

CCP : Planche d'oral 1

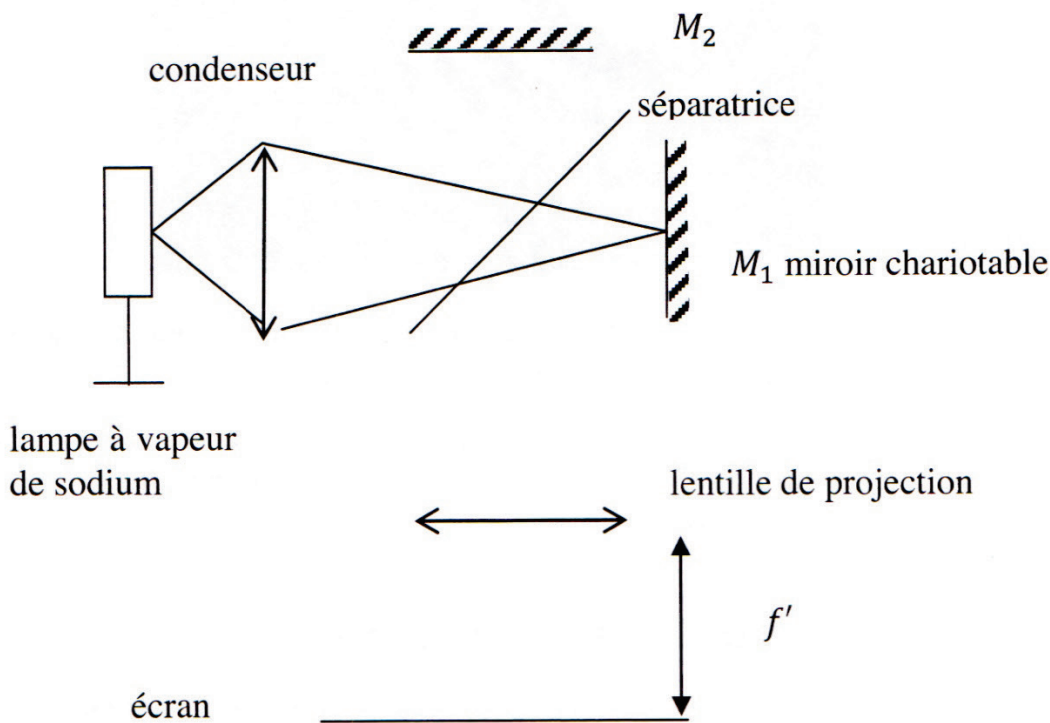
CCP-101) Michelson (2016)

1) Il s'agit de la figure d'interférence observée avec l'interféromètre de Michelson. On a donc besoin de la lampe à vapeur de sodium car la longueur d'onde est de 598 nm. Il faut un condenseur, un écran et une lentille de projection. Il faut aussi l'interféromètre de Michelson.

Le condenseur permet de condenser la lumière au niveau du miroir M_1 . Comme la source est étendue, il faut une lentille de projection pour observer les interférences localisées à l'infini donc dans le plan focal de cette lentille.

On se place bien entendu dans la zone de visibilité des anneaux. Il faut donc que les miroirs soient à peu près à la même distance de la séparatrice.

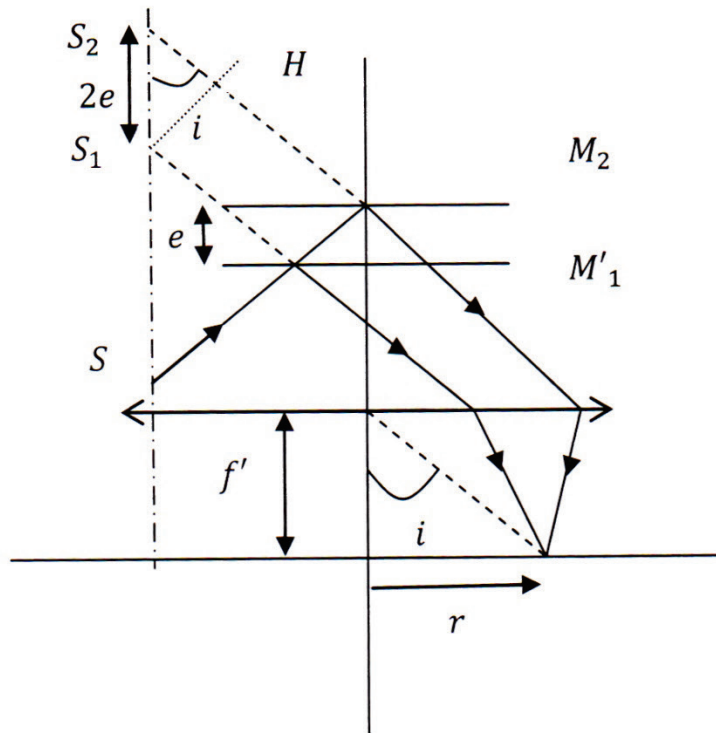
On a donc le montage expérimental suivant :



2) On commence par faire le schéma équivalent de l'interféromètre de Michelson qui dans ce cas est équivalent à une lame d'air d'épaisseur e :



Le schéma équivalent avec la lentille de projection donne :



La différence de chemin optique entre les deux trajets est égale à :

$$\delta = S_2H = 2e \cos i.$$

L'ordre d'interférence au centre est donc :

$$p = \frac{2e}{\lambda}.$$

Sur la figure, on constate que le centre est sombre donc l'ordre d'interférence au centre est demi-entier soit :

$$p_0 = \frac{2e}{\lambda} = m + \frac{1}{2}.$$

Le premier rayon sombre est donné pour :

$$p_1 = p_0 - 1.$$

Le $k^{\text{ième}}$ anneau sombre vérifie :

$$p_k = \frac{2e \cos i}{\lambda} = p_0 - k.$$

Grâce à la figure on peut déterminer le rayon des anneaux en fonction de l'angle d'incidence soit :

$$\tan i = \frac{r}{f'}.$$

Comme, on travaille dans les conditions de Gauss, les angles sont faibles et on peut donc utiliser un développement limité soit :

$$\tan i \approx i$$

$$\cos i \approx 1 - \frac{i^2}{2}$$

On obtient donc en remplaçant dans l'expression du $k^{\text{ième}}$ anneau sombre :

$$\frac{2e \cos i}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda} \left(1 - \frac{i^2}{2} \right) = \frac{2e}{\lambda} - k$$

$$\frac{2e}{\lambda} \left(1 - \frac{r^2}{2f'^2} \right) = \frac{2e}{\lambda} - k.$$

En simplifiant, on trouve :

$$\frac{2e}{\lambda} \left(\frac{r^2}{2f'^2} \right) = k.$$

Le rayon du $k^{\text{ième}}$ anneau sombre vaut donc :

$$r_k = f' \sqrt{\frac{k\lambda}{e}}$$

Il reste maintenant à procéder à l'application numérique en exploitant la photo. L'épaisseur est donnée en fonction du diamètre des rayons par :

$$e = \frac{k\lambda}{r^2} f'^2 = \frac{4k\lambda}{d^2} f'^2.$$

Sur la photo, on relève les diamètres des anneaux sombres :

$$d_1 = 5,2 \text{ cm} ; d_2 = 7,8 \text{ cm} ; d_3 = 9,5 \text{ cm} ; d_4 = 11,1 \text{ cm} ; d_6 = 13,7 \text{ cm} ;$$

$$d_{10} = 18 \text{ cm} ; d_{11} = 18,8 \text{ cm}$$

On obtient les résultats suivants :

$$e = \frac{4 \times 1 \times 589 \cdot 10^{-9}}{(5,2 \cdot 10^{-2})^2} 0,1^2 = 8,71 \text{ } \mu\text{m}$$

$$e = \frac{4 \times 2 \times 589 \cdot 10^{-9}}{(7,8 \cdot 10^{-2})^2} 0,1^2 = 7,74 \text{ } \mu\text{m}$$

$$e = \frac{4 \times 3 \times 589.10^{-9}}{(9,5.10^{-2})^2} 0,1^2 = 7,83 \mu\text{m}$$

$$e = \frac{4 \times 4 \times 589.10^{-9}}{(11,1.10^{-2})^2} 0,1^2 = 7,65 \mu\text{m}$$

$$e = \frac{4 \times 6 \times 589.10^{-9}}{(13,7.10^{-2})^2} 0,1^2 = 7,53 \mu\text{m}$$

$$e = \frac{4 \times 10 \times 589.10^{-9}}{(18.10^{-2})^2} 0,1^2 = 7,27 \mu\text{m}$$

$$e = \frac{4 \times 11 \times 589.10^{-9}}{(18,8.10^{-2})^2} 0,1^2 = 7,33 \mu\text{m}.$$

Les estimations des rayons des anneaux sombres sont plus précises pour les anneaux éloignés du centre car ils sont plus fins.

Pour estimer l'incertitude, on peut par exemple prendre le dixième anneau. On peut dire que le diamètre du 10^{ième} anneau est compris entre 17,8 cm et 18,2 cm. On a donc $u(d) = 0,4$ cm.

On calcule l'incertitude de type B par l'expression suivante :

$$u(e) = \sqrt{\left(\frac{\partial e}{\partial d}\right)^2 u(d)^2} = \left|\frac{\partial e}{\partial d}\right| u(d).$$

$$\frac{\partial e}{\partial d} = -\frac{8k\lambda}{d^3} f'^2.$$

L'application numérique donne :

$$u(e) = \frac{8k\lambda}{d^3} f'^2 u(d) = \frac{8 \times 10 \times 589.10^{-9}}{(18.10^{-2})^3} \times 0,1^2 \times 0,4.10^{-2} = 0,32 \mu\text{m}.$$

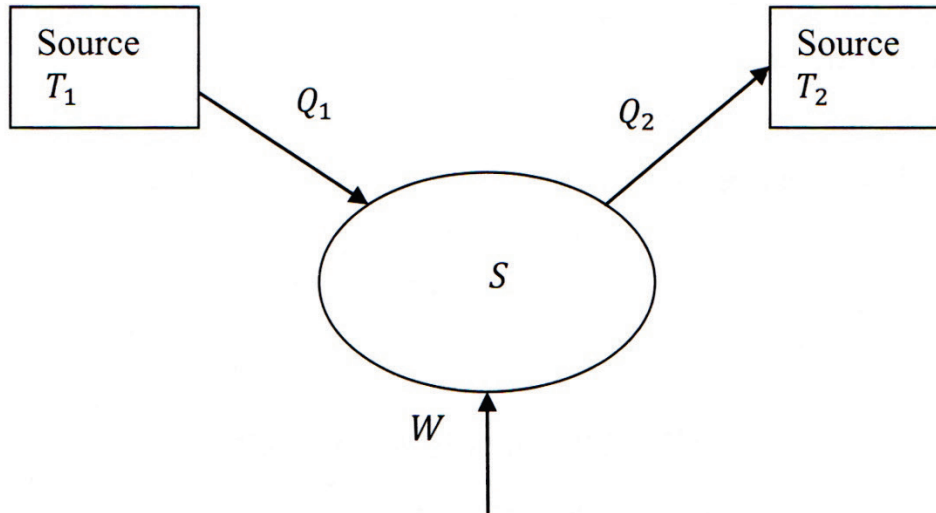
On a donc :

$$e = 7,3 \bar{\pm} 0,3 \mu\text{m}.$$

CCP-102) Réfrigérateur

On commence par définir le système S (fluide réfrigérant) qui reçoit le travail W , le transfert thermique Q_1 de la source froide et le transfert thermique $-Q_2$ de la source chaude.

Attention aux définitions qui sont différentes de celles de votre cours.



L'efficacité est définie par le rapport gain sur dépense. Le gain correspond au transfert thermique prélevé à la source froide donc ici à Q_1 et la dépense correspond au travail fourni par le moteur W .

D'où l'expression de l'efficacité :

$$\varepsilon = \frac{Q_1}{W}.$$

Il faut donc exprimer Q_1 en fonction de W .

On applique le premier principe de la thermodynamique au système S pour un cycle :

$$\Delta U = W + Q_1 - Q_2 = 0.$$

Il faut prendre les grandeurs reçues par le système.

On applique ensuite le deuxième principe de la thermodynamique au système S pour un cycle :

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

On obtient donc un système de deux équations qui va nous permettre de trouver une relation entre W et Q_1 :

$$\begin{aligned} W + Q_1 - Q_2 &= 0 \\ \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} &= 0. \end{aligned}$$

On exprime Q_2 dans la deuxième équation :

$$Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

Puis on remplace dans la première équation :

$$W + Q_1 - Q_1 \frac{T_2}{T_1} = 0.$$

De là on en déduit :

$$Q_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = -W.$$

D'où l'efficacité :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{T_1}{T_2 - T_1}.$$

2) On utilise la relation donnée dans l'énoncé :

$$\left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)_{\text{réel}} = k \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)_{\text{réversible}}.$$

Or en utilisant les résultats de la question 1) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)_{\text{réversible}} &= \frac{T_2}{T_1}. \\ \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)_{\text{réel}} &= k \frac{T_2}{T_1}. \end{aligned}$$

On reprend l'expression du premier principe de la thermodynamique :

$$W + Q_1 - Q_2 = 0$$

qui reste inchangé car ne dépend pas de la réversibilité de la transformation.

On exprime ensuite W en fonction de Q_1 :

$$W = Q_2 - Q_1 = Q_1 \left(k \frac{T_2}{T_1} - 1\right)$$

On trouve alors l'efficacité réelle :

$$\boxed{\varepsilon' = \frac{T_1}{kT_2 - T_1}.$$

3) Reste à faire les applications numériques :

$$\varepsilon = \frac{T_1}{T_2 - T_1} = \frac{273 + 3}{20 - 3}$$

$$\boxed{\varepsilon = 16,23.}$$

$$\varepsilon' = \frac{T_1}{kT_2 - T_1} = \frac{273 + 3}{1,1 \times (273 + 20) - 273 - 3}$$

$$\boxed{\varepsilon' = 5,96.}$$

L'efficacité est donc bien inférieure pour la transformation réelle.

CCP-103) Satellite géostationnaire

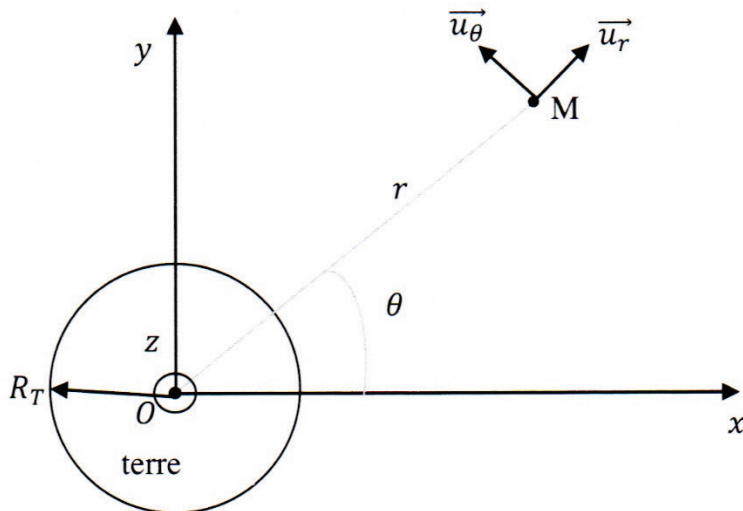
1) Un satellite géostationnaire est un satellite qui possède la même période de révolution que la terre, c'est-à-dire qu'il est immobile par rapport à la terre.

On commence par définir le système étudié : le satellite de masse m .

Ensuite, il faut définir le référentiel dans lequel on se place. On utilise le référentiel géocentrique qui a pour origine O , le centre de la terre, et dont les axes sont dirigés vers trois étoiles fixes. Ce référentiel est supposé galiléen.

Le satellite est uniquement soumis à la force centrale d'attraction terrestre c'est-à-dire à la loi de Newton qui est donnée par : $\vec{F} = -G \frac{mM_T}{r^2} \vec{u}_r$.

Avec G la constante de gravitation universelle qui vaut : $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$



Le satellite est repéré par le vecteur position \overline{OM} : $\overline{OM} = r \vec{u}_r$.

Pour obtenir la vitesse \vec{v} , on dérive \overline{OM} par rapport au temps. Attention le vecteur \vec{u}_r varie lorsque le point M se déplace.

On obtient pour une trajectoire circulaire : $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

On détermine ensuite l'accélération \vec{a} :

$$\vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r.$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on arrive à l'expression suivante :

$$m\vec{a} = -G \frac{mM_T}{r^2} \vec{u}_r.$$

En projetant sur \vec{u}_θ , on obtient : $r\ddot{\theta} = 0$.

Donc on trouve que $\dot{\theta}$ est une constante.

En projetant sur \vec{u}_r , on obtient :

$$mr\dot{\theta}^2 = G \frac{mM_T}{r^2}.$$

On peut alors déterminer r :

$$r^3 = G \frac{M_T}{\dot{\theta}^2}.$$

Reste maintenant à déterminer r en fonction des données du sujet. On va exprimer g_0 qui est le champ de pesanteur au niveau du sol en fonction de \mathcal{G} et du rayon de la terre R_T .

Pour une masse se trouvant au niveau du sol, elle est soumise à la force suivante :

$$\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{R_T^2} \vec{u}_r.$$

On définit le champ de pesanteur terrestre par :

$$\vec{F} = -mg_0 \vec{u}_r.$$

Donc, on trouve en identifiant :

$$g_0 = \mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2}.$$

Pour le satellite géostationnaire, $\dot{\theta}$ est égal à la vitesse de rotation angulaire de la terre ω , qui a pour expression :

$$\dot{\theta} = \omega = \frac{2\pi}{j_s}.$$

En remplaçant ces expressions, on détermine le rayon de la trajectoire r :

$$r = \sqrt[3]{\mathcal{G} \frac{M_T}{\dot{\theta}^2}}.$$

D'où :

$$r = \sqrt[3]{g_0 \frac{R_T^2}{\left(\frac{2\pi}{j_s}\right)^2}}.$$

Et finalement en simplifiant, on a :

$$r = \sqrt[3]{g_0 \frac{R_T^2 j_s^2}{4\pi^2}}.$$

Pour obtenir l'altitude du satellite, il faut maintenant soustraire le rayon de la terre. D'où l'expression de l'altitude h :

$$h = \sqrt[3]{g_0 \frac{R_T^2 j_s^2}{4\pi^2}} - R_T.$$

Reste maintenant à procéder à l'application numérique qui ne pose aucun problème mise à part qu'il faut convertir les km en m.

$$h = \sqrt[3]{9,8 \frac{(6378 \cdot 10^3)^2 86164^2}{4\pi^2}} - 6378 \cdot 10^3.$$

Donc on obtient :

$$h = 35\,788 \text{ km.}$$

La valeur du rayon de l'orbite est :

$$r = 42\,166 \text{ km.}$$

Cette altitude élevée pour les satellites géostationnaires est un inconvénient pour le temps de propagation de l'information. Les satellites doivent aussi émettre avec une plus grande puissance à cause de l'atténuation et c'est aussi plus complexe à envoyer par rapport à un satellite de basse altitude.

2) Sur l'orbite géostationnaire, le satellite a une vitesse $v = r\omega$. Son énergie cinétique est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

avec

$$\omega^2 = \mathcal{G} \frac{M_T}{r^3}.$$

On arrive donc à l'expression de l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}m\mathcal{G} \frac{M_T}{r}.$$

On va maintenant rechercher l'expression de l'énergie potentielle. On part de l'expression de la force gravitationnelle qui est :

$$\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{r^2} \vec{u}_r.$$

Cette force dérive d'une énergie potentielle car :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p.$$

On a donc en identifiant :

$$\frac{\partial E_p}{\partial r} = \mathcal{G} \frac{mM_T}{r^2}.$$

D'où

$$E_p = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{r} + \text{constante.}$$

On peut fixer l'énergie potentielle nulle pour un rayon infini, donc :

$$E_p = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{r}.$$

Donc finalement l'énergie mécanique du satellite vaut :

$$E_{m1} = \frac{1}{2} mG \frac{M_T}{r} - G \frac{mM_T}{r}$$

En simplifiant, on trouve :

$$E_{m1} = -\frac{1}{2} mG \frac{M_T}{r}.$$

En remplaçant en fonction de g_0 :

$$E_{m1} = -\frac{1}{2} mg_0 \frac{R_T^2}{r}.$$

Le satellite passe sur une orbite de rayon $r + h$.

Donc l'énergie mécanique est donnée par :

$$E_{m2} = -\frac{1}{2} mg_0 \frac{R_T^2}{r + h}$$

On peut maintenant en déduire la variation d'énergie ΔE :

$$\Delta E = E_{m2} - E_{m1}$$

En remplaçant, on aboutit au résultat suivant :

$$\Delta E = -\frac{1}{2} mg_0 \frac{R_T^2}{(r + h)} + \frac{1}{2} mg_0 \frac{R_T^2}{r}$$

Donc :

$$\Delta E = \frac{1}{2} mg_0 R_T^2 \left(\frac{h}{r(r + h)} \right).$$

On passe ensuite à l'application numérique de l'énergie par unité de masse :

$$\frac{\Delta E}{m} = \frac{1}{2} 9,8. (6378 \cdot 10^3)^2 \left(\frac{50 \cdot 10^3}{42\,166 \cdot 10^3 (42\,166 \cdot 10^3 + 50 \cdot 10^3)} \right)$$

$$\frac{\Delta E}{m} = 5,6 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

CCP-104) Effet tunnel (2016)

1) L'équation de Schrödinger pour une particule placée dans un potentiel $V(x)$ est la suivante :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi.$$

Le dernier terme $V(x)\psi$ est le plus simple. Il est homogène à une énergie potentielle donc à une énergie car la fonction d'onde est sans dimension.

On a donc :

$$[V(x)\psi] = ML^2T^{-2}.$$

\hbar est la constante de Planck réduite qui a comme unité J. s.

Donc le terme $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$ est donc bien homogène à une énergie soit :

$$\left[i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] = ML^2T^{-2}.$$

$\frac{\hbar^2}{2m}$ a comme dimension :

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \right] = \frac{[\text{énergie}]^2 T^2}{M} = \frac{[ML^2T^{-2}]^2 T^2}{M} = ML^4T^{-2}$$

On a aussi :

$$\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] = L^{-2}.$$

Donc le deuxième terme de l'équation vérifie :

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] = ML^2T^{-2}.$$

Les trois termes sont donc homogènes et ont comme dimension la dimension d'une énergie.

On prend maintenant une solution de la forme $\psi(x, t) = \phi(x)\chi(t)$.

C'est la technique pour trouver les solutions stationnaires de l'équation.

La dérivée partielle par rapport au temps donne :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\phi(x)\chi(t)) = \phi(x)\chi'(t).$$

La dérivée partielle par rapport à la coordonnée d'espace vaut :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\phi(x)\chi(t)) = \phi'(x)\chi(t).$$

La dérivée seconde donne :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\phi'(x)\chi(t)) = \phi''(x)\chi(t).$$

En remplaçant dans l'équation de Schrödinger, on trouve :

$$i\hbar \phi(x)\chi'(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \phi''(x)\chi(t) + V(x)\phi(x)\chi(t).$$

2) Lorsque l'on résout l'équation pour la fonction dépendant du temps, on a donc :

$$i\hbar \frac{\chi'(t)}{\chi(t)} = cte = E.$$

La constante est homogène à une énergie que l'on appelle E .

On a donc :

$$\frac{\chi'(t)}{\chi(t)} = \frac{E}{i\hbar} = -i \frac{E}{\hbar}.$$

La solution est de la forme :

$$\chi(t) = Ae^{-i \frac{Et}{\hbar}}.$$

La solution de l'équation de Schrödinger est donc de la forme :

$$\psi(x, t) = \phi(x) \exp\left(-\frac{i E t}{\hbar}\right).$$

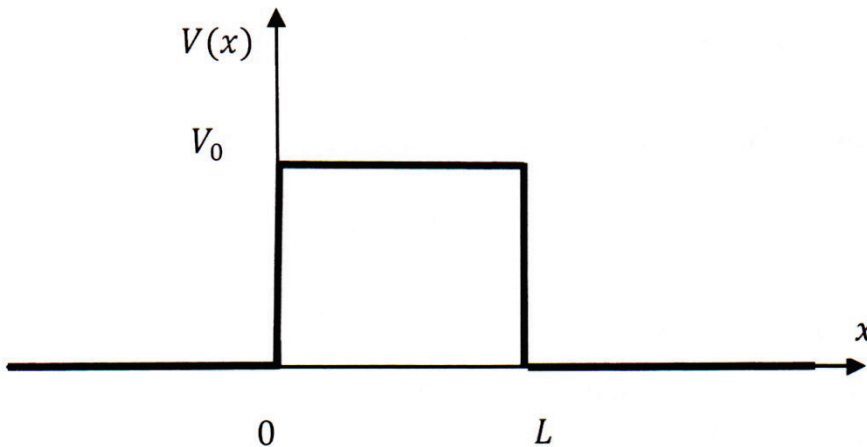
L'équation vérifiée par $\phi(x)$ est donc la suivante :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} + V(x) = E.$$

On peut donc l'écrire sous la forme :

$$\phi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x))\phi(x) = 0.$$

3) On commence par représenter l'énergie potentielle de la particule :



En mécanique classique, l'énergie mécanique de la particule vaut :

$$E_m = E_c + V(x).$$

L'énergie cinétique est égale à :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2.$$

Cette grandeur est donc positive.

En mécanique classique, les états d'énergie négative sont interdits.

Si la particule possède une énergie telle que $0 < E_m < V_0$, elle ne pourra rester que du côté des x négatifs. La particule rebondit donc sur la barrière de potentiel et ne peut donc pas traverser.

Si la particule possède une énergie mécanique supérieure à V_0 , tous les états sont possibles et la particule peut se trouver du côté des x positifs.

4) La particule se trouve du côté des x négatifs et peut franchir la barrière de potentiel même si son énergie est inférieure à V_0 . On a donc ce que l'on appelle un effet tunnel. Ceci est totalement impossible en physique classique.

5) On cherche la forme des solutions dans les trois domaines.

Dans la première zone pour $x < 0$, l'équation de Schrödinger réduite s'écrit pour un potentiel nul :

$$\phi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \phi(x) = 0.$$

On a donc une équation différentielle du second degré :

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \phi(x) = 0$$

On pose $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$.

Les solutions sont de la forme :

$$\phi(x < 0) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}.$$

Dans la zone où $x > L$, on a la même équation car le potentiel est nul. On a donc la même solution soit :

$$\phi(x > L) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}.$$

On peut poser $B_3 = 0$ car la particule se déplacera uniquement suivant les x croissants.

Dans ces deux zones, la fonction d'onde est de la forme :

$$\psi(x, t) = (A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}) \exp\left(-\frac{i E t}{\hbar}\right)$$

$$\psi(x, t) = A_1 e^{i\left(kx - \frac{E t}{\hbar}\right)} + B_1 e^{-i\left(kx + \frac{E t}{\hbar}\right)}.$$

Ceci correspond donc à deux ondes planes progressives. L'une suivant les x croissants et l'autre suivant les x décroissants.

k représente donc le vecteur d'onde.

Dans la zone $0 < x < L$, on a l'équation de Schrödinger réduite :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + V_0 \phi(x) = E \phi(x)$$

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \phi(x) = 0.$$

On pose $\alpha = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$. La solution générale est de la forme :

$$\phi(0 < x < L) = A_2 e^{\alpha x} + B_2 e^{-\alpha x}.$$

La fonction d'onde a donc la forme suivante :

$$\psi(x, t) = (A_2 e^{\alpha x} + B_2 e^{-\alpha x}) \exp\left(-\frac{i E t}{\hbar}\right).$$

On a donc une somme de deux ondes évanescentes dans la zone qui serait interdite en mécanique classique.

α représente un terme inversement proportionnel à une longueur et caractérise la longueur caractéristique de l'amortissement.

Afin d'obtenir les constantes d'intégration, il faut utiliser les conditions aux limites qui sont : les continuités de $\phi(x)$ et de sa dérivée $\frac{d\phi}{dx}$.

En $x = 0$, on a :

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= A_2 + B_2 \\ ik(A_1 - B_1) &= \alpha(A_2 - B_2) \end{aligned}$$

En $x = L$, on a :

$$\begin{aligned} A_3 e^{ikL} &= A_2 e^{\alpha L} + B_2 e^{-\alpha L}. \\ ikA_3 e^{ikL} &= \alpha A_2 e^{\alpha L} - \alpha B_2 e^{-\alpha L}. \end{aligned}$$

La résolution de ce système n'est pas demandée.

On rappelle que la constante B_3 est nulle.

6) Le coefficient de transfert est donné dans l'énoncé.

On a donc :

$$T = \frac{16\alpha^2 k^2}{((\alpha^2 + k^2)^2 e^{-2\alpha L} + (\alpha^2 + k^2)^2 e^{2\alpha L} + 12\alpha^2 k^2 - 2\alpha^4 - 2k^4)}.$$

Dans le cas d'une barrière de potentiel épaisse $L \gg 1$, on peut simplifier ce coefficient en ne gardant que les termes prépondérants soit :

$$T = \frac{16\alpha^2 k^2}{(\alpha^2 + k^2)^2 e^{2\alpha L}}$$

On a donc un coefficient de transmission qui a une décroissance exponentielle :

$$T = \frac{16\alpha^2 k^2}{(\alpha^2 + k^2)^2} e^{-2\alpha L}.$$

On voit bien que le coefficient α intervient au niveau de l'amortissement.

L'amplitude qui ressort dépend donc de l'épaisseur de la barrière de potentiel.

En reprenant les expressions de α et k , on trouve :

$$T = \frac{16 \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \frac{2mE}{\hbar^2}}{\left(\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right)^2} e^{-2\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}L}$$

$$T = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}L} \propto e^{-\frac{L}{\delta}}$$

avec :

$$\delta = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

On constate que plus la différence entre l'énergie et le potentiel est faible, plus la distance caractéristique de l'amortissement est grande.

Pour les courbes, seule la largeur de la barrière de potentiel est modifiée. La longueur caractéristique δ n'est pas modifiée, donc le rapport des amplitudes des deux ondes de sortie doit être égal à :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{e^{-\frac{L_2}{\delta}}}{e^{-\frac{L_1}{\delta}}} = e^{-\frac{L_2 - L_1}{\delta}} = e^{\frac{L}{\delta}}$$

On lit sur les graphes le rapport des amplitudes de chaque signal après la barrière les graphes :

$$\frac{A_2}{A_1} \approx 5.$$

On a donc en reportant dans la valeur théorique :

$$e^{\frac{L}{\delta}} = 5$$

$$\frac{L}{\delta} = \ln 5 = 1,6.$$

On pourrait en déduire la différence d'énergie $V_0 - E$.

CCP-105) Conducteur ohmique (2015)

1) On commence par redonner les quatre équations de Maxwell dans le vide :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} : \text{Maxwell - Gauss}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 : \text{Maxwell - flux}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} : \text{Maxwell - Faraday}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) : \text{Maxwell - Ampère}$$

Dans le métal, on peut écrire les équations de Maxwell comme dans le vide.

Mais on va maintenant simplifier les équations dans le cas d'un métal.

Le conducteur est un conducteur ohmique, donc on a la loi d'Ohm locale qui est :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

On peut alors comparer les deux termes de courant qui interviennent dans l'équation de Maxwell-Ampère. Pour un bon conducteur γ est de l'ordre de 10^7 S.m^{-1} .

Le courant de conduction, $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, est de l'ordre de grandeur :

$$j = \gamma E.$$

Le courant de déplacement \vec{j}_D est :

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ce terme a pour ordre de grandeur (on se place en régime sinusoïdal de pulsation ω) :

$$j_D = \epsilon_0 \omega E.$$

On compare alors ces deux termes :

$$\frac{j_D}{j} = \frac{\epsilon_0 \omega E}{\gamma E}$$

$$\frac{j_D}{j} = \frac{\epsilon_0 \omega}{\gamma}.$$

On va chercher jusqu'à quelle pulsation on peut négliger le courant de déplacement.

On cherche donc :

$$\frac{j_D}{j} \ll 1$$

donc

$$\frac{\epsilon_0 \omega}{\gamma} \ll 1.$$

Donc :

$$\omega \ll \frac{\gamma}{\epsilon_0}.$$

On passe à l'application numérique :

$$\omega \ll 10^7 \times 36\pi 10^9$$

$$\omega \ll 36\pi 10^{17} \text{ rad.s}^{-1}.$$

Cette valeur de pulsation est très grande et bien au-delà du domaine de validité de la loi d'Ohm locale.

On pourra donc négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction. À l'oral on peut directement donner le résultat qui a été démontré dans le cours.

On va maintenant déterminer l'expression de la charge volumique ρ . Dans le métal, on a l'équation de conservation de la charge qui est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0.$$

On transforme cette équation car :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\gamma \vec{E}) = 0.$$

Or γ est constant donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \text{div} \vec{E} = 0$$

et

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Et finalement, on trouve l'équation vérifiée par la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0.$$

C'est une équation différentielle du premier ordre sans second membre qui admet comme solution :

$$\rho = A e^{-\frac{\gamma t}{\epsilon_0}}.$$

On en déduit que la charge volumique ρ tend vers 0 au bout d'un certain temps.

On prendra donc dans les équations de Maxwell :

$$\rho = 0.$$

On simplifie alors les équations de Maxwell qui deviennent :

$$\boxed{\text{div} \vec{E} = 0}$$

$$\boxed{\text{div} \vec{B} = 0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}.}$$

2) Les équations de Maxwell étant couplées, on va donc les découpler afin de trouver l'équation vérifiée par le champ électrique.

Pour cela, on utilise la formule d'analyse vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

or $\text{div}\vec{E} = 0$, donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = -\Delta\vec{E}.$$

En utilisant les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) &= \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) \\ -\Delta\vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) \\ -\Delta\vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\gamma\vec{E}) \\ -\Delta\vec{E} &= -\mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

On trouve alors l'équation vérifiée par le champ électrique :

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0.}$$

3) On cherche à résoudre cette équation dans le cas particulier de l'onde harmonique. On utilise la notation complexe qui permet de remplacer la dérivée temporelle par la multiplication par $i\omega$.

On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} &= i\omega E_0 e^{i(\omega t - kz)}\vec{e}_x \\ \Delta\vec{E} &= \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\vec{e}_x \\ \Delta\vec{E} &= -k^2 E_0 e^{i(\omega t - kz)}\vec{e}_x.\end{aligned}$$

On remplace maintenant dans l'équation différentielle :

$$-k^2 E_0 e^{i(\omega t - kz)}\vec{e}_x - \mu_0\gamma i\omega E_0 e^{i(\omega t - kz)}\vec{e}_x = 0.$$

En simplifiant, on obtient la relation de dispersion :

$$-k^2 - \mu_0\gamma i\omega = 0.$$

On va donc déterminer k qui est complexe :

$$k^2 = -i\mu_0\gamma\omega$$

Avec le nombre complexe i ($i^2 = -1$) défini ainsi :

$$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

En prenant la racine, on trouve l'expression suivante :

$$\begin{aligned}k &= \pm\sqrt{\mu_0\gamma\omega}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ k &= \pm\sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}(1 - i).\end{aligned}$$

On va poser :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

qui est l'épaisseur de peau.

On reporte dans l'expression du champ :

$$E = E_0 e^{i\left(\omega t \pm \frac{(1-i)z}{\delta}\right)}$$

On trouve donc deux solutions qui sont :

$$E_+ = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}$$

et

$$E_- = E_0 e^{\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\omega t + \frac{z}{\delta}\right)}.$$

On peut, pour mieux comprendre, revenir aux expressions réelles en prenant la partie réelle de l'expression complexe :

$$E_+ = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

$$E_- = E_0 e^{\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t + \frac{z}{\delta}\right).$$

On trouve donc pour E_+ une onde progressive suivant les z croissants (terme en cosinus) qui est amortie (terme en exponentiel).

Pour l'autre solution E_- , c'est une onde progressive suivant les z décroissants qui est amortie.

CCP-106) Filtrage (2015)

1) Le signal est donc égal à la somme de trois termes représentant le signal continu et les deux harmoniques :

$$e = 2 + 0,5 \cos \omega t + 0,2 \cos 3\omega t.$$

On a posé :

$$\omega = 2\pi f_0.$$

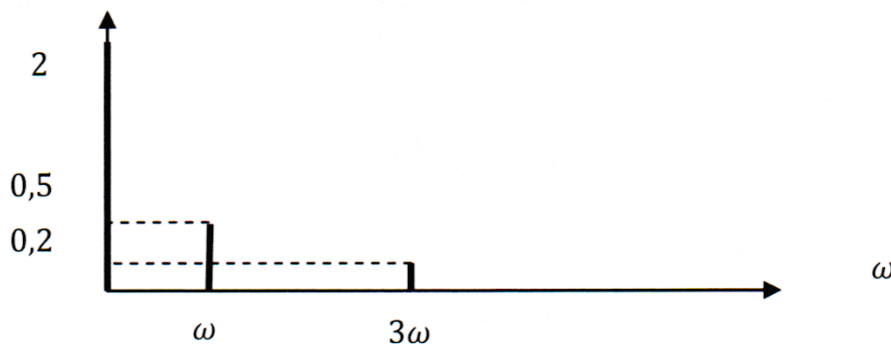
Le signal est donc égal à :

$$e = 2 + 0,5 \cos 2\pi f_0 t + 0,2 \cos 6\pi f_0 t.$$

En remplaçant par la valeur de la fréquence, on a :

$$e = 2 + 0,5 \cos 200\pi t + 0,2 \cos 600\pi t.$$

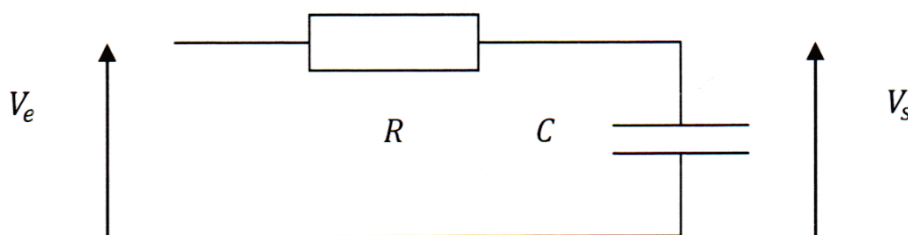
2) Le spectre a donc l'allure suivante :



3) Pour obtenir un signal continu, il faut donc couper les deux composantes de fréquence f_0 et $3f_0$.

Donc la fréquence de coupure du filtre RC doit être inférieure à f .

On reprend le filtre passe bas RC qui a l'allure suivante :



On pose :

$$Z_c = \frac{1}{jC\omega}.$$

On a donc un diviseur de tension et la fonction de transfert vaut :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{Z_c}{R + Z_c}.$$

Il est préférable de diviser par Z_c afin de simplifier l'expression qui devient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\frac{R}{Z_c} + 1}.$$

En remplaçant, on obtient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$

Le module de la fonction de transfert est donc égal à :

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}.$$

On vérifie bien que c'est un filtre passe bas en regardant les limites. En basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert on a donc $V_s = V_e$. Ceci correspond donc à $H = 1$.

En haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil donc un court-circuit. La tension de sortie est donc nulle et la fonction de transfert tend donc bien vers 0.

La pulsation de coupure est définie par :

$$H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}.$$

On a donc ici une pulsation maximale qui vaut : $H_{max} = 1$.

La pulsation de coupure vérifie donc la relation suivante :

$$\sqrt{1 + (RC\omega_c)^2} = \sqrt{2}.$$

On a donc :

$$RC\omega_c = 1.$$

La fréquence de coupure est donc égale à :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$$

$$f_c = \frac{1}{4\pi RC}.$$

On doit donc avoir :

$$\frac{1}{4\pi RC} < f_0$$

soit :

$$RC > \frac{1}{4\pi f_0}.$$

L'application numérique donne :

$$RC > \frac{1}{4\pi \times 100} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$$

On peut prendre par exemple :

$$C = 100 \text{ nF}$$

$$R = 100 \text{ k}\Omega.$$

On vérifie le résultat :

$$RC = 10^5 \times 100 \cdot 10^{-9} = 10^{-2}.$$

La condition est donc vérifiée.

CCP-107) Ressort tournant (2015)

1) Dans cette question, on demande les forces exercées sur la masse. Donc le système est la masse ponctuelle m .

Avant de définir les forces qui agissent, on doit commencer par préciser le référentiel d'étude. On choisit ici le référentiel tournant lié à l'axe Δ (la question 2) incite à prendre ce référentiel). Ce référentiel n'est donc pas galiléen donc, il faut faire intervenir les forces d'inerties d'entraînement et de Coriolis.

La masse m est donc soumise au poids :

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

Elle est soumise à la force de rappel du ressort :

$$\vec{F}_k = -k(x' - \ell_0)\vec{u}_r,$$

\vec{u}_r représentant le vecteur unitaire de l'axe Δ .

Elle est soumise à la réaction du support. Cette force est perpendiculaire au déplacement. On la nommera \vec{R} .

Elle est soumise à la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e.$$

Reste à exprimer l'accélération d'entraînement qui est l'accélération du point coïncident. Ce point a un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Oz .

Donc l'accélération est :

$$\vec{a}_e = -x'\omega_0^2\vec{u}_r.$$

D'où la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie} = mx'\omega_0^2\vec{u}_r.$$

Reste à terminer la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c.$$

Il faut donc exprimer l'accélération de Coriolis qui vaut (expression à connaître par cœur) :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

où $\vec{\Omega}$ représente le vecteur rotation du référentiel d'étude par rapport au référentiel galiléen et \vec{v}_r est la vitesse relative du point considéré.

Donc ici :

$$\vec{\Omega} = \omega_0\vec{z}.$$

Et la vitesse relative vaut :

$$\vec{v}_r = \dot{x}'\vec{u}_r$$

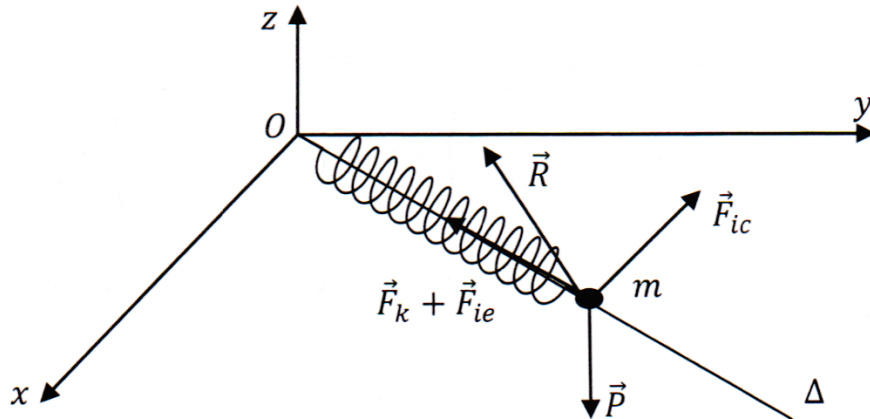
avec \vec{u}_r , le vecteur unitaire colinéaire à l'axe Δ .

D'où la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{F}_{ic} = -2m\omega_0\vec{z} \wedge \dot{x}'\vec{u}_r = -2m\omega_0\dot{x}'\vec{u}_\theta$$

avec \vec{u}_θ , le vecteur unitaire perpendiculaire à l'axe Δ et se trouvant dans le plan xOy .

On peut donc représenter toutes ces forces sur un schéma afin de bien les visualiser.



2) On peut maintenant appliquer le principe fondamental de la dynamique à la masse m .

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_k + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} + \vec{R}.$$

L'accélération pour un mouvement unidirectionnel est donnée par :

$$\vec{a} = \ddot{x}'\vec{u}_r.$$

Donc en projection sur l'axe Δ , on trouve :

$$m\ddot{x}' = -k(x' - \ell_0) + mx'\omega_0^2.$$

On trouve donc l'équation différentielle du deuxième ordre :

$$\ddot{x}' + \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)x' = \frac{k}{m}\ell_0.$$

Si :

$$\frac{k}{m} - \omega_0^2 > 0,$$

on a donc un oscillateur harmonique dont la solution est en fonction des constantes A et φ :

$$x' = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \omega_0^2} t + \varphi\right) + \frac{k\ell_0}{k - m\omega_0^2}.$$

Le mouvement de la masse est donc un mouvement oscillatoire autour de la position d'équilibre qui est :

$$x'_{eq} = \frac{k\ell_0}{k - m\omega_0^2}.$$

Remarque

Si l'on prend $\omega_0 = 0$, on retrouve les oscillations d'un ressort dans un référentiel galiléen. La rotation de l'axe fait uniquement changer la pulsation des oscillations.

Si :

$$\frac{k}{m} - \omega_0^2 < 0,$$

on a donc une solution qui diverge de la forme :

$$x' = A \operatorname{ch}\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k}{m}} t\right) + B \operatorname{sh}\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k}{m}} t\right) + \frac{k\ell_0}{k - m\omega_0^2}$$

Dans ce cas, il risque d'y avoir une rupture du ressort. Aucun n'équilibre n'est possible.

Si :

$$\frac{k}{m} - \omega_0^2 = 0$$

alors, on a encore une solution qui diverge de la forme :

$$x'(t) = \frac{k}{2m} \ell_0 t^2 + At + B.$$

On risque là aussi la rupture du ressort.

3) On a déjà déterminé la position d'équilibre qui est possible.

On peut pour cette question de stabilité utiliser une méthode énergétique. En effet, on a ici un système qui est conservatif.

Le poids ne travaille pas car le mouvement est horizontal. La réaction ainsi que la force d'inertie de Coriolis sont perpendiculaires au déplacement, donc elles ne travaillent pas.

La force de rappel du ressort dérive d'une énergie potentielle qui est d'après la définition :

$$\vec{F}_k = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} E_{pk}.$$

Or la force est uniquement suivant l'axe Δ , donc :

$$\frac{\partial E_{pk}}{\partial x'} = k(x' - \ell_0).$$

Donc en prenant l'énergie potentielle nulle pour $x' = \ell_0$, on a :

$$E_{pk} = \frac{1}{2} k(x' - \ell_0)^2.$$

On détermine maintenant l'énergie potentielle dont dérive la force d'inertie d'entraînement. On procède de façon analogue à ce que l'on vient de faire :

$$\vec{F}_{ie} = - \overrightarrow{grad} E_{pie}.$$

Or la force est uniquement suivant l'axe Δ , donc :

$$\frac{\partial E_{pie}}{\partial x'} = -m\omega_0^2 x'.$$

En prenant l'énergie potentielle nulle en $x' = 0$, on trouve :

$$E_{pie} = -\frac{1}{2}m\omega_0^2 x'^2.$$

Donc l'énergie potentielle totale est :

$$E_p = \frac{1}{2}k(x' - \ell_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 x'^2.$$

Les positions d'équilibre sont données par :

$$\frac{\partial E_p}{\partial x'} = 0$$

d'où :

$$k(x' - \ell_0) - m\omega_0^2 x' = 0.$$

On en déduit :

$$x' = \frac{k\ell_0}{k - m\omega_0^2}.$$

Ceci est valable si $x' > 0$.

Donc :

$$k - m\omega_0^2 > 0.$$

On calcule alors la dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial x'^2} = k - m\omega_0^2 > 0.$$

Donc dans ce cas, l'équilibre est stable car l'énergie potentielle est minimale.

Pour conclure, la position d'équilibre stable existe pour :

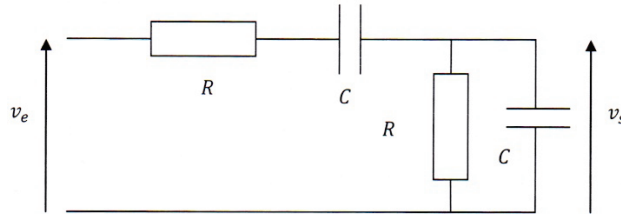
$$k - m\omega_0^2 > 0$$

et elle vaut :

$$x'_{eq} = \frac{k\ell_0}{k - m\omega_0^2}.$$

CCP-108) Filtre de Wien (2015)

1°)



A l'aide d'un diviseur de tension on a :

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)} = \frac{1}{3 + \frac{1}{jRC\omega} + jRC\omega} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{j}{3} \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{j}{3} \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)} = H_0 \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)} \text{ où } H_0 = \frac{1}{3} \text{ et } Q = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2°) De plus : $\Delta x = \frac{1}{Q} = 3 \Rightarrow \Delta f = 3f_0$

3°) On a :

$$\begin{aligned} \underline{H} &= H_0 \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)} = H_0 \frac{\frac{jx}{Q}}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2} = H_0 \frac{3X}{1 + 3X + X^2} \text{ où } X = jx \\ \text{Or } 1 + 3X + X^2 &= 0 \Leftrightarrow X = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \text{D'où } \underline{H} &= H_0 \frac{\frac{jx}{Q}}{\left(jx - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(jx - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right)} = H_0 \frac{\frac{jx}{Q}}{\left(jx + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(jx + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)} \\ &\Leftrightarrow \underline{H} = H_0 \frac{\frac{jx}{Q}}{\left(1 + \frac{2jx}{3 - \sqrt{5}}\right) \left(1 + \frac{2jx}{3 + \sqrt{5}}\right)} = \underline{H_{PB}} \cdot \underline{H_{PH}} \end{aligned}$$

Pour réaliser le passe-bande il faut que la fréquence de coupure du passe-haut soit après celle du passe-bas d'où :

$$\begin{aligned} \underline{H} &= H_0 \frac{\frac{jx}{Q}}{(1 + jx')(1 + jx'')} \\ \text{Où } x' &= \frac{2x}{3 - \sqrt{5}} = \frac{\omega}{\omega'_0} \text{ avec } \omega'_0 = \omega_0 \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } \omega''_0 = \omega_0 \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\underline{H_{PB}} = \frac{1}{1 + \frac{2jx}{3 + \sqrt{5}}} \text{ et } \underline{H_{PH}} = H_0 \frac{\frac{jx}{Q}}{1 + \frac{2jx}{3 - \sqrt{5}}} = \frac{H_0}{Q} \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \frac{\frac{2jx}{3 - \sqrt{5}}}{1 + \frac{2jx}{3 - \sqrt{5}}}$$

Avec les valeurs numériques on peut écrire :

$$\underline{H} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2jx}{3 + \sqrt{5}}} \cdot \frac{\frac{2jx}{3 - \sqrt{5}}}{1 + \frac{2jx}{3 - \sqrt{5}}} = H'_0 \cdot \frac{1}{1 + jx'} \cdot \frac{jx''}{1 + jx''}$$