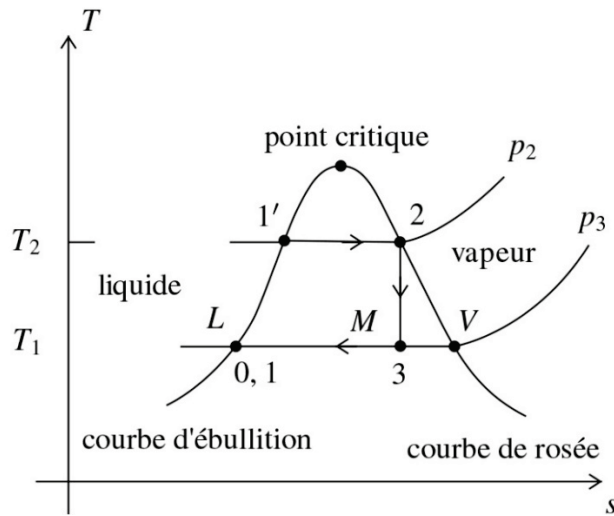


CCP : Planche d'oral 2

CCP9 - Cycle de Rankine (2014)

1. Le diagramme entropique est le diagramme (T,s) .



2. La transformation $2 \rightarrow 3$ est adiabatique réversible, donc isentropique. On a alors : $s_3 = s_2 = s_V(T_2) = 5,57 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

On utilise le théorème des moments sur le palier d'équilibre liquide-vapeur à la température T_1 . Le titre massique en vapeur au point 3 est :

$$\begin{aligned} x_V &= \frac{LM}{LV} = \frac{s_3 - s_L(T_1)}{s_V(T_1) - s_L(T_1)} = \frac{s_V(T_2) - s_L(T_1)}{s_V(T_1) - s_L(T_1)} \\ &= \frac{5,57 - 0,44}{8,46 - 0,44} = 0,64 \end{aligned}$$

On en déduit l'enthalpie massique au point 3 :

$$h_3 = x_V h_V(T_1) + (1 - x_V) h_L(T_1) = 1687,6 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

3. On applique le premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert en régime stationnaire.

Pour la transformation $2 \rightarrow 3$: $h_3 - h_2 = w_{it}$

puisque la turbine est calorifugée. w_{it} est le travail indiqué massique reçu par le fluide. Il est toujours négatif pour une turbine.

Pour la transformation $1 \rightarrow 2$: $h_2 - h_1 = q_{GV}$

puisque'il n'y a pas de partie mobile de la machine, c'est-à-dire pas de travail autre que celui des forces de pression.

Calcul de l'efficacité :

$$\eta = \frac{-w_{turbine}}{q_{GV}} = \frac{-(h_3 - h_2)}{(h_2 - h_1)} = \frac{-(1687,6 - 2749)}{2749 - 126} = 40,5 \%$$

4. D'après le diagramme (T,s) , la vapeur est saturante à la fin de la détente. Il y a donc des conditions difficiles pour les parties mobiles de la machine à cause de la corrosion.

CCP10 - Rails de Laplace (2015)

1) Le phénomène d'induction est dû à une variation du flux du champ magnétique à travers un circuit. On distingue deux cas.

- L'induction de Lorentz : circuit mobile dans un champ magnétostatique.
- L'induction de Neumann : circuit fixe dans un champ magnétique variable.

Maintenant les deux peuvent se produire en même temps, le circuit peut être mobile dans un champ magnétique variable.

Les phénomènes d'inductions sont caractérisés par la fem induite :

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

La traduction mathématique de ce phénomène est la relation de Maxwell-Faraday qui est vue en deuxième année :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

À partir de cette relation, on trouve la loi de Faraday pour un circuit filiforme :

$$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$e = \iint \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$e = \iint - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

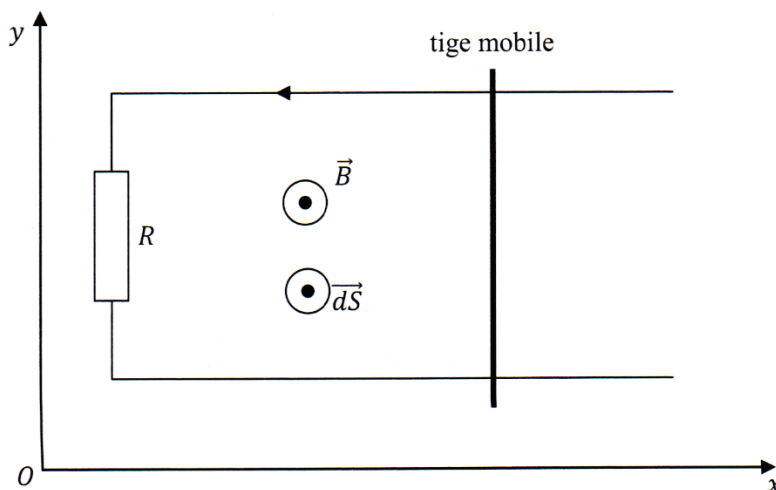
$$e = - \frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Et finalement, on arrive à :

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

2) On demande de faire un raisonnement qualitatif.

On commence déjà par analyser le phénomène général avant de répondre à la question. Ici la tige se déplace dans le sens des x croissants dans un champ magnétostatique. On a donc un phénomène d'induction de Lorentz qui crée une fem induite. Cette fem est à l'origine du courant induit dans le circuit. La tige, qui est donc parcourue par un courant, sera alors soumise à la force de Laplace (conducteur parcouru par un courant placé dans un champ magnétique). Avant de commencer, il faut déjà orienter le circuit.



La tige se déplace dans le sens des x croissants. D'après la loi de Lenz, la force de Laplace qui agit sur le circuit va s'opposer au mouvement de la tige. Donc le courant sera donc négatif avec l'orientation choisie.

Autre méthode

Le flux du champ magnétique est positif et croissant, donc d'après la loi de Lenz, le courant doit circuler pour s'opposer à l'augmentation du champ magnétique. Le courant est négatif de façon à créer un champ magnétique opposé à celui existant (on utilise la loi du tire bouchon : on tourne dans le sens du courant et la direction du tire bouchon donne le sens du champ magnétique propre).

3) Détermination de la fem induite par la loi de Faraday.

On commence par calculer le flux du champ magnétique :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

En tenant compte de l'orientation du circuit, on trouve :

$$\phi = Bax$$

donc :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -Ba\dot{x}.$$

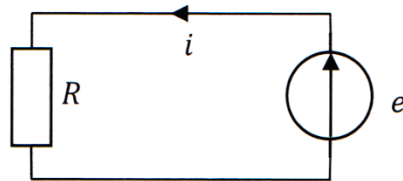
Pour déterminer la force de Laplace, on utilise son expression :

$$\vec{F}_l = \int i d\vec{l} \wedge \vec{B}.$$

On trouve alors :

$$\boxed{\vec{F}_l = iaB\vec{x}.$$

4) L'équation électrique est relativement simple à trouver puisque l'on a uniquement une fem induite et une résistance. On obtient le circuit électrique équivalent :

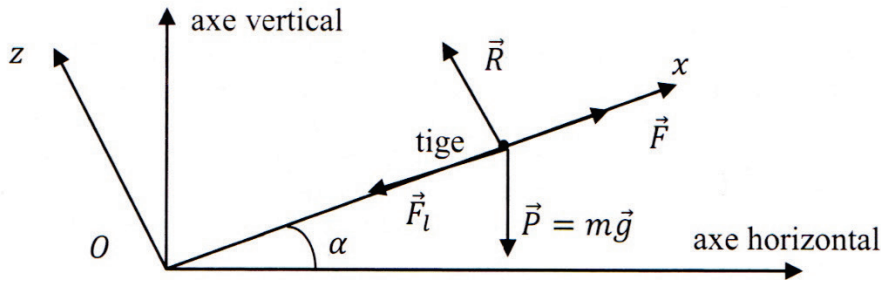


Il suffit donc d'écrire l'équation de maille : $e = Ri$.

En remplaçant avec les valeurs, on trouve l'équation électrique :

$$\boxed{-Ba\dot{x} = Ri.}$$

Maintenant, on va chercher l'équation mécanique. On détermine le système : la tige. On travaille dans le référentiel galiléen lié au laboratoire. Les forces exercées sur la tige sont : le poids, la force \vec{F} , les forces de réactions de la tige sur le support, la force de Laplace. On peut refaire un schéma de profil pour bien visualiser le poids.



On applique la deuxième loi de Newton à la tige :

$$m\vec{a} = \vec{R} + m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_l.$$

On projette sur l'axe Ox et on obtient l'équation mécanique :

$$m\ddot{x} = F - mg \sin \alpha + iaB.$$

5) On cherche maintenant l'équation vérifiée par la vitesse $v = \dot{x}$. De l'équation électrique, on sort le courant i :

$$i = -\frac{Ba\dot{x}}{R} = -\frac{Bav}{R}.$$

Reste alors à remplacer dans l'équation mécanique :

$$m \frac{dv}{dt} = F - mg \sin \alpha - \frac{Bav}{R} aB.$$

On peut alors simplifier l'équation :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{(Ba)^2}{mR} v = \frac{F - mg \sin \alpha}{m}.$$

On a donc une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

Penser à vérifier l'homogénéité.

La solution est de la forme :

$$v = \frac{R}{(Ba)^2} (F - mg \sin \alpha) + A e^{-t \frac{(Ba)^2}{mR}}.$$

On détermine la constante A à l'aide des conditions initiales :

À $t = 0$, la vitesse v est nulle :

$$v(t = 0) = 0 = \frac{R}{(Ba)^2} (F - mg \sin \alpha) + A.$$

Donc :

$$A = -\frac{R}{(Ba)^2} (F - mg \sin \alpha).$$

On trouve alors la vitesse :

$$v(t) = \frac{R}{(Ba)^2} (F - mg \sin \alpha) \left(1 - e^{-t \frac{(Ba)^2}{mR}} \right).$$

Pour avoir un mouvement selon les x croissants, il faut que :

$$F - mg \sin \alpha > 0.$$

On peut maintenant déterminer le courant i :

$$i = -\frac{Bav}{R}.$$

En remplaçant l'expression de v et en simplifiant, on trouve :

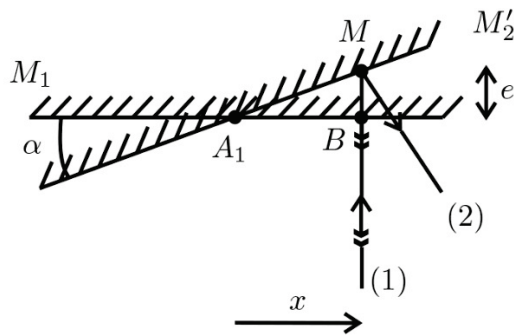
$$i = -\frac{(F - mg \sin \alpha)}{Ba} \left(1 - e^{-t \frac{(Ba)^2}{mR}} \right).$$

Remarque :

La force est homogène à iaB . Donc le terme $\frac{(F - mg \sin \alpha)}{Ba}$ est bien homogène à un courant.

CCP11 - Michelson et lame de mica (2014)

1. On travaille avec le schéma équivalent du Michelson en coin d'air d'arête A_1 . M'_2 est le symétrique de M_2 par rapport à la séparatrice.



On a un dispositif à division d'amplitude. Le Michelson est réglé en coin d'air. On se place en incidence normale par rapport au miroir M_1 . Les rayons qui interfèrent se coupent au point M situé sur le miroir M'_2 .

En incidence normale, les interférences sont donc localisées sur le miroir M'_2 . On admet que pour une incidence quasi-normale, les interférences sont localisées au voisinage des miroirs M_1 et M'_2 .

2. La lentille L sert à projeter la figure d'interférences sur un écran. L'écran doit être dans le plan contenant l'image du miroir M_1 à travers la lentille L . On appelle M' le conjugué de M à travers la lentille.

3. On pose $x = \overline{A_1 B}$. Comme l'angle α est très faible, on fait un développement limité au premier ordre : $\cos \alpha = 1 = \frac{x}{A_1 M}$ et $\tan \alpha = \alpha = \frac{e}{x}$.

On a deux réflexions sur un miroir qui rajoutent chacune $\frac{\lambda_0}{2}$ (correspondant à un déphasage de π) au chemin optique. Comme on fait la différence des chemins optiques, $\frac{\lambda_0}{2}$ n'apparaîtra pas dans la différence de marche.

La différence de marche entre le rayon (2) et le rayon (1) est :

$$\delta = [SM]_2 - [SM]_1 = 2n_{\text{air}}e = 2e = 2\alpha x$$

car le rayon qui se réfléchit sur (M_2) fait en plus un aller-retour entre les deux miroirs.

L'ordre d'interférences vaut :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2\alpha x}{\lambda_0}$$

On a des franges brillantes pour $p = k$ entier relatif, soit :

$$x_k = k \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$

Les franges brillantes sont des droites parallèles à l'arête du coin d'air.

Pour calculer l'interfrange, on utilise la relation : $p(x + i) = p(x) + 1$.

On a donc : $\frac{2\alpha(x+i)}{\lambda_0} = \frac{2\alpha x}{\lambda_0} + 1$, ce qui donne :

$$i = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$

Pour calculer l'interfrange i' sur l'écran, il faut multiplier l'interfrange i par $|\gamma| = 4$:

$$i' = 4i = 3,75 \text{ mm}$$

4. Si on translate le miroir M_2 d'une distance ℓ , la nouvelle différence de marche est :

$$\delta_1 = 2\alpha x + 2\ell$$

Le grandissement de la lentille vaut : $\gamma = -4$. On a alors : $x' = \gamma x$.

Le nouvel ordre d'interférences vaut :

$$p_1 = \frac{\delta_1}{\lambda_0} = \frac{2\alpha x'}{\lambda_0 \gamma} + \frac{2\ell}{\lambda_0}$$

L'ordre 0 est obtenu pour $x' = -\frac{\gamma\ell}{\alpha}$ alors qu'il était obtenu pour $x' = 0$ sans translation du miroir M_2 .

Les franges se sont donc déplacées sur l'écran dans le sens des $x > 0$ d'une distance $-\frac{\gamma\ell}{\alpha}$.

5. Sans la lame :

On éclaire le coin d'air en lumière blanche. On repère alors la frange centrale blanche qui est bien contrastée. Les autres franges sont irisées. La frange centrale est obtenue pour $p = 0$, soit $x = 0$.

Avec la lame :

La nouvelle différence de marche vaut : $\delta_2 = \delta - 2(n-1)e'$.

On a un signe $-$ devant $2(n-1)e'$ car la différence de marche est calculée entre le rayon (2) et le rayon (1).

Le nouvel ordre d'interférences vaut :

$$p_2 = \frac{\delta_2}{\lambda_0} = \frac{2\alpha x}{\lambda_0} - \frac{2(n-1)e'}{\lambda_0}$$

On retrouve la frange centrale pour $p_2 = 0$, soit :

$$x = \frac{(n-1)e'}{\alpha}$$

Sur l'écran, on a :

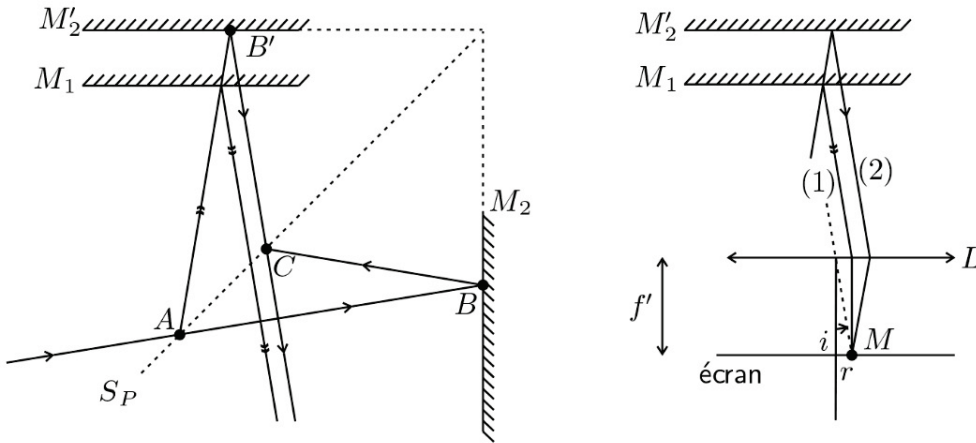
$$x' = \frac{\gamma(n-1)e'}{\alpha}$$

La mesure du déplacement x' permet d'en déduire l'indice moyen n ou l'épaisseur e' .

CCP12 - Michelson en lame d'air

1. On est au contact optique. La différence de marche est nulle. L'écran est uniformément éclairé. On observe une teinte plate brillante.

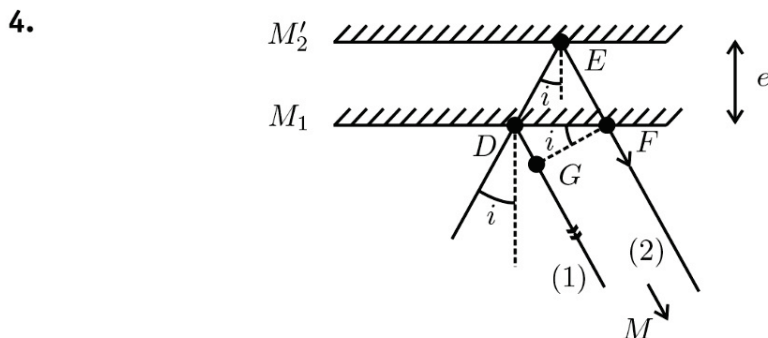
2. On utilise le schéma équivalent du Michelson en lame d'air : M'_2 est le symétrique de M_2 par rapport à la séparatrice. Les distances AB et AB' sont égales ainsi que les distances BC et $B'C$.



On a un dispositif à division d'amplitude. Le Michelson est réglé en lame d'air.

3. Les rayons (1) et (2) sont parallèles entre eux. Les interférences sont localisées à l'infini pour un Michelson réglé en lame d'air avec une source étendue.

On les observe en plaçant un écran dans le plan focal image d'une lentille.



On a deux réflexions sur un miroir qui rajoutent chacune $\frac{\lambda_0}{2}$ (correspondant à un déphasage de π) au chemin optique. Comme on fait la différence des chemins optiques, $\frac{\lambda_0}{2}$ n'apparaîtra pas dans la différence de marche.

La différence de marche entre les rayons (2) et (1) arrivant au point M est :

$$\delta = [DEFM] - [DGM]$$

En utilisant le principe du retour inverse de la lumière et le théorème de Malus, le plan GF serait un plan d'onde et $[GM] = [FM]$. On a alors :

$$\delta = [DEF] - [DG] = 2DE - DG$$

- $\cos i = \frac{e}{DE}$, d'où $2DE = \frac{2e}{\cos i}$.
- $\tan i = \frac{DF}{e}$. On a donc $DF = 2e \tan i$.

Or $\sin i = \frac{DG}{DF}$, d'où : $DG = DF \sin i = 2e \tan i \sin i$.

Finalement, on a :

$$\delta = \frac{2e}{\cos i} - 2e \tan i \sin i = \frac{2e}{\cos i} - 2e \frac{\sin^2 i}{\cos i} = 2e \frac{\cos^2 i}{\cos i}$$

Soit :

$$\delta = 2e \cos i$$

On se place dans les conditions de Gauss. On fait un développement limité à l'ordre 2, soit :

$$\delta = 2e \cos i = 2e \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$$

L'ordre d'interférences vaut :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$$

Au centre de l'écran ($i = 0$), l'ordre vaut : $p_0 = \frac{2e}{\lambda_0} = 4028,57$.

C'est la valeur maximale de p .

Le rayon r_1 du premier anneau est obtenu pour $p_1 = 4028$.

Le rayon du premier anneau ne s'obtient pas avec $p_1 = 1$!

Dans les conditions de Gauss, on a : $\tan i = i = \frac{r_1}{f'}$.

Soit $p_1 = p_0 \left(1 - \frac{i^2}{2}\right) = p_0 \left(1 - \frac{r_1^2}{2f'^2}\right)$. On a alors : $\frac{p_1}{p_0} = 1 - \frac{r_1^2}{2f'^2}$,

soit :

$$r_1 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p_1}{p_0}\right)} = 16,8 \text{ mm}$$

Le deuxième anneau est obtenu pour $p_2 = 4027$. On obtient alors :

$$r_2 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p_2}{p_0} \right)} = 27,9 \text{ mm}$$

La différence de marche en M ne dépend que de la distance $F'M$ ce qui montre que les franges d'interférences sont des anneaux centrés sur F' .

5. Sur le chemin du rayon (1), on remplace sur une épaisseur e' de l'air par une lame d'indice n . La nouvelle différence de marche δ' peut s'exprimer en fonction de l'ancienne différence de marche δ sans la lame :

$$\delta' - \delta = -(2ne' - 2e') = -2(n - 1)e'$$

Attention au facteur 2, car le rayon (1) passe deux fois dans la lame. Il faut mettre un signe $(-)$ devant $(2ne' - 2e')$ car la différence de marche est calculée entre le rayon (2) et le rayon (1). L'expression est valable pour des angles i faibles.

Le nouvel ordre d'interférences vaut :

$$p' = \frac{\delta'}{\lambda_0} = p - \frac{2(n - 1)e'}{\lambda_0}$$

La variation de l'ordre d'interférences au centre vaut

$$\Delta p = -\frac{2(n - 1)e'}{\lambda_0} = -17,8$$

Le nouvel ordre d'interférences au centre vaut : $p'_0 = 4010,76$.

On obtient le rayon du premier anneau avec $p'_1 = 4010$. Soit :

$$r'_1 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p'_1}{p'_0} \right)} = 19,5 \text{ mm}$$

On obtient le rayon du deuxième anneau avec $p'_2 = 4009$. Soit :

$$r'_2 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p'_2}{p'_0} \right)} = 29,7 \text{ mm}$$

CCP13 - Corde de Melde (2014)

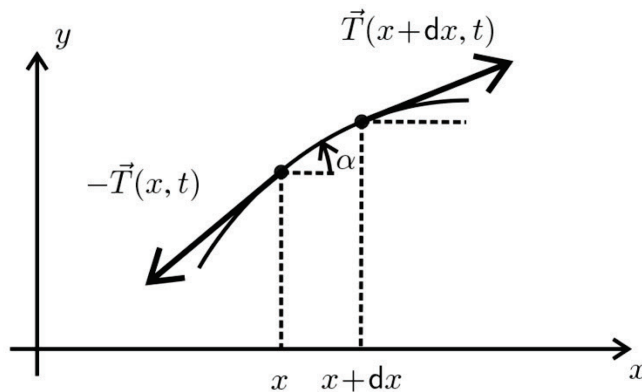
1. À l'instant t , la corde subit un déplacement transversal. On suppose que la corde se déforme faiblement au voisinage de l'axe Ox . On fera donc un développement limité au premier ordre. On écrira par exemple : $\tan \alpha = \alpha$; $\cos \alpha = 1 \dots$

Système : élément de corde compris entre x et $x + dx$. On a $dx = dl \cos \alpha$. On fait un développement limité au premier ordre : $\cos \alpha = 1$, d'où $dx = dl$.

Référentiel : $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre galiléen.

Bilan des actions extérieures :

- poids négligeable.
- la partie droite exerce une force $\vec{T}(x + dx, t)$ tangente à la corde en $x + dx$.
- la partie gauche exerce une force $-\vec{T}(x, t)$ tangente à la corde en x .



Théorème de la quantité de mouvement :

$$\mu dl \vec{a} = -\vec{T}(x, t) + \vec{T}(x + dx, t)$$

La corde se déforme faiblement au voisinage de l'axe Ox . L'accélération de la corde est uniquement suivant \vec{u}_y . Les angles sont fortement augmentés sur la figure pour la clarté de la représentation.

On désigne par T_x et T_y les projections de \vec{T} sur (\vec{u}_x, \vec{u}_y) . On projette le théorème de la quantité de mouvement sur (\vec{u}_x, \vec{u}_y) :

$$\left| \begin{array}{l} 0 = -T_x(x, t) + T_x(x + dx, t) \\ \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T_y(x, t) + T_y(x + dx, t) \end{array} \right.$$

On en déduit que :

$$\left| \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \\ \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x} dx \end{array} \right.$$

On en déduit de la première équation que T_x est une constante. Au premier ordre, on a : $T_x = T \cos \alpha = T = cte$.

Comme \vec{T} et \vec{dl} sont colinéaires, on a :

$$\tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{T_y}{T_x}$$

On en déduit :

$$\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{T_y}{T}$$

D'où

$$T_y = T \frac{\partial y}{\partial x}$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial T_y}{\partial x} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Il reste à remplacer dans le théorème de la quantité de mouvement :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

On obtient l'équation de propagation, appelée ici équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

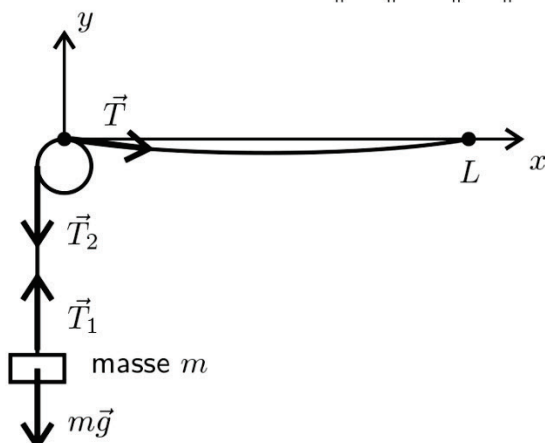
On définit la célérité de l'onde :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

L'onde se propage sur l'axe Ox et le mouvement d'un point de la corde est dans une direction orthogonale à Ox . On dit que **l'onde est transverse**.

2. La poulie et la masse m sont immobiles. La masse m est en équilibre, donc $\vec{T}_1 + m\vec{g} = \vec{0}$. La tension du fil idéal et tendu est uniforme le long de celui-ci. On a donc $\vec{T}_2 = -\vec{T}_1$. On a vu dans la question précédente que $T_x = T = constante$. Comme la poulie est immobile, on en déduit que :

$$T = \|\vec{T}_2\| = \|\vec{T}_1\| = mg$$



On cherche $y(x,t)$ de la forme $f(x) \cos \omega t$. Les variables x et t sont découplées.

On dit que l'on a une **onde stationnaire**.

Pour trouver $f(x)$, il suffit de remplacer $y(x,t)$ dans l'équation de d'Alembert :

$$f''(x) \cos(\omega t) = \frac{1}{c^2} (-\omega^2) f(x) \cos(\omega t)$$

Après simplification, on a :

$$f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0$$

On définit k le module du vecteur d'onde, appelé module d'onde :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

On en déduit directement la solution de cette équation différentielle :

$$f(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

On obtient donc :

$$y(x,t) = (A \cos kx + B \sin kx) \cos(\omega t)$$

On a deux fonctions périodiques :

- périodicité temporelle de période T . La pulsation ω est définie par :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

- périodicité spatiale de période λ . Le vecteur d'onde k est défini par :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma. \text{ On appelle } \sigma \text{ le nombre d'onde ou fréquence spatiale.}$$

Deux conditions aux limites

- $y(0,t) = 0 = A \cos \omega t$. On en déduit que $A = 0$.

- $y(L,t) = b \cos \omega t = B \sin kL \cos \omega t$. D'où : $B = \frac{b}{\sin kL}$.

On a donc :

$$y(x,t) = \frac{b}{\sin kL} \sin kx \cos(\omega t)$$

On a des noeuds et des ventres de vibration :

Noeuds de vibration : L'amplitude de la vibration est nulle en un noeud de vibration. On n'a pas de mouvement de la corde. Pour déterminer les abscisses correspondantes, il suffit de résoudre : $\sin kx = 0$, soit :

$$kx = n\pi$$

avec n entier. On obtient :

$$x_n = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = n \frac{\lambda}{2}$$

La distance entre deux noeuds successifs est $\frac{\lambda}{2}$.

Ventres de vibration : L'amplitude de la vibration est maximale. En un point d'un ventre de vibration, on a :

$$\sin kx = \pm 1$$

D'où :

$$kx = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

avec m entier. On obtient alors :

$$x_m = \frac{\pi}{2k} + m \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{2 \frac{2\pi}{\lambda}} + m \frac{\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$$

La distance entre deux ventres successifs est $\frac{\lambda}{2}$.

La distance entre un noeud et un ventre de vibration consécutifs est $\frac{\lambda}{4}$.

3. Si $\sin kL = \sin \left(\frac{\omega}{c} L \right) \rightarrow 0$, l'amplitude tend vers l'infini. On dit que l'on a résonance pour certaines valeurs de k , donc certaines valeurs de la pulsation.

En pratique, l'amplitude reste finie à cause des frottements. Le développement limité effectué précédemment n'est plus valable.

On a alors :

$$kL = \frac{\omega}{c} L = n\pi$$

avec n entier. On a résonance pour les pulsations suivantes :

$$\omega_n = n \frac{\pi c}{L}$$

Pour $x = L$, on a $y = b \cos \omega t$. C'est pratiquement un noeud de vibration puisque l'amplitude b est très faible devant l'amplitude des ventres de vibration.

Étude du cas où $n = 1$ – Excitation du premier mode propre

On l'obtient pour une pulsation d'excitation $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$, soit une fréquence

$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{c}{2L}$. Cette fréquence est appelée fréquence fondamentale.

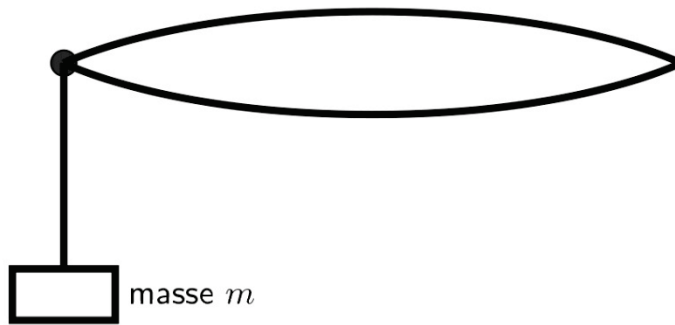
La longueur d'onde est :

$$\lambda_1 = cT_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{c}{\frac{c}{2L}} = 2L$$

On a donc la relation :

$$L = \frac{\lambda_1}{2}$$

On a la figure suivante. On a un seul ventre de vibration.



On retient que lorsque la longueur L est égale à la moitié de la longueur d'onde, on a le premier mode propre. On peut mémoriser ce résultat facilement sachant que la distance entre deux noeuds successifs est la moitié de la longueur d'onde.

Étude du cas où $n = 2$ – Excitation du deuxième mode propre

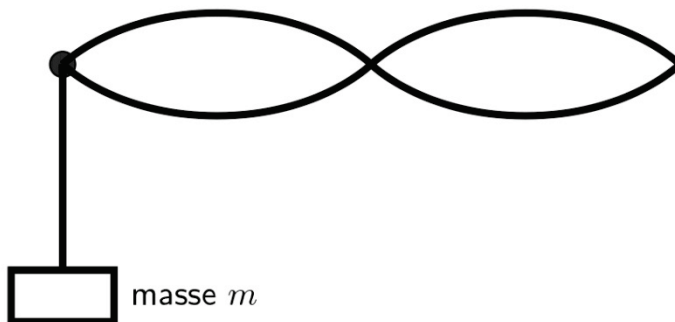
On l'obtient pour une pulsation d'excitation $\omega_2 = \frac{2\pi c}{L}$, soit une fréquence $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{c}{L}$. Cette fréquence est appelée 2^e harmonique.

La longueur d'onde est :

$$\lambda_2 = cT_2 = \frac{c}{f_2} = \frac{c}{\frac{c}{L}} = L$$

On a deux ventres de vibration aux abscisses : $\frac{\lambda_2}{4}$ et $\frac{3\lambda_2}{4}$.

On a trois noeuds de vibration aux abscisses : $0, \frac{\lambda_2}{2}$ et λ_2 .



Si on fait l'expérience et qu'on augmente la fréquence de l'excitation, on observe sur la corde des ondes stationnaires de faible amplitude sauf pour certaines valeurs correspondant aux modes propres calculés précédemment.

CCP14 – Diffusion en symétrie cylindrique (2014)

1°) Le système Σ est immobile et indéformable d'où le premier principe entre t et $t+dt$:

$$dU = \delta Q \text{ avec } dU = \frac{\partial u}{\partial t} dt \rho d\tau = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt d\tau$$

Σ reçoit un transfert thermique en r , à travers le cylindre intérieur de surface $2\pi r l$ et en perd en $r+dr$, à travers le cylindre extérieur de surface $2\pi(r+dr)l$ et reçoit éventuellement l'énergie Pdt à l'intérieur de son volume $d\tau$:

$$\delta Q_e = (\phi(r, t) - \phi(r + dr, t))dt = -\frac{\partial \phi}{\partial r} dr dt = -\frac{\partial(2\pi r l j_{th})}{\partial r} dr dt$$

$$\delta Q_e = (\phi(r, t) - \phi(r + dr, t))dt = -2\pi l \frac{\partial(r j_{th})}{\partial r} dr dt$$

En tenant compte de l'énergie thermique créée :

$$\delta Q = -2\pi l \frac{\partial(r j_{th})}{\partial r} dr dt + P dt 2\pi r dr l$$

D'où :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt 2\pi r dr l = -2\pi l \frac{\partial(r j_{th})}{\partial r} dr dt + P dt 2\pi r dr l$$

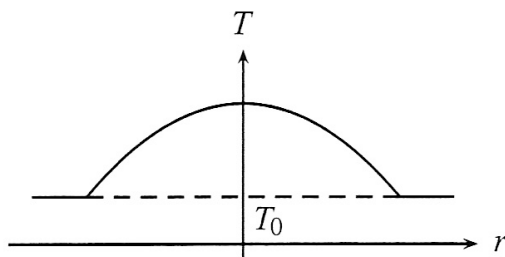
$$\Leftrightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} r = -\frac{\partial(r j_{th})}{\partial r} + P r \Leftrightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r j_{th})}{\partial r} + P$$

Or : $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r$

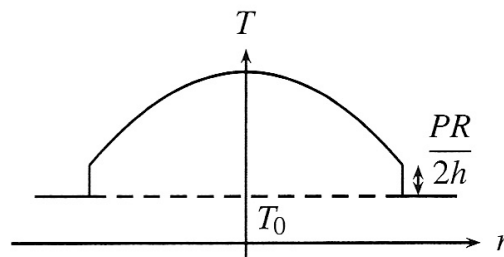
$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + P$$

2. En régime indépendant du temps, $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{P}{\lambda} r$ donc $r \frac{dT}{dr} = -\frac{P}{2\lambda} r^2 + \alpha$, soit $\frac{dT}{dr} = -\frac{P}{2\lambda} r + \frac{\alpha}{r}$ et finalement $T(r) = -\frac{P}{4\lambda} r^2 + \alpha \ln r + \beta$.

$\alpha = 0$ car T ne diverge pas quand $r \rightarrow 0$. De plus, avec $T(R) = T_0$, $T(r) = \frac{P}{4\lambda} (R^2 - r^2) + T_0$.



Question 2



Question 3

3. On a toujours $T(r) = -\frac{P}{4\lambda} r^2 + \alpha \ln r + \beta$, avec $\alpha = 0$ car T ne diverge pas quand $r \rightarrow 0$, mais la condition aux limites en $r = R$ change. On y écrit la continuité du flux :

$$j_{th}(R) S dt = h(T(R) - T_0) S dt \Rightarrow \frac{PR}{2} = h \left(-\frac{P}{4\lambda} R^2 + \beta - T_0 \right),$$

donc :

$$\beta = \frac{P}{4\lambda} R^2 + T_0 + \frac{PR}{2h} \Rightarrow T(r) = \frac{P}{4\lambda} (R^2 - r^2) + T_0 + \frac{PR}{2h}.$$

CCP15 – lame quart d'onde (2015)

1) L'onde électromagnétique se propage suivant l'axe Oz et dans la direction des z croissants. Pour étudier la polarisation, on se place dans le plan xOy et on regarde comment varie l'extrémité du champ électrique.

On pose pour $z = 0$:

$$\begin{aligned} X &= E_{0x} \cos(\omega t) \\ Y &= E_{0y} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

On remarque que :

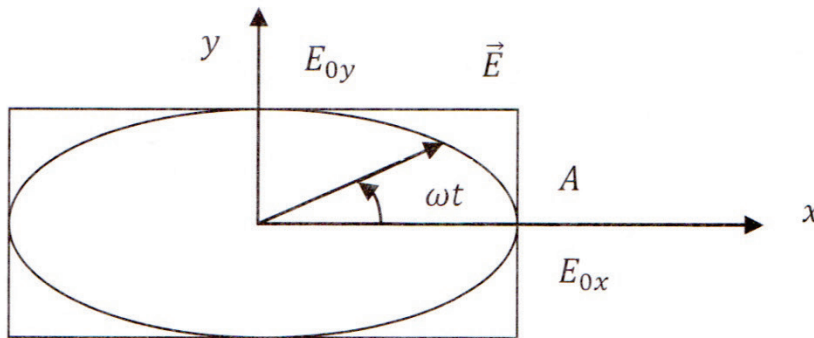
$$\begin{aligned} \frac{X}{E_{0x}} &= \cos(\omega t) \\ \frac{Y}{E_{0y}} &= \sin(\omega t) \end{aligned}$$

donc :

$$\left(\frac{X}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{Y}{E_{0y}}\right)^2 = 1.$$

Cette équation est bien celle d'une ellipse de grand axe Ox et de petit axe Oy .

On peut la représenter dans le plan xOy :



On va maintenant déterminer le sens de rotation du champ électrique. Pour cela, on calcule la dérivée de Y au cours du temps :

$$\frac{dY}{dt} = E_{0y} \omega \cos(\omega t).$$

À partir de $t = 0$ (point A sur le schéma), on a :

$$\frac{dY}{dt} = E_{0y} \omega > 0$$

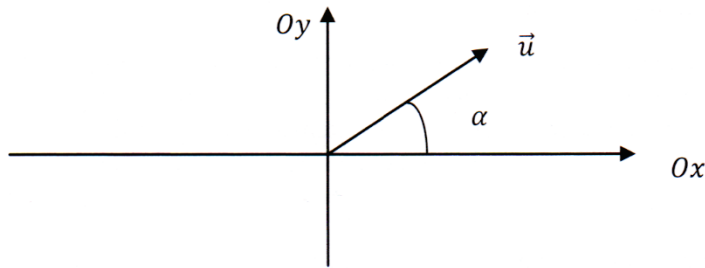
donc Y augmente.

Donc le champ tourne dans le sens trigonométrique.

La polarisation est donc elliptique gauche.

2) On place maintenant un polariseur faisant un angle α avec l'axe Ox . Ce polariseur récupère la projection du champ sur cette direction.

Afin de mieux comprendre, on fait un schéma :



On projette alors le champ électrique sur le vecteur \vec{u} . On obtient alors :

$$\begin{aligned}\vec{E} \cdot \vec{u} &= E_x \cos \alpha + E_y \sin \alpha \\ \vec{E} \cdot \vec{u} &= E_{0x} \cos(\omega t - kz) \cos \alpha + E_{0y} \sin(\omega t - kz) \sin \alpha.\end{aligned}$$

L'intensité lumineuse est donnée par la moyenne temporelle du champ élevé au carré :

$$I = \langle (\vec{E} \cdot \vec{u})^2 \rangle.$$

On commence par calculer $(\vec{E} \cdot \vec{u})^2$:

$$\begin{aligned}(\vec{E} \cdot \vec{u})^2 &= (E_{0x} \cos(\omega t - kz) \cos \alpha + E_{0y} \sin(\omega t - kz) \sin \alpha)^2 \\ (\vec{E} \cdot \vec{u})^2 &= (E_{0x} \cos(\omega t - kz) \cos \alpha)^2 + (E_{0y} \sin(\omega t - kz) \sin \alpha)^2 \\ &\quad + 2E_{0x} \cos(\omega t - kz) \cos \alpha \cos(\omega t - kz) E_{0y} \sin(\omega t - kz) \sin \alpha.\end{aligned}$$

On passe maintenant à la moyenne sachant que :

$$\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = \langle \sin^2(\omega t - kz) \rangle = \frac{1}{2}$$

et :

$$\langle \cos(\omega t - kz) \sin(\omega t - kz) \rangle = 0.$$

On obtient donc :

$$I = \frac{1}{2} (E_{0x} \cos \alpha)^2 + \frac{1}{2} (E_{0y} \sin \alpha)^2.$$

L'intensité varie donc en fonction de l'angle du polariseur. En faisant tourner le polariseur, l'intensité que l'on récupère varie d'une valeur maximale pour $\alpha = 0$ à une valeur minimale pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Pour $\alpha = 0$, on a :

$$I_{max} = \frac{1}{2} (E_{0x})^2.$$

Cette intensité maximale correspond au grand axe de l'ellipse donc Ox .

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$I_{min} = \frac{1}{2} (E_{0y})^2.$$

Cette intensité minimale correspond au petit axe de l'ellipse donc Oy .

Pour la méthode expérimentale, on fait tourner le polariseur. L'intensité varie sans jamais s'annuler. On repère un maximum et un minimum d'intensité pour deux positions du polariseur perpendiculaires. L'intensité maximale donne la direction du grand axe et l'intensité minimale donne la direction du petit axe.

3) On place maintenant une lame quart d'onde.

L'axe lent correspond à l'axe selon lequel la vitesse de propagation est la plus faible, donc celui selon lequel l'indice est le plus élevé.

L'axe rapide correspond à l'axe selon lequel la vitesse de propagation est la plus rapide, donc celui selon lequel l'indice est le plus faible. Donc ici, l'axe Ox est l'axe lent et l'axe Oy est l'axe rapide.

La lame quart d'onde introduit un déphasage φ de $\frac{\pi}{2}$. Donc :

$$\varphi = \frac{2\pi e}{\lambda} (n_0 - n_e) = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit :

$$\delta = (n_0 - n_e)e = \frac{\lambda}{4}.$$

D'où le nom de lame quart d'onde.

L'onde envoyée sur la lame quart d'onde vaut :

$$\vec{E}_{avant} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'onde après passage dans le lame quart d'onde devient :

$$\vec{E}_{après} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos\left(\omega t - kz - \frac{2\pi e}{\lambda} n_0\right) \\ E_{0y} \sin\left(\omega t - kz - \frac{2\pi e}{\lambda} n_e\right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On fait un changement d'origine et on obtient :

$$\vec{E}_{après} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \sin\left(\omega t - kz - \frac{2\pi e}{\lambda} (n_e - n_0)\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc :

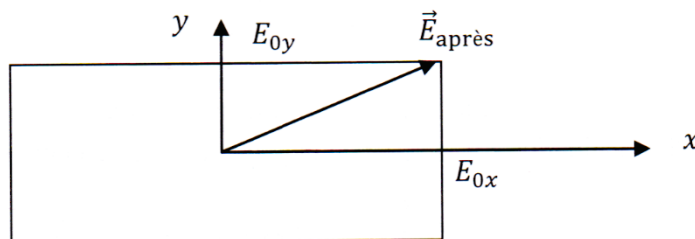
$$\vec{E}_{après} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \sin\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et finalement :

$$\vec{E}_{après} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve donc une onde polarisée rectiligne qui oscille dans le premier cadran.

On représente la direction du champ électrique après le passage dans la lame quart d'onde :



4) La méthode expérimentale, qui permet de trouver le grand axe et le petit axe de l'ellipse, est de faire tourner un polariseur. On constate alors que l'intensité ne s'annule pas mais admet deux maxima et deux minima pour un tour.

Le grand axe correspond alors à la direction du maximum d'intensité et le petit axe à la direction du minimum d'intensité. Il faut ensuite mesurer ces intensités.

On obtient alors une grandeur proportionnelle à E_{0x} et une proportionnelle à E_{0y} qui sont d'après la question 2) :

$$I_{max} = \frac{1}{2} (E_{0x})^2$$

et

$$I_{min} = \frac{1}{2} (E_{0y})^2.$$

On en déduit la valeur de l'excentricité de l'ellipse qui est définie par :

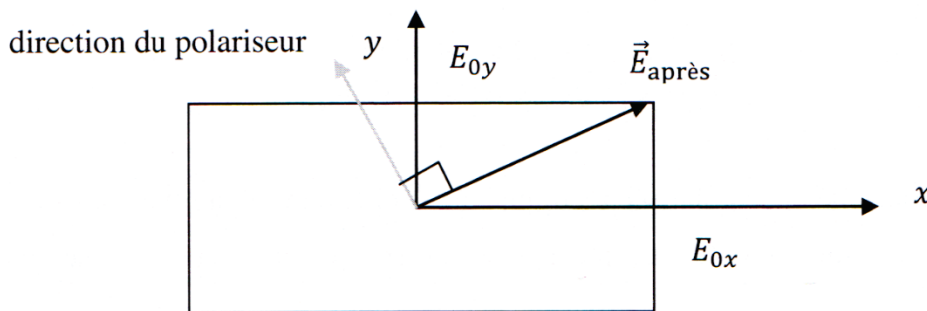
$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(\text{grand axe})^2 - (\text{petit axe})^2}}{\text{grand axe}}.$$

On obtient alors :

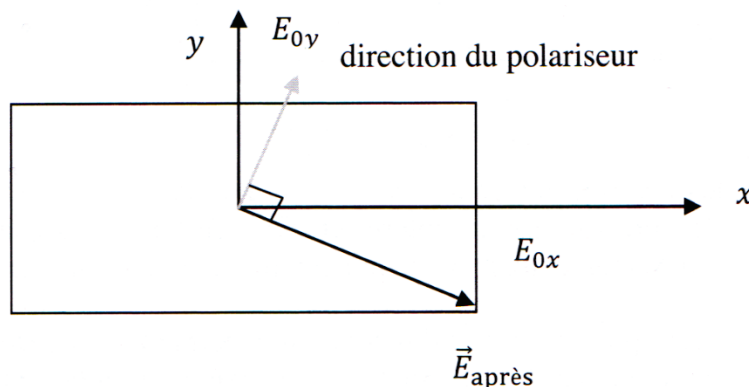
$$\varepsilon = \frac{\sqrt{I_{max} - I_{min}}}{\sqrt{I_{max}}}.$$

Pour être sûr d'avoir une polarisation elliptique, il faut interposer une lame quart d'onde dont l'axe lent coïncide avec le grand axe de l'onde. On analyse ensuite l'onde après la traversée de la lame quart d'onde à l'aide d'un polariseur. On doit avoir une extinction totale.

Si l'onde est elliptique gauche (cas étudié dans la question 3)), en sortie on a la direction de l'extinction qui est perpendiculaire à $\vec{E}_{\text{après}}$ comme sur le schéma :



Si l'onde est polarisée elliptique droite, elle ressort dans le second cadran et la direction de l'extinction qui est perpendiculaire à $\vec{E}_{\text{après}}$ comme sur le schéma :



Donc en conclusion, l'onde polarisée elliptique gauche donne une extinction pour une direction du polariseur dans le second cadran et dans le premier cadran pour l'elliptique droite.

CCP16 - Laser (2015)

1) Le mot LASER est l'acronyme de : « Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation ». Ce qui signifie en français « amplification de la lumière par émission stimulée de rayonnement ».

2) Les petits lasers que vous utilisez en travaux pratique ont une puissance de l'ordre de 100 mW.

Les lasers sont considérés dangereux pour l'œil car c'est une puissance qui est présente sur une toute petite surface. Il faut donc s'intéresser à la puissance surfacique. On suppose que le faisceau laser a un diamètre de $d = 1$ mm. La puissance surfacique est donc :

$$\frac{P}{S} = \frac{4P}{\pi d^2}.$$

L'application numérique donne :

$$\frac{P}{S} = \frac{4 \times 10 \cdot 10^{-3}}{\pi \times (10^{-3})^2} = 12 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Pour l'ampoule à incandescence de 100 W, la puissance surfacique émise à la distance $d' = 1$ m est donnée par :

$$\frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi d'^2}.$$

L'application numérique donne :

$$\frac{P}{S} = \frac{100}{4\pi \times (1)^2} = 8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Donc la puissance surfacique émise par le laser est très supérieure à celle émise par une ampoule à incandescence.

3) R représente le coefficient de réflexion du miroir et T représente le coefficient de transmission.

t_{ar} correspond au temps que met le photon pour faire un aller-retour dans la cavité.

Le photon a une probabilité T de sortir entre t_{ar} et $2t_{ar}$, il faut qu'il reste entre 0 et t_{ar} . Cette probabilité vaut $R = 1 - T$. Donc la probabilité pour que le photon sorte dans l'intervalle de temps donné est le produit des deux probabilités que l'on vient de déterminer soit :

$$\mathcal{P}_1 = RT = T(1 - T).$$

4) Pour que le photon reste, la probabilité est de R . Pour qu'il reste jusqu'au temps $(n - 1)t_{ar}$ la probabilité est de R^{n-1} . La probabilité qu'il sorte ensuite est égale à T . La probabilité totale est donc le produit des probabilités soit :

$$\mathcal{P}_n = R^{n-1}T = T(1 - T)^{n-1}.$$

Le temps de vie du photon est la durée pendant laquelle le photon reste dans la cavité. On doit tenir compte de la probabilité qu'il sorte à l'instant nt_{ar} .

Le temps de vie est donc donné par :

$$t_{vie} = \mathcal{P}_1 t_{ar} + 2\mathcal{P}_2 t_{ar} + 3\mathcal{P}_3 t_{ar} + \dots + n\mathcal{P}_n t_{ar} \dots).$$

On a donc :

$$t_{vie} = t_{ar} \sum_{n=1}^{\infty} n\mathcal{P}_n$$

$$t_{vie} = t_{ar} \sum_{n=1}^{\infty} nT(1-T)^{n-1}$$

$$t_{vie} = Tt_{ar} \sum_{n=1}^{\infty} n(1-T)^{n-1}.$$

En utilisant le résultat de la série géométrique dérivée, on a directement le résultat :

$$t_{vie} = Tt_{ar} \frac{1}{(1 - (1 - T))^2}$$

$$t_{vie} = \frac{t_{ar}}{T}.$$

On peut retrouver ce résultat :

$$n(1-T)^{n-1} = -\frac{d}{dT}((1-T)^n).$$

On peut donc poursuivre le calcul :

$$t_{vie} = Tt_{ar} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{d}{dT}((1-T)^n)$$

$$t_{vie} = -Tt_{ar} \frac{d}{dT} \left(\sum_{n=1}^{\infty} ((1-T)^n) \right)$$

On sait calculer la série géométrique de raison $1 - T$:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} ((1-T)^n) \right) = \frac{1}{1 - (1-T)} = \frac{1}{T}.$$

On a ensuite :

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{1}{T} \right) = -\frac{1}{T^2}.$$

Donc le temps de vie du photon est égal à :

$$t_{vie} = \frac{Tt_{ar}}{T^2} = \frac{t_{ar}}{T}$$

On peut vérifier cette formule : pour une probabilité $T = 1$, c'est-à-dire que le photon sort au bout de t_{ar} la durée de vie doit être t_{ar} .

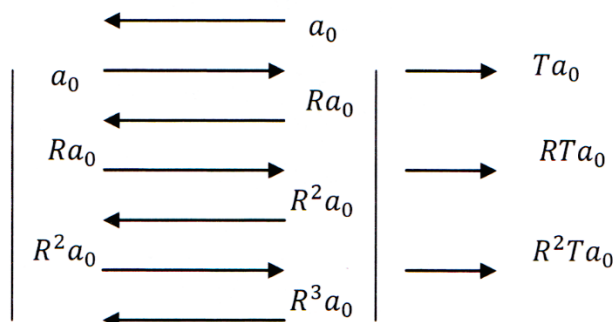
5) L'application numérique donne :

$$t_{vie} = \frac{2L}{cT} = \frac{2 \times 0,25}{3.10^8 \times 0,05}$$

$$t_{vie} = 3,3.10^{-8} \text{ s.}$$

On retrouve bien l'ordre de grandeur de la durée du train d'onde pour le laser qui est de l'ordre de 10^{-7} s.

On cherche maintenant l'amplitude de l'onde dans la cavité. On a donc le schéma suivant avec une infinité d'ondes qui se réfléchissent et sortent :



L'amplitude de l'onde qui sort est donc égale à :

$$s = Ta_0 + RTa_0 + R^2Ta_0 + \dots$$

$$s = Ta_0 \sum_{n=1}^{\infty} R^n$$

$$s = Ta_0 \frac{1}{1 - R}.$$

La puissance de l'onde qui sort est donc :

$$P = s^2 = a_0^2 T^2 \left(\frac{1}{1 - R} \right)^2.$$

La puissance incidente est par définition :

$$P_{inc} = a_0^2$$

$$P_{inc} = \frac{P(1 - R)^2}{T^2}$$

$$\boxed{P_{inc} = P.}$$