ proposé est compatible avec les équations de MAXWELL si l'équation de MAXWELL-AMPÈRE est elle aussi vérifiée, soit $\text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Dans la mesure où il ne reste que cette seule équation à vérifier, nous pouvons aussi utiliser l'équation de propagation $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ (ou celle appliquée à \vec{B}). Nous obtenons ainsi la relation de dispersion :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{\pi^2}{a^2}.$$

La propagation n'est possible que pour $\omega > \omega_0 = \frac{\pi c}{a}$.

4) La vitesse de phase de cette onde, qui se propage dans la direction (Ox), est :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}.$$

Curieusement, celle-ci est supérieure à c .

5) La densité d'énergie électromagnétique est $e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$, soit :

$$e = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \left(\left(2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi z}{a} \right) \cos^2 (\omega t - kx) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cos^2 \left(\frac{\pi z}{a} \right) \sin^2 (\omega t - kx) \right).$$

Sa moyenne temporelle est :

$$\langle e \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \left(\left(2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi z}{a} \right) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cos^2 \left(\frac{\pi z}{a} \right) \right).$$

L'énergie contenue, en moyenne, dans le parallélépipède est $\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\epsilon_0 E^2}{4} a$.

6) Le vecteur de POYNTING de l'onde est $\vec{H} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$.

Sa moyenne temporelle $\langle \vec{H} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0} \frac{k}{\omega} \sin^2 \left(\frac{\pi z}{a} \right) \vec{e}_x$ nous donne le flux

moyen d'énergie à travers une section $S = \Delta y \Delta z = 1 \times a$: $\langle \Phi \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0} \frac{k}{\omega} \frac{a}{2}$.

7) La vitesse d'énergie est alors $v_e = \frac{\langle \Phi \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$.

Celle-ci est inférieure à c (fort heureusement !)

Nous verrons au chapitre 7 que cette vitesse d'énergie s'identifie avec la vitesse de

groupe v_g définie par $v_g = \frac{d\omega}{dk}$.

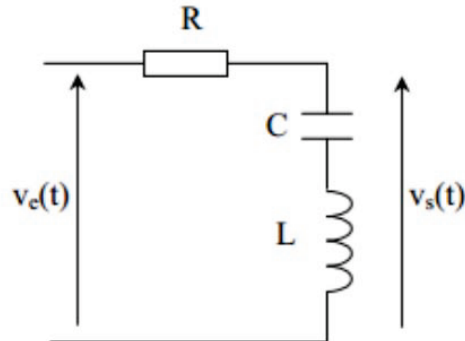
2b – NSA

1°) En France le secteur fonctionne à 50Hz 220V, aux USA c'est du 60Hz sous 110V.

2°)

On cherche à supprimer les fréquences liées au système d'acquisition branchés sur du 50 Hz. Il faut fabriquer un rejeteur de bande avec une fréquence centrale de 50 Hz.

On fabrique le circuit suivant :



La fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1-x^2}{1-x^2 + \frac{jx}{Q}}$

La fréquence centrale $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = 50 \text{ Hz}$ et le facteur de qualité vaut $Q = \frac{L\omega_0}{R}$

La bande rejetée vaut $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$

On veut $f_0 = 50 \text{ Hz}$ et Δf le plus faible.

On prend par exemple $L = 10 \text{ mH}$ et $C = 1 \text{ mF}$ et $R = 1 \text{ m}\Omega$.

Sujet III :

3a – Écoulement de Poiseuille dans un tuyau

1. *A priori*, \vec{v} est fonction de r , θ et z , mais pas du temps car l'écoulement est permanent. Comme la pesanteur est négligée, il y a physiquement une symétrie de révolution autour de l'axe z , donc \vec{v} ne dépend pas de θ et il reste $\vec{v} = f(r, z) \vec{u}_z$. Le fluide qui s'écoule est un liquide, dont l'incompressibilité se traduit par $\text{div } \vec{v} = 0$ dans tout l'écoulement, soit $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ partout d'après le formulaire d'analyse vectorielle. Par conséquent, f ne dépend pas de z et il reste $\vec{v} = f(r) \vec{u}_z$.

2. La loi de la quantité de mouvement appliquée à une particule mésoscopique (volume $d\tau$ de fluide) s'écrit

$$\underbrace{\rho d\tau \vec{a}}_{=\vec{0}} = -(\overrightarrow{\text{grad}} P) d\tau + \underbrace{\rho d\tau \vec{g}}_{\text{négligé}} + d\vec{F}_{\text{visc}},$$

où $d\vec{F}_{\text{visc}}$ est la résultante des actions de viscosité sur la particule.

D'après la forme du champ de vitesse, les lignes de courant sont des droites parallèles à l'axe du tuyau. L'écoulement étant permanent, les trajectoires des particules de fluide se confondent avec ces lignes, qui sont à $r = \text{cte}$, donc à $\vec{v} = \text{cte}$. Toute particule a ainsi un mouvement rectiligne uniforme, et son accélération \vec{a} est nulle. D'autre part, la pesanteur est négligée, donc il ne reste que $\overrightarrow{\text{grad}} P = d\vec{F}_{\text{visc}}$. Les actions de viscosité (cisaillement) sont parallèles à \vec{u}_z , donc $\overrightarrow{\text{grad}} P$ possède seulement une composante non nulle sur \vec{u}_z , soit

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0,$$

d'après l'expression du gradient en coordonnées cylindriques. Ces deux équations montrent que P est uniforme sur une section du tuyau orthogonale à \vec{u}_z .

3a)

Méthode

Viscosité dynamique

Pour un écoulement incompressible de la forme $\vec{v} = f(y) \vec{u}_x$, l'action de viscosité exercée par la couche de fluide située en y^+ sur celle située en y^- à travers une surface mésoscopique d'aire dS séparant les deux couches s'écrit

$$d\vec{F}_{\text{visc}} = \eta \frac{\partial f}{\partial y} dS \vec{u}_x.$$

L'adaptation de cette définition au cas d'un champ de vitesse de forme quelconque n'est pas triviale, surtout si la géométrie n'est pas cartésienne. Cependant, le champ étudié ici est similaire à celui de la définition, $\vec{v} = f(r) \vec{u}_x$. L'action de la couche r^+ sur la couche r^- à travers un élément mésoscopique de surface dS s'écrit donc

$$d\vec{F}_{\text{visc}} = \eta \frac{\partial f}{\partial r} dS \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad dS = r d\theta dz. \quad (1.12.1)$$

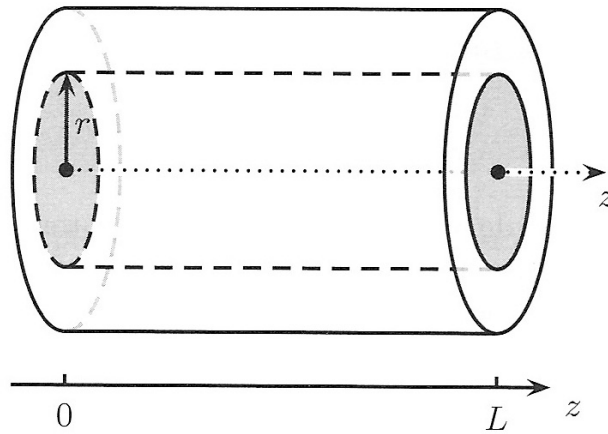


FIG. 1.12.2. Cylindre de fluide de longueur L et de rayon r .

3.b. La résultante des actions visqueuses sur un cylindre de fluide de rayon r et de longueur L s'obtient en intégrant la relation (1.12.1) sur la surface latérale de ce cylindre (voir figure 1.12.2),

$$\vec{F}_{\text{visc}} = \int_{z=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} d\vec{F}_{\text{visc}} = 2\pi r L \eta \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_z.$$

Par ailleurs, le cylindre de fluide est soumis aux actions de pression sur ses faces $z = 0$ et $z = L$, soit

$$P(z = 0) \pi r^2 \vec{u}_z - P(z = L) \pi r^2 \vec{u}_z.$$

On note \vec{p} la quantité de mouvement du cylindre de fluide. On lui applique ensuite la loi de la quantité de mouvement,

$$P(z = 0) \pi r^2 \vec{u}_z - P(z = L) \pi r^2 \vec{u}_z + 2\pi r L \eta \frac{df}{dr} \vec{u}_z = \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{=\vec{0}}.$$

Chaque particule de fluide du cylindre a un mouvement rectiligne uniforme, donc une quantité de mouvement constante. La quantité de mouvement \vec{p} du cylindre, qui est,

par construction, la somme de ces quantités de mouvement individuelles, est donc constante, d'où $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$. En projection sur \vec{u}_z , il reste

$$[P(0) - P(L)] \pi r^2 + 2\pi r L \eta \frac{df}{dr} = 0 .$$

3.c. Compte tenu de la condition d'adhérence du liquide aux parois ($f(R) = 0$), cette équation s'intègre en

$$f(r) = -\frac{P(0) - P(L)}{L} \frac{1}{4\eta} (r^2 - R^2) .$$

Le champ de vitesse s'écrit donc $\vec{v} = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} (R^2 - r^2) \vec{u}_z$.

4. Il a la même expression que celui étudié dans l'exercice 1.4 (voir page 4), en notant $v_0 \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} R^2$. On peut donc reprendre l'équation (1.4.1) (voir page 5) donnant

le débit volumique, $D_v = v_0 \frac{1}{2} \pi R^2$, soit $D_v = \frac{P_1 - P_2}{8\eta L} \pi R^4$. Cette relation s'intitule

loi de Hagen-Poiseuille, du nom des biologistes Hagen (allemand) et Poiseuille (français) qui ont travaillé dessus indépendamment vers 1840.

On peut dresser un tableau d'analogies entre la situation hydraulique et une résistance électrique R_{el} (voir tableau 1.12.1).

	Hydraulique	Électrique
Débit	D_v	i
Cause du débit	$P_1 - P_2$	$V_1 - V_2$
Loi associée	$P_1 - P_2 = R_{\text{hyd}} D_v$	$V_1 - V_2 = R_{el} i$

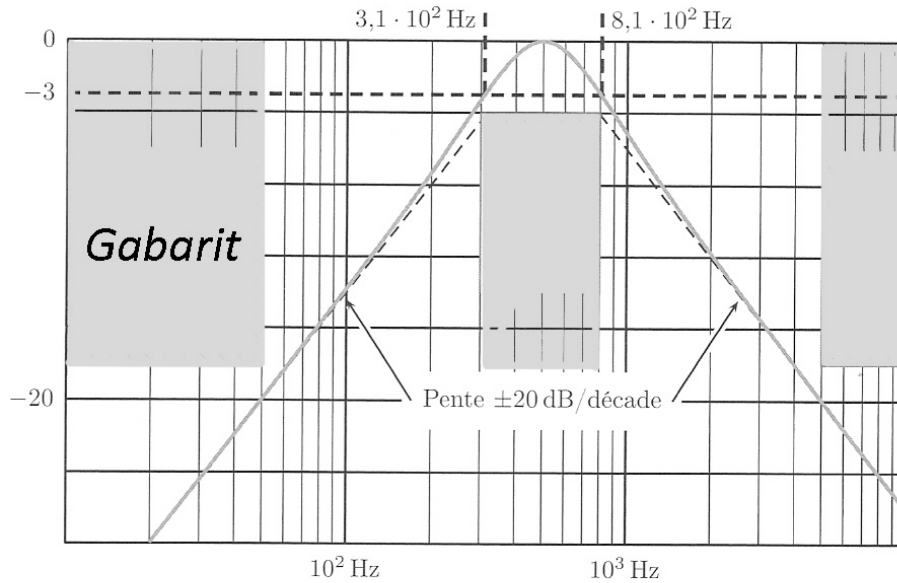
TABLEAU 1.12.1. Analogies entre un résistor électrique et un tuyau parcouru par un écoulement laminaire.

L'identification entre la loi de Hagen-Poiseuille et la loi d'Ohm conduit à définir la

résistance hydraulique du tuyau $R_{\text{hyd}} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$.

3b – Gabarit de filtre

a)



Filtre passe-bande et compatibilité avec un gabarit imposé.

b) Le gain sur la figure ne coupe pas les gabarits dessinés, le filtre respecte donc le cahier des charges. Les asymptotes du filtre ont des pentes de ± 20 dB/décade conformément à un filtre passe-bande d'ordre deux.

Sur la figure, on repère la fréquence centrale :

$$f_0 = 500 \text{ Hz} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{4\pi^2 L f_0^2} = 1 \mu\text{F}$$

c) Pour estimer la valeur du facteur de qualité Q , il faut repérer les fréquences de coupures à -3 dB, soit 310 Hz et 810 Hz, puis déterminer la largeur de la bande passante

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 1$$

La formule $Q = \frac{1}{RC\omega_0}$ permet de déterminer la valeur de la résistance :

$$R = \frac{1}{QC\omega_0} = 0,3 \text{ k}\Omega$$

Sujet IV :

4a – Rails de Laplace

1) Le phénomène d'induction est dû à une variation du flux du champ magnétique à travers un circuit. On distingue deux cas.

- L'induction de Lorentz : circuit mobile dans un champ magnétostatique.
- L'induction de Neumann : circuit fixe dans un champ magnétique variable.

Maintenant les deux peuvent se produire en même temps, le circuit peut être mobile dans un champ magnétique variable.

Les phénomènes d'inductions sont caractérisés par la fem induite :

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

La traduction mathématique de ce phénomène est la relation de Maxwell-Faraday qui est vue en deuxième année :

$$\overline{\text{rot}}\vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

À partir de cette relation, on trouve la loi de Faraday pour un circuit filiforme :

$$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$e = \iint \overline{\text{rot}}\vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$e = \iint - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

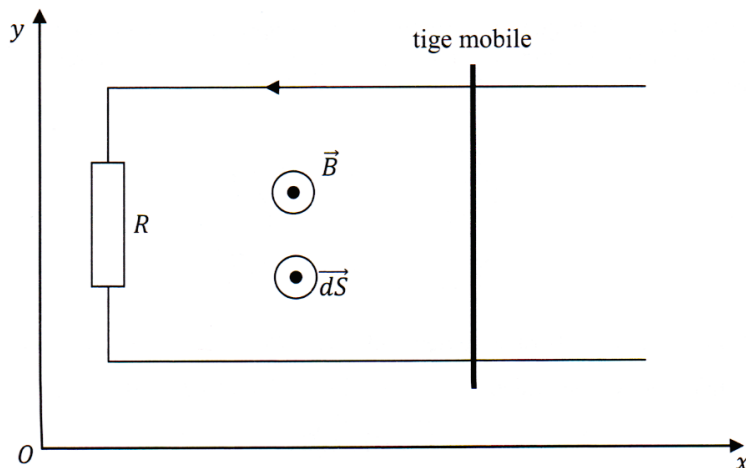
$$e = - \frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Et finalement, on arrive à :

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

2) On demande de faire un raisonnement qualitatif.

On commence déjà par analyser le phénomène général avant de répondre à la question. Ici la tige se déplace dans le sens des x croissants dans un champ magnétostatique. On a donc un phénomène d'induction de Lorentz qui crée une fem induite. Cette fem est à l'origine du courant induit dans le circuit. La tige, qui est donc parcourue par un courant, sera alors soumise à la force de Laplace (conducteur parcouru par un courant placé dans un champ magnétique). Avant de commencer, il faut déjà orienter le circuit.



La tige se déplace dans le sens des x croissants. D'après la loi de Lenz, la force de Laplace qui agit sur le circuit va s'opposer au mouvement de la tige. Donc le courant sera donc négatif avec l'orientation choisie.

Autre méthode

Le flux du champ magnétique est positif et croissant, donc d'après la loi de Lenz, le courant doit circuler pour s'opposer à l'augmentation du champ magnétique. Le courant est négatif de façon à créer un champ magnétique opposé à celui existant (on utilise la loi du tire bouchon : on tourne dans le sens du courant et la direction du tire bouchon donne le sens du champ magnétique propre).

3) Détermination de la fem induite par la loi de Faraday.

On commence par calculer le flux du champ magnétique :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

En tenant compte de l'orientation du circuit, on trouve :

$$\phi = Bax$$

donc :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -Ba\dot{x}.$$

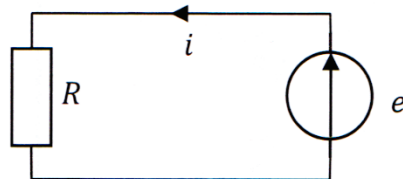
Pour déterminer la force de Laplace, on utilise son expression :

$$\vec{F}_l = \int i d\vec{l} \wedge \vec{B}.$$

On trouve alors :

$$\boxed{\vec{F}_l = iaB\vec{x}.$$

4) L'équation électrique est relativement simple à trouver puisque l'on a uniquement une fem induite et une résistance. On obtient le circuit électrique équivalent :

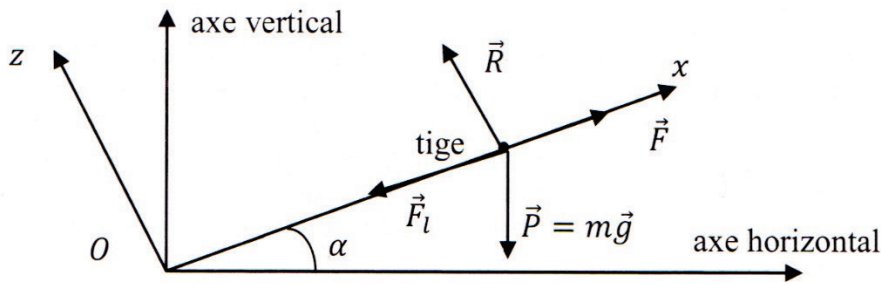


Il suffit donc d'écrire l'équation de maille : $e = Ri$.

En remplaçant avec les valeurs, on trouve l'équation électrique :

$$\boxed{-Ba\dot{x} = Ri.}$$

Maintenant, on va chercher l'équation mécanique. On détermine le système : la tige. On travaille dans le référentiel galiléen lié au laboratoire. Les forces exercées sur la tige sont : le poids, la force \vec{F} , les forces de réactions de la tige sur le support, la force de Laplace. On peut refaire un schéma de profil pour bien visualiser le poids.



On applique la deuxième loi de Newton à la tige :

$$m\vec{a} = \vec{R} + m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_l.$$

On projette sur l'axe Ox et on obtient l'équation mécanique :

$$\boxed{m\ddot{x} = F - mg \sin \alpha + iaB.}$$

5) On cherche maintenant l'équation vérifiée par la vitesse $v = \dot{x}$. De l'équation électrique, on sort le courant i :

$$i = -\frac{Ba\dot{x}}{R} = -\frac{Bav}{R}.$$

Reste alors à remplacer dans l'équation mécanique :

$$m \frac{dv}{dt} = F - mg \sin \alpha - \frac{Bav}{R} aB.$$

On peut alors simplifier l'équation :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{(Ba)^2}{mR} v = \frac{F - mg \sin \alpha}{m}.$$

On a donc une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

Penser à vérifier l'homogénéité.

La solution est de la forme :

$$v = \frac{R}{(Ba)^2} (F - mg \sin \alpha) + A e^{-t \frac{(Ba)^2}{mR}}.$$

On détermine la constante A à l'aide des conditions initiales :

À $t = 0$, la vitesse v est nulle :

$$v(t = 0) = 0 = \frac{R}{(Ba)^2} (F - mg \sin \alpha) + A.$$

Donc :

$$A = -\frac{R}{(Ba)^2} (F - mg \sin \alpha).$$

On trouve alors la vitesse :

$$v(t) = \frac{R}{(Ba)^2} (F - mg \sin \alpha) \left(1 - e^{-t \frac{(Ba)^2}{mR}} \right).$$

Pour avoir un mouvement selon les x croissants, il faut que :

$$F - mg \sin \alpha > 0.$$

On peut maintenant déterminer le courant i :

$$i = -\frac{Bav}{R}.$$

En remplaçant l'expression de v et en simplifiant, on trouve :

$$i = -\frac{(F - mg \sin \alpha)}{Ba} \left(1 - e^{-t \frac{(Ba)^2}{mR}} \right).$$

Remarque :

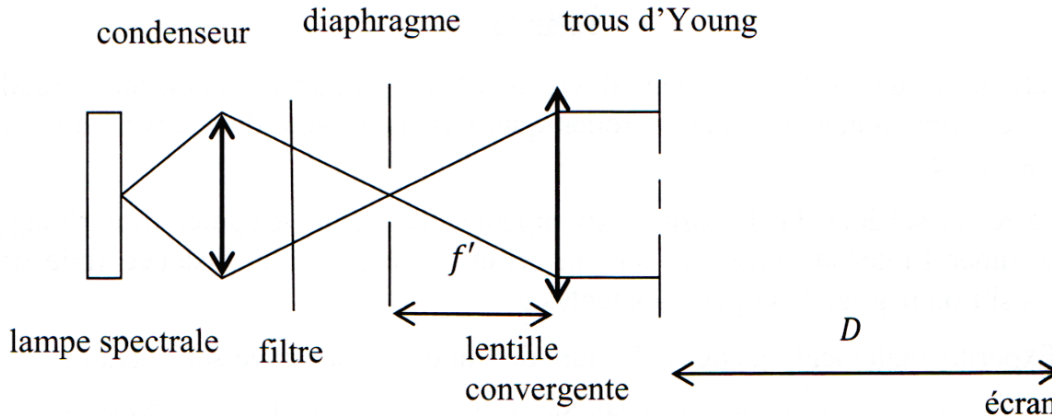
La force est homogène à iaB . Donc le terme $\frac{(F - mg \sin \alpha)}{Ba}$ est bien homogène à un courant.

4b - Fentes d'Young

1) Le dispositif expérimental est constitué d'une source monochromatique (laser, lampe spectrale+filtre,...), des trous d'Young et d'un écran.

Dans le cas du laser, on peut directement éclairer les trous d'Young sans utiliser de lentille car le faisceau est quasi parallèle.

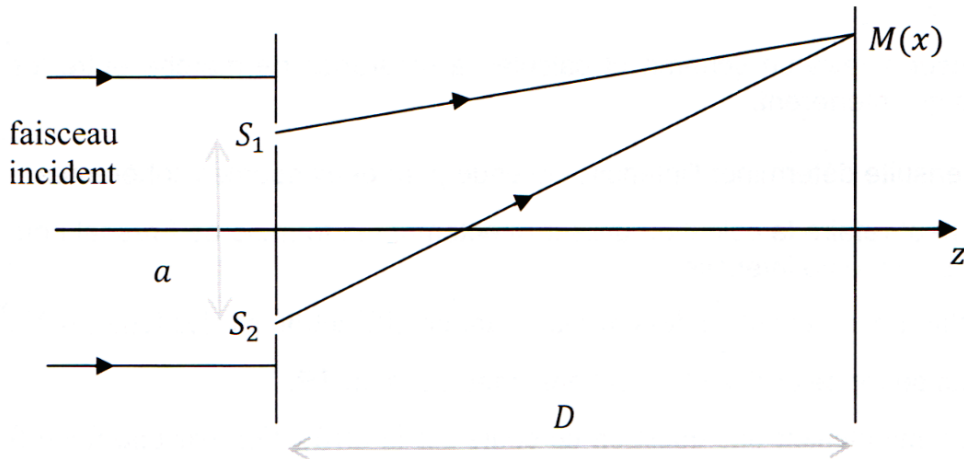
Dans le cas de la lampe spectrale, il faut fabriquer un trou source que l'on place au foyer d'une lentille convergente afin d'avoir un faisceau parallèle. On a donc le dispositif suivant :



L'interfrange correspond à la distance entre deux minima ou deux maxima d'intensité observée sur un écran. L'interfrange correspond donc à la période de l'éclairement.

On commence par calculer la différence de marche entre les deux rayons provenant des deux sources secondaires.

Pour cela on fait un schéma :



La différence de marche est égale à :

$$\delta = S_2M - S_1M.$$

On détermine chacune des distances :

$$S_2M = \sqrt{D^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2}.$$

On suppose que x et a sont petits devant la distance D , donc on peut alors pratiquer un développement limité à l'ordre 1 :

$$S_2M = D \sqrt{1 + \left(\frac{a+2x}{2D}\right)^2}$$

$$S_2M = D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a+2x}{2D}\right)^2\right)$$

$$S_2M = D \left(1 + \frac{a^2 + 4ax + 4x^2}{8D^2}\right).$$

Pour obtenir S_1M , il suffit de changer a en $-a$, on obtient alors :

$$S_1M = D \left(1 + \frac{a^2 - 4ax + 4x^2}{8D^2}\right).$$

En faisant la différence, on a :

$$\delta = D \left(1 + \frac{a^2 + 4ax + 4x^2}{8D^2}\right) - D \left(1 + \frac{a^2 - 4ax + 4x^2}{8D^2}\right)$$

donc après simplifications :

$$\delta = \frac{ax}{D}.$$

On peut alors utiliser la formule de Fresnel pour obtenir l'intensité des deux sources cohérentes de même intensité :

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)\right).$$

En remplaçant l'expression de la différence de chemin optique, on obtient :

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right)\right).$$

On peut maintenant déterminer la positions des minima $\mathcal{E} = 0$, pour :

$$\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right) = -1$$

$$\frac{2\pi ax}{\lambda D} = \pi + 2n\pi.$$

Les positions des minima sur l'écran sont donc :

$$x_n = \frac{\lambda D}{2a} + n \frac{\lambda D}{a}.$$

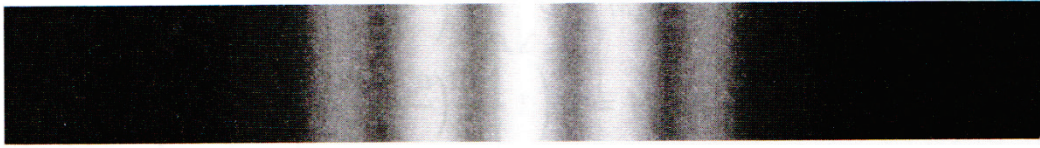
L'interfrange correspond à la distance entre deux minima consécutifs, c'est-à-dire :

$$i = x_n - x_{n-1}.$$

Donc en remplaçant, on obtient :

$$\boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}.$$

2) La figure de diffraction observée avec les deux trous d'Young à l'allure suivante : on observe les interférences à deux ondes modulées par la figure de diffraction par une fente :



3) L'angle de diffraction est donné par :

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{b}$$

On peut retrouver cette formule. Il suffit de calculer la transformée de Fourier de la fonction porte en fonction de la fréquence spatiale u soit :

$$\hat{t}(u) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{j2\pi ux} dx.$$

Reste maintenant à effectuer le calcul :

$$\begin{aligned} \hat{t}(u) &= \frac{1}{j2\pi u} \left[e^{j2\pi ux} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \\ \hat{t}(u) &= \frac{1}{j2\pi u} (e^{j\pi ub} - e^{-j\pi ub}) \\ \hat{t}(u) &= \frac{1}{j2\pi u} (2j \sin(\pi ub)) \\ \hat{t}(u) &= \frac{\sin(\pi ub)}{\pi u}. \end{aligned}$$

L'intensité diffractée par la fente est donc proportionnelle à $|\hat{t}(u)|^2$.

Cette intensité s'annule la première fois pour :

$$\begin{aligned} \pi ub &= \pi \\ u &= \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

On a donc la fréquence spatiale qui est donnée en fonction de l'angle d'observation par :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sin \theta}{\lambda} \\ \frac{\sin \theta}{\lambda} &= \frac{1}{b} \end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{\sin \theta = \frac{\lambda}{b}}$$

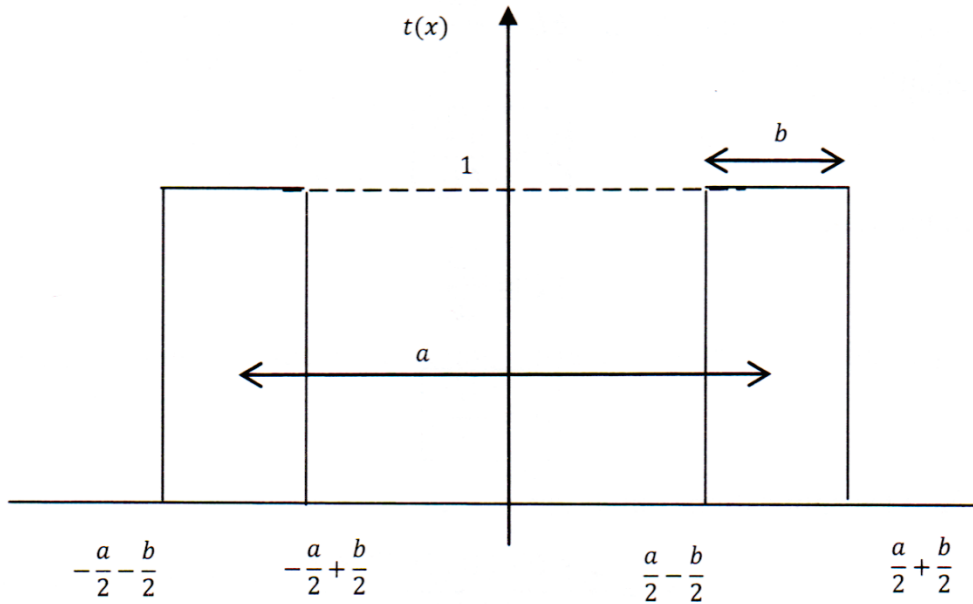
On peut refaire le calcul pour les fentes d'Young. Il faut calculer la transformée de Fourier des deux ouvertures soit :

$$\hat{t}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x) \exp(j2\pi ux) dx.$$

Le facteur de transparence est donc $t(x) = 1$ pour $-\frac{a}{2} - \frac{b}{2} < x < -\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ et $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} < x < \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.

Il vaut 0 ailleurs.

On représente le facteur de transparence $t(x)$:



Le calcul donne :

$$\widehat{t}(u) = \int_{-\frac{a}{2} - \frac{b}{2}}^{-\frac{a}{2} + \frac{b}{2}} \exp(j2\pi ux) dx + \int_{\frac{a}{2} - \frac{b}{2}}^{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}} \exp(j2\pi ux) dx.$$

On intègre chaque terme et on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{t}(u) &= \frac{1}{2j\pi u} [\exp(j2\pi ux)]_{-\frac{a}{2} - \frac{b}{2}}^{-\frac{a}{2} + \frac{b}{2}} + \frac{1}{2j\pi u} [\exp(j2\pi ux)]_{\frac{a}{2} - \frac{b}{2}}^{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}} \\ \widehat{t}(u) &= \frac{\exp(-j\pi ua)}{2j\pi u} (\exp(j\pi ub) - \exp(-j\pi ub)) \\ &\quad + \frac{\exp(j\pi ua)}{2j\pi u} (\exp(j\pi ub) - \exp(-j\pi ub)). \end{aligned}$$

On remarque que :

$$(\exp(j\pi ub) - \exp(-j\pi ub)) = 2j \sin(\pi ub)$$

En remplaçant, on obtient :

$$\hat{t}(u) = \frac{2j \sin(\pi ub)}{2j\pi u} (\exp(-j\pi ua) + \exp(j\pi ua))$$

$$\hat{t}(u) = \text{sinc}(\pi ub) (2 \cos(\pi ua)).$$

L'intensité est proportionnelle à $|\hat{t}(u)|^2$. L'intensité est donc égale à :

$$I = I_0 \text{sinc}^2(\pi ub) (2 \cos^2(\pi ua))$$

$$I = 2I_0 \text{sinc}^2(\pi ub) (1 + \cos(2\pi ua)).$$

On a donc bien la figure d'interférences à deux ondes modulée par la figure de diffraction à une fente de largeur b .

La largeur de la tache centrale correspond à la largeur de la tache de diffraction, c'est-à-dire :

$$\Delta L = \frac{2\lambda D}{b}.$$

On en déduit :

$$b = \frac{2\lambda D}{\Delta L}.$$

L'interfrange vaut :

$$i = \frac{\lambda D}{a}.$$

Soit :

$$a = \frac{\lambda D}{i}.$$

Reste à faire les applications numériques :

$$b = \frac{2 \times 632,8 \cdot 10^{-9} \times 2}{36 \cdot 10^{-3}}$$

$$b = 70,3 \mu\text{m}.$$

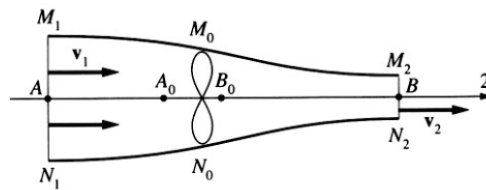
Et

$$a = \frac{632,8 \cdot 10^{-9} \times 2}{50 \cdot 10^{-6}}$$

$$a = 25 \text{ mm}.$$

Sujet V :

5a - Théorie unidimensionnelle de l'hélice



1°) Bilan de masse : $D_m = cste$, or $\mu = cste$ d'où $D_v = Sv = cste$
 $Sv = S_1 v_1 = S_2 v_2$

2°) Bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = D_{m2}\vec{v}_2 - D_{m1}\vec{v}_1 = D_m(v_2 - v_1)\vec{u}_x = \mu D_v(v_2 - v_1)\vec{u}_x$$

$$\Rightarrow P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \mu D_v(v_2 - v_1)v$$

3°) Bilan d'énergie :

$$\frac{DE_m}{Dt} = D_{m2}e_2 - D_{m1}e_1 = D_m(e_2 - e_1) = \frac{D_m(v_2^2 - v_1^2)}{2} = P$$

Donc :

$$P = \mu D_v \frac{(v_2^2 - v_1^2)}{2} = P$$

$$\Rightarrow \frac{D_m(v_2^2 - v_1^2)}{2} = \mu D_v(v_2 - v_1)v \Leftrightarrow v = \frac{(v_2 + v_1)}{2}$$

$$\Rightarrow P = \mu S(v_2 - v_1) \frac{(v_2 + v_1)^2}{4}$$

4°) Si $v_1 = 0$:

$$P = \mu S \frac{v_2^3}{4} \text{ et } F = \frac{\mu S v_2^2}{2}$$

Donc :

$$F = \mu S \frac{\left(\frac{4P}{\mu S}\right)^{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{1}{2} (4P)^{\frac{2}{3}} (\mu S)^{1/3}$$

L'hélicoptère décolle si : $F > Mg$

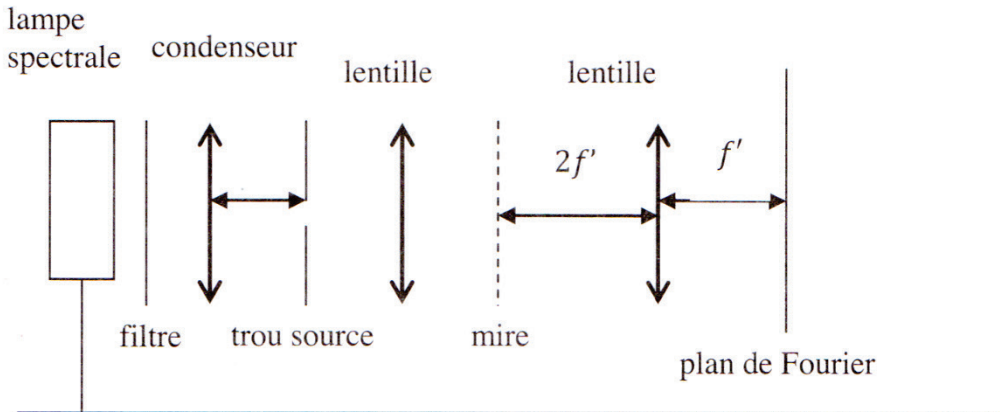
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (4P)^{\frac{2}{3}} (\mu S)^{\frac{1}{3}} > Mg$$

$$\Leftrightarrow (4P)^{\frac{2}{3}} > \frac{2Mg}{(\mu S)^{\frac{1}{3}}} \Leftrightarrow 4P > \frac{(2Mg)^{\frac{3}{2}}}{(\mu S)^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow P > \frac{1}{4} \frac{(2Mg)^{\frac{3}{2}}}{(\mu S)^{\frac{1}{2}}}$$

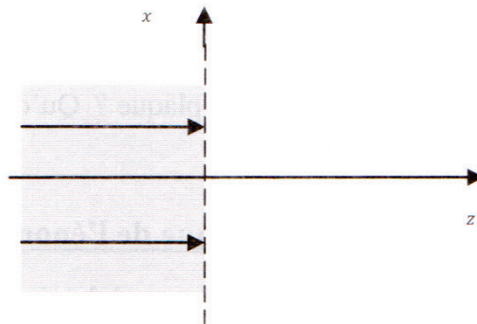
$$P > \frac{(Mg)^{3/2}}{(2\mu S)^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow P > \sqrt{\frac{(Mg)^3}{2\mu S}} \Leftrightarrow P > \sqrt{\frac{(Mg)^3}{2\mu \cdot \frac{\pi D^2}{4}}} \Leftrightarrow P > \sqrt{\frac{2(Mg)^3}{\mu \cdot \pi D^2}} = 400kW$$

5b – Mire sinusoidale (6pts)

1) Le montage expérimental utilise une source de lumière monochromatique, une mire sinusoidale et une lentille de projection. En général la source de lumière est constituée d'une lampe spectrale, d'un filtre et d'un condenseur. Il faut éclairer l'objet par une onde plane que l'on réalise à l'aide d'un trou source et d'une lentille. On a donc le montage suivant :



2) Le plan de Fourier est situé dans le plan focal de la lentille convergente. On éclaire la mire sinusoidale en incidence normale par une onde plane monochromatique.



La fonction de transfert de la mire est donnée par :

$$t(x, y) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{x}{a} \right) \right)$$

On peut donc l'écrire en notation complexe :

$$\underline{t}(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(e^{j2\pi \frac{x}{a}} + e^{-j2\pi \frac{x}{a}} \right).$$

On retrouve les trois fréquences spatiales U de la mire qui sont bien :

$$-\frac{1}{a}, 0, \frac{1}{a}.$$

L'onde est donc diffractée dans trois directions $\sin\theta = \lambda_0 U$ soit $\sin\theta = 0$, $\sin\theta = \frac{\lambda_0}{a}$ et $\sin\theta = -\frac{\lambda_0}{a}$. Donc dans le plan de Fourier, on obtient trois pics de diffraction situés en :

$$X = 0 ; X = f' \frac{\lambda_0}{a} ; X = -f' \frac{\lambda_0}{a}.$$

Et donc l'amplitude complexe de l'onde après traversée de la mire devient la suivante :

$$s(x, y, z = 0^+) = A_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(e^{j2\pi\frac{x}{a}} + e^{-j2\pi\frac{x}{a}} \right) \right) e^{j\omega t}$$

$$s(x, y, z = 0^+) = \frac{A_0}{2} e^{j\omega t} + \frac{A_0}{4} \left(e^{j(\omega t + 2\pi\frac{x}{a})} + e^{j(\omega t - 2\pi\frac{x}{a})} \right)$$

Pour une onde plane l'amplitude est donnée par :

$$s_p = a e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Pour une onde plane se propageant dans la direction θ , on a :

$$\vec{k} = k \cos \theta \vec{z} + k \sin \theta \vec{x}$$

avec $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

On superpose trois ondes planes de direction θ_i , on obtient donc :

$$s(x, y, z) = s_1 e^{j(\omega t - k \cos \theta_1 z - k \sin \theta_1 x)} + s_2 e^{j(\omega t - k \cos \theta_2 z - k \sin \theta_2 x)} + s_3 e^{j(\omega t - k \cos \theta_3 z - k \sin \theta_3 x)}$$

L'expression en $z=0$ devient :

$$s(x, y, z) = s_1 e^{j(\omega t - k \sin \theta_1 x)} + s_2 e^{j(\omega t - k \sin \theta_2 x)} + s_3 e^{j(\omega t - k \sin \theta_3 x)}$$

Et en identifiant avec l'expression pour la mire, on trouve :

$$\sin \theta_1 = 0$$

$$k \sin \theta_2 = \frac{2\pi}{a}$$

$$k \sin \theta_3 = -\frac{2\pi}{a}$$

D'où les trois angles de diffraction qui sont :

$$\theta_1 = 0$$

$$\sin \theta_2 = \frac{\lambda_0}{a}$$

$$\sin \theta_3 = -\frac{\lambda_0}{a}$$

Dans le plan de Fourier, on a donc la relation suivante pour les petits angles :

$$\tan \theta \approx \theta = \frac{X}{f'}$$

On peut aussi en déduire les amplitudes des ondes :

$$s_1 = \frac{A_0}{2}; s_2 = \frac{A_0}{4}; s_3 = \frac{A_0}{4}$$

On visualise dans le plan de Fourier trois taches de diffraction dont les intensités sont différentes. La tache centrale est 4 fois plus lumineuse que les deux autres.

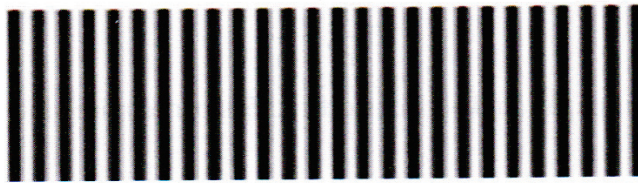


3) Le plan conjugué de la mire se trouve à la distance $4f'$ de la mire dans le cas de ce montage. Il est donc situé à la distance f' derrière le plan de Fourier et à la distance $d' = 2f'$ derrière la lentille.

Si on n'a pas pris le soin de placer la lentille de projection à la distance $d = 2f'$ de la mire. Il suffit d'écrire la relation de conjugaison entre la mire et le plan image. On a dans ce cas la relation suivante :

$$\frac{1}{d'} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f'}$$

Dans le plan de Fourier, on observe donc l'image de la mire avec un grandissement de -1 dans le cas du montage $4f'$. On a donc une alternance de franges sombres et brillantes.

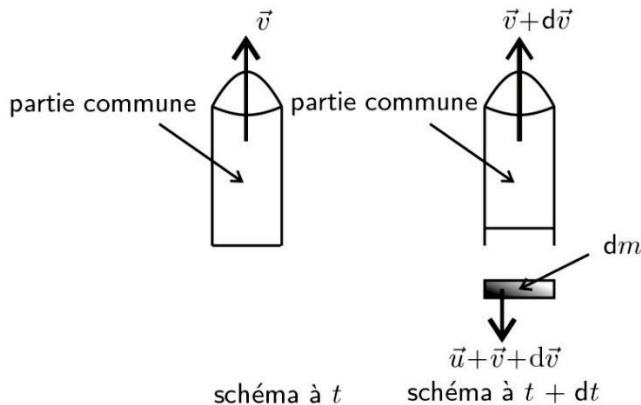


Pour avoir une teinte uniforme dans le plan image, il suffit de filtrer et de garder uniquement la composante continue. On place donc une plaque percée d'un trou dans le plan de Fourier pour ne conserver que la tache centrale.

Sujet VI :

6a - Fusée Ariane 5

1. Définition du système fermé :



Le référentiel absolu est le référentiel terrestre supposé galiléen. On appelle \vec{v} le vecteur vitesse de la fusée t , $d\vec{v}$ la variation du vecteur vitesse de la fusée pendant dt . Le vecteur vitesse de la fusée à $t + dt$ est donc $\vec{v} + d\vec{v}$. On se ramène à un système fermé Σ de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : fusée de vitesse \vec{v} de masse $m_f + m_g(t)$.
- Système fermé Σ à $t + dt$: fusée de vitesse $(\vec{v} + d\vec{v})$ de masse $(m_f + m_g(t) - D_m dt) +$ gaz éjecté de masse dm . En effet, pendant dt une masse $dm = D_m dt$ de gaz a été éjectée. Cette masse de gaz éjectée a une vitesse relative \vec{u} par rapport à la fusée. On applique la loi de composition des vitesses à dm pour calculer la vitesse absolue de la masse de gaz éjectée : $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$. Le référentiel relatif lié à la fusée est en translation rectiligne par rapport au référentiel terrestre, donc la vitesse d'entraînement est égale à la vitesse de la fusée, soit $\vec{v}_e = \vec{v} + d\vec{v}$. La vitesse absolue de la masse dm est donc : $\vec{v}_a = \vec{u} + \vec{v} + d\vec{v}$.

Bilan de quantité de mouvement :

A t , la quantité de mouvement du système fermé vaut :

$$\vec{p}(t) = (m_f + m_g(t)) \vec{v}$$

A $t + dt$, la quantité de mouvement du système fermé vaut :

$$\vec{p}(t + dt) = (m_f + m_g(t) - D_m dt) (\vec{v} + d\vec{v}) + D_m dt (\vec{u} + \vec{v} + d\vec{v})$$

En simplifiant, on a : $\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = (m_f + m_g(t)) d\vec{v} + D_m dt \vec{u}$

On obtient :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = (m_f + m_g(t)) \frac{d\vec{v}}{dt} + D_m \vec{u}$$

Bilan des actions mécaniques extérieures :

Forces de gravitation : $(m_f + m_g(t)) \vec{g}$.

Le théorème de la quantité de la mouvement s'écrit :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = (m_f + m_g(t)) \frac{d\vec{v}}{dt} + D_m \vec{u} = (m_f + m_g(t)) \vec{g}$$

Soit :

$$(m_f + m_g(t)) \frac{d\vec{v}}{dt} = (m_f + m_g(t)) \vec{g} - D_m \vec{u}$$

La force due à l'éjection des gaz subie par la fusée que l'on appelle force de poussée est donc égale à :

$$-D_m \vec{u}$$

Tout se passe comme si on appliquait le théorème de la quantité de mouvement au système fermé de masse $m_f + m_g(t)$ soumis aux forces de pesanteur $(m_f + m_g(t)) \vec{g}$ et à la force que les gaz éjectés exercent sur la fusée.

2. La condition de décollage est qu'à $t = 0$, on doit avoir :

$$\frac{dv}{dt} > 0$$

On projette sur l'axe Oz : $\vec{v} = v\vec{u}_z$, $\vec{u} = -u\vec{u}_z$ et $\vec{g} = -g\vec{u}_z$.

On doit donc avoir à $t = 0$:

$$D_m u > (m_f + m_{g0}) g$$

Soit $D_m u > 4,508 \times 10^6 \text{ N}$.

L'accélération vaut : $a = 6,63 \text{ m.s}^{-2}$.

3. On suppose qu'il reste des gaz dans la fusée. L'équation différentielle du mouvement en projection sur Oz est :

$$(m_f + m_{g0} - D_m t) \frac{dv}{dt} = - (m_f + m_{g0} - D_m t) g + D_m u$$

On sépare les variables :

$$dv = \frac{D_m u - (m_f + m_{g0} - D_m t) g}{(m_f + m_{g0} - D_m t)} dt$$

En simplifiant, on a :

$$dv = \frac{D_m u}{(m_f + m_{g0} - D_m t)} dt - g dt$$

L'intégration entre l'instant initial et l'instant t donne :

$$v = \frac{D_m u}{-D_m} \ln \frac{m_f + m_{g0} - D_m t}{m_f + m_{g0}} - g t$$

On pose $m_0 = m_f + m_{g0}$. On a donc :

$$v = -u \ln \frac{m_0 - D_m t}{m_0} - g t$$

L'application numérique donne :

$$v = 115 \text{ m.s}^{-1} = 415 \text{ km.h}^{-1}$$

6b - Masses et poulie

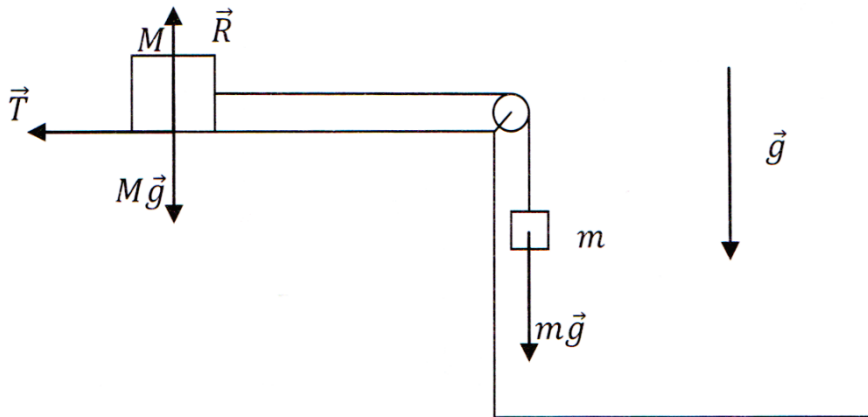
1) Dans cette première question, les deux masses se déplacent avec la même vitesse en module car le fil est inextensible.

On prend donc comme système l'ensemble des deux masses et le fil.

On est dans un référentiel galiléen.

On fait le bilan des forces extérieures sur ce système. Le système est soumis :

- au poids de la masse M : $M\vec{g}$;
- au poids de la masse m : $m\vec{g}$;
- à la force de frottement $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ qui a donc une composante normale et une composante tangentielle ;
- à la réaction de la poulie qui ne travaille pas (pas de frottement).



De plus comme la masse M a un mouvement horizontal, on a aussi :

$$M\vec{g} + \vec{N} = 0.$$

La loi de Coulomb donne la relation entre ces deux composantes. On a :

$$|T| = f|N|.$$

Donc :

$$|T| = fMg.$$

On va utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour le système qui est au repos à l'instant initial. Donc la variation d'énergie cinétique vaut :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}(M + m)v^2 - 0.$$

Pour les forces intérieures, il y a la force de tension du fil qui ne travaille pas.

On calcule le travail de la composante tangentielle de la force de frottement pour le déplacement de la distance h :

$$W = -fMgh.$$

On calcule le travail de la force de pesanteur pour la masse m :

$$W' = mgh.$$

En remplaçant dans le théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$\frac{1}{2}(M + m)v^2 - 0 = mgh - fMgh.$$

On en déduit alors la vitesse du système juste avant que la masse m ne touche le sol :

$$v = \sqrt{\frac{2gh(m - fM)}{M + m}}$$

2) Maintenant la masse m est immobile sur le sol. On considère désormais le système constitué uniquement de la masse M .

Les forces appliquées sur cette masse sont toujours les mêmes, c'est-à-dire :

- le poids de la masse M : $M\vec{g}$;
- la force de frottement $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$.

On a toujours :

$$|T| = fMg.$$

On applique donc le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial où la masse m touche le sol et l'instant final où la masse M s'arrête.

On a donc la variation d'énergie cinétique qui vaut :

$$\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}Mv^2.$$

La masse M se déplace d'une distance $d - h$.

Le travail de la force de frottement est donc égal à :

$$W = -fMg(d - h).$$

Donc :

$$0 - \frac{1}{2}Mv^2 = -fMg(d - h).$$

En remplaçant la vitesse, on trouve :

$$\frac{1}{2}M \frac{2gh(m - fM)}{M + m} = fMg(d - h)$$

$$Mmgh - fghM^2 = fMg(d - h)(M + m)$$

$$Mmh = f(M(d - h)(M + m) + hM^2)$$

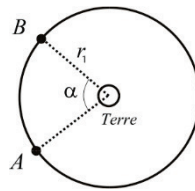
$$mMh = f(M^2d + Mmd - M^2h - Mmh + hM^2).$$

On a donc l'expression du coefficient de frottement :

$$f = \frac{mh}{Md + md - mh}$$

Sujet VII :

7a – Satellite en orbite



1°) Soit :

$$\frac{mv_1^2}{r_1} = \frac{GmM_T}{r_1^2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}}$$

2°) Soit :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GmM_T}{r_1} = \frac{1}{2}m \frac{GM_T}{r_1} - \frac{GmM_T}{r_1}$$

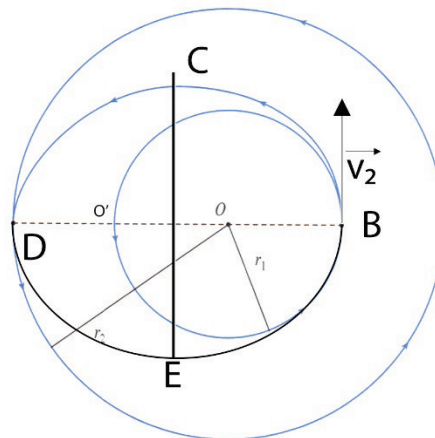
$$\Leftrightarrow E_m = -\frac{GmM_T}{2r_1}$$

3°) Soit :

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r_1^2}{GM_T} r_1$$

$$\Rightarrow \frac{r_1^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2}$$

4°) Vu que B ne change pas de direction, on se retrouve dans la situation suivante où le vecteur \vec{OB} est orthogonal à \vec{v}_2 . Les seuls points possibles sont B,C,D et E.



Cependant O doit-être un foyer de l'ellipse et par conséquent seul B et D sont possibles avec sur le schéma mais les rôles sont inversables suivant la position du centre de la terre en O ou O'.

$$\begin{cases} B : \text{périgée} \\ D : \text{apogée} \end{cases}$$

5°) Pour que les deux objets se rencontrent il faut que le temps mis pour revenir au périhélie soit le même pour les deux objets :

$$\begin{cases} A \text{ parcourt l'angle } 2\pi - \alpha \text{ en } T' \\ B \text{ parcourt l'angle } 2\pi \text{ en } T'' \end{cases}$$

Or :

$$\frac{r_1^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2} \Rightarrow \frac{T^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} = \beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T^2 = r_1^3 \beta \\ \frac{T'}{2\pi - \alpha} = \frac{T}{2\pi} \\ T''^2 = \frac{(r_1 + r_2)^3}{2^3} \beta \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} T' = T \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) = r_1^{\frac{3}{2}} \beta^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) \\ T'' = \frac{r_1^{\frac{3}{2}} \beta^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}} &= 2^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) \Rightarrow 1 + \frac{r_2}{r_1} = 2 \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &\Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = 2 \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = \gamma \end{aligned}$$

Si $\alpha = \frac{\pi}{6}$ alors $\frac{r_2}{r_1} = 0,89$

De plus le rayon r_2 est tel que :

$$\begin{aligned} E_m &= -\frac{GmM_T}{r_1 + r_2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GmM_T}{r_1} \\ \Rightarrow v_2^2 &= 2GM_T \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right) = 2v_1^2 \left(1 - \frac{r_1}{r_1 + r_2}\right) \\ \Rightarrow v_2 &= v_1 \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} = v_1 \sqrt{\frac{2\gamma}{1 + \gamma}} = 0,969 v_1 \end{aligned}$$

Normal, B diminue son altitude il doit freiner pour passer sur une orbite plus basse que A pour le rattraper.

7b – Capacité thermique massique

D'après le graphe proposé :

$$c = a + b \theta \text{ où } \begin{cases} a = 331 \\ b = 0,594 \end{cases}$$

Dans un modèle de gaz parfait on a :

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \left(\frac{\gamma R (273,15 + \theta)}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\gamma R}{M} 273,15} \left(1 + \frac{\theta}{273,15} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\gamma R}{M} 273,15} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma R}{273,15 M}} \theta \end{aligned}$$

Pour l'air la masse molaire est de $M = 28,8 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

D'où :

$$\gamma = \text{pente}^2 \times \frac{4M}{R} \times 273,15 = 1,335$$

Or pour un GP :

$$c_p = \frac{1}{M} \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = 1151 \text{ JK}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

Sujet VIII :

8a – Hangar demi-cylindrique

1) On va donc discuter des hypothèses de l'énoncé.

Le fluide est considéré comme parfait : c'est de l'air dont la viscosité est relativement faible. On néglige donc tout frottement.

Pour l'écoulement incompressible, il suffit que la vitesse du vent soit très inférieure à la vitesse de propagation du son dans le fluide. La vitesse du vent est bien inférieure à 340 m.s^{-1} . On a donc :

$$\text{div} \vec{V} = 0.$$

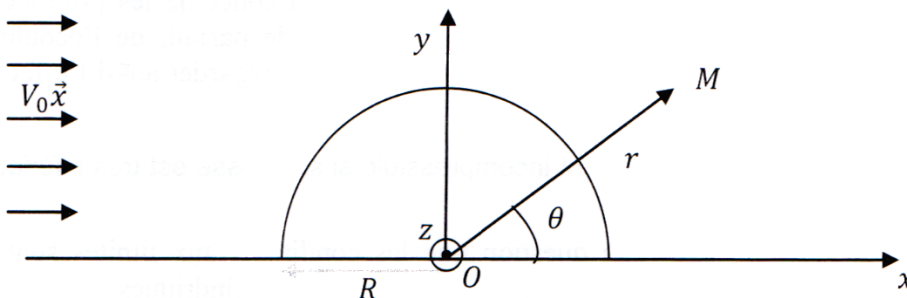
Loin du hangar l'écoulement est uniforme, il est donc irrotationnel. On considère qu'il en est de même près du hangar. On considère qu'il n'y a donc pas de tourbillons dans l'écoulement. On fait l'hypothèse d'un écoulement laminaire. On a donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = 0.$$

On néglige l'effet de la pesanteur car sur la variation d'altitude du hangar, on peut considérer que la masse volumique de l'air reste constante. On néglige aussi la variation d'énergie potentielle de pesanteur devant l'énergie cinétique, soit :

$$\rho g R \ll \frac{1}{2} \rho V_0^2.$$

2) La vitesse dérive d'un potentiel car on a un écoulement irrotationnel. Donc on peut écrire : $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$.



On doit maintenant vérifier les conditions aux limites. On se place bien entendu dans le système de coordonnées cylindriques avec l'origine prise sur l'axe du hangar.

Lorsque l'on est loin du hangar :

$$\lim_{r \gg R} \vec{V} = V_0 \vec{x}.$$

Soit en coordonnées cylindriques :

$$\lim_{r \gg R} \vec{V} = V_0 \cos \theta \vec{u}_r - V_0 \sin \theta \vec{u}_\theta.$$

Au niveau du hangar, la vitesse est tangentielle : $\vec{V}(R, \theta) \cdot \vec{u}_r = 0$.

On détermine maintenant la vitesse en fonction du potentiel.

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi.$$

En coordonnées cylindriques, on a l'expression du gradient qui est donnée par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \phi(r, \theta) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{u}_\theta.$$

On a donc pour la vitesse radiale :

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$V_r = \left(\alpha - \frac{\beta}{r^2} \right) \cos \theta.$$

On a pour la composante ortho-radiale :

$$V_\theta = - \left(\alpha + \frac{\beta}{r^2} \right) \sin \theta.$$

Loin du hangar la vitesse tend vers :

$$V_r = \alpha \cos \theta$$

$$V_\theta = -\alpha \sin \theta.$$

Ces expressions sont compatibles avec les conditions aux limites loin du hangar en prenant : $\alpha = V_0$.

Maintenant au niveau du hangar la vitesse calculée vaut :

$$V_r(R, \theta) = \left(\alpha - \frac{\beta}{R^2} \right) \cos \theta$$

$$V_\theta(R, \theta) = - \left(\alpha + \frac{\beta}{R^2} \right) \sin \theta.$$

La composante normale s'annule si l'on prend :

$$\alpha = \frac{\beta}{R^2}.$$

Remarque

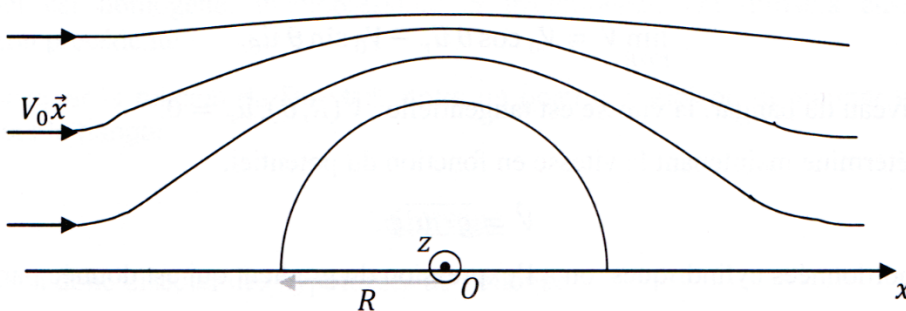
On a une vitesse ortho-radiale nulle pour $\theta = 0$ et pour $\theta = \pi$. Ce qui est logique puisque le fluide est aussi en contact avec le sol. On retrouve les deux points d'arrêt.

Conclusion : l'expression du potentiel des vitesses est bien compatible avec l'écoulement et on trouve :

$$\boxed{\alpha = V_0}$$

$$\boxed{\beta = V_0 R^2}.$$

On peut représenter les lignes de champ.



3) On détermine maintenant la vitesse au niveau du hangar. Il suffit de prendre l'expression de V_θ . On trouve donc :

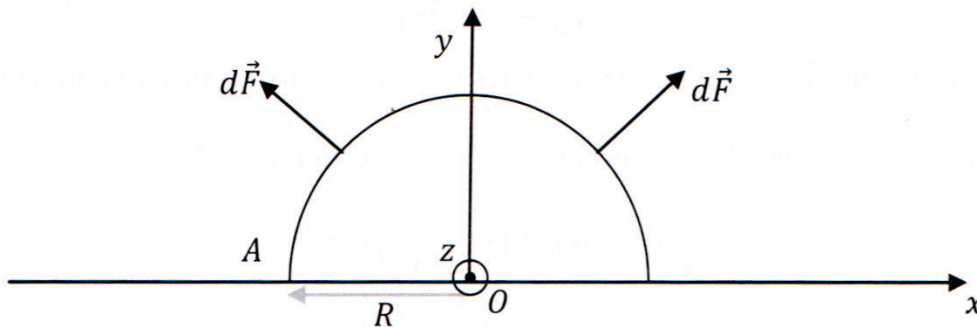
$$\vec{V}(R, \theta) = -2V_0 \sin \theta \vec{u}_\theta.$$

4) Pour déterminer la pression exercée sur le hangar, on applique la relation de Bernoulli entre un point très éloigné et un point appartenant au hangar. On peut appliquer la relation de Bernoulli en tout point de l'écoulement car il est stationnaire, incompressible et irrotationnel.

On obtient alors la relation donnant la pression :

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2 = P(R, \theta) + \frac{1}{2}\rho V(R, \theta)^2.$$

$$P(R, \theta) = P_0 + \frac{1}{2}\rho(V_0^2 - 4V_0^2 \sin^2 \theta).$$



On sait aussi que la pression au point A vaut P_A :

$$P(R, \pi) = P_A = P_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2$$

donc :

$$P(R, \theta) = P_A - 2\rho V_0^2 \sin^2 \theta.$$

On peut maintenant calculer la force de pression exercée sur le hangar sachant que la pression intérieure est P_A et la pression extérieure est $P_A - 2\rho V_0^2 \sin^2 \theta$.

Les forces de pression sont donc radiales. La force élémentaire est donnée par :

$$d\vec{F} = -(P(R, \theta) - P_A)d\vec{S}$$

soit :

$$d\vec{F} = 2\rho V_0^2 \sin^2 \theta dS \vec{e}_r.$$

La surface élémentaire vaut :

$$dS = R d\theta L.$$

L'écoulement est symétrique par rapport à Oy donc la résultante des forces de pression se trouve suivant cet axe.

On va le vérifier en faisant le calcul.

On projette cette force sur Ox :

$$dF_x = 2\rho V_0^2 \sin^2 \theta RL d\theta \cos \theta.$$

Reste maintenant à intégrer sur la variable θ :

$$F_x = 2\rho V_0^2 RL \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta$$

$$F_x = 2\rho V_0^2 RL \int_0^\pi \sin^2 \theta d(\sin \theta)$$

$$F_x = 2\rho V_0^2 R^2 L \left[\frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_0^\pi$$

et finalement, on trouve :

$$F_x = 0.$$

On calcule maintenant la composante de cette force suivant l'axe Oy .

On projette cette force sur Oy :

$$dF_y = 2\rho V_0^2 \sin^2 \theta RL d\theta \sin \theta.$$

Reste maintenant à intégrer sur la variable θ :

$$F_y = 2\rho V_0^2 RL \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

$$F_y = 2\rho V_0^2 RL \int_0^\pi \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta$$

$$F_y = 2\rho V_0^2 RL \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d(-\cos \theta)$$

$$F_y = -2\rho V_0^2 RL \left[\cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi$$

et finalement, on trouve :

$$F_y = -2\rho V_0^2 RL \left(-1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} \right).$$

Soit :

$$F_y = \frac{8}{3} \rho V_0^2 RL.$$

On trouve donc bien une force qui est dirigée suivant l'axe Oy et qui vaut :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{8}{3} \rho V_0^2 RL \vec{y}.$$

Cette force a donc tendance à soulever le hangar ce qui peut poser des problèmes en cas de vent important.

8b – Troposphère

On reprend l'équation de la statique des fluides établie dans le cours de première année :

$$\overrightarrow{\text{grad}P} = \rho \vec{g}.$$

P représente la pression et ρ représente la masse volumique du fluide.

On projette sur l'axe vertical ascendant Oz :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g.$$

On considère que l'air se comporte comme un gaz parfait et on a donc la relation suivante :

$$PV = nRT = \frac{m}{M_{air}} RT.$$

La masse volumique vaut :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM_{air}}{RT}.$$

On a donc l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{PM_{air}}{RT} g.$$

La température varie en fonction de l'altitude de la façon suivante :

$$\frac{dT}{dz} = -C.$$

En intégrant, on trouve en fonction de la température T_0 en $z = 0$:

$$T = -Cz + T_0.$$

Donc finalement l'équation devient :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PM_{air}}{R(T_0 - Cz)} g.$$

On obtient une équation différentielle à variables séparables que l'on écrit sous la forme suivante :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{M_{air}}{R} g \frac{dz}{T_0 - Cz}.$$

On peut donc intégrer et on obtient :

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{M_{air}}{RC} g \ln\left(\frac{T_0 - Cz}{T_0}\right)$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \alpha \ln\left(\frac{T_0 - Cz}{T_0}\right).$$

On a donc la relation suivante :

$$P = P_0 \left(\frac{T_0 - Cz}{T_0}\right)^\alpha.$$

On peut donc passer à l'application numérique. On prend une température de 20 °C au niveau de la mer et une pression $P_0 = 1$ bar.

On détermine la constante α qui est sans dimension :

$$\alpha = \frac{gM_{air}}{RC} = \frac{9,8 \times 29 \cdot 10^{-3}}{8,31 \times 6 \cdot 10^{-3}}$$

$$\alpha = 5,7.$$

Chamonix se trouve à une altitude de $z_c = 1000$ m. La pression vaut :

$$P = 10^5 \left(\frac{273 + 20 - 6 \cdot 10^{-3} \times 1000}{273 + 20}\right)^{5,7}$$

$$P = 88875 \text{ Pa.}$$

Le Mont Blanc se trouve à une altitude de $z_B = 4810$ m. La pression vaut :

$$P = 10^5 \left(\frac{273 + 20 - 6 \cdot 10^{-3} \times 4810}{273 + 20}\right)^{5,7}$$

$$P = 55374 \text{ Pa.}$$