

CCP : Planche d'oral 1

CCP-1) Ligne haute-tension (2016)

1) L'ARQS consiste à négliger les phénomènes de propagation dans le circuit, c'est-à-dire que l'on néglige le temps de propagation $\frac{OM}{c}$ devant le temps caractéristique T des variations temporelles des sources. Le critère est donc en fonction de la longueur caractéristique L du circuit :

$$\frac{L}{c} \ll T.$$

On a donc :

$$L \ll cT = \frac{c}{f} = \lambda.$$

λ représente la longueur d'onde. Ici la condition est la suivante :

$$L \ll 3.10^8 \times \frac{1}{50} = 6.10^6 \text{ m.}$$

Ici, on justifie le fait que le fil est de longueur finie et que l'on néglige les effets de bords pour le calcul du champ magnétique. On garde les propriétés du fil infini pour la géométrie.

Les équations de Maxwell sont les suivantes :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

Pour un conducteur ohmique, la densité volumique de charges est nulle. Dans le cas de l'ARQS, on peut négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction et on obtient donc les équations simplifiées suivantes :

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

2) En coordonnées cylindrique, le champ magnétique est de la forme $\vec{B}(r, \theta, z)$. Le problème est invariant par translation le long du fil et donc le champ magnétique ne dépend pas de z . Le problème est aussi invariant par rotation autour de l'axe (Oz) donc le champ magnétique ne dépend pas de l'angle θ .

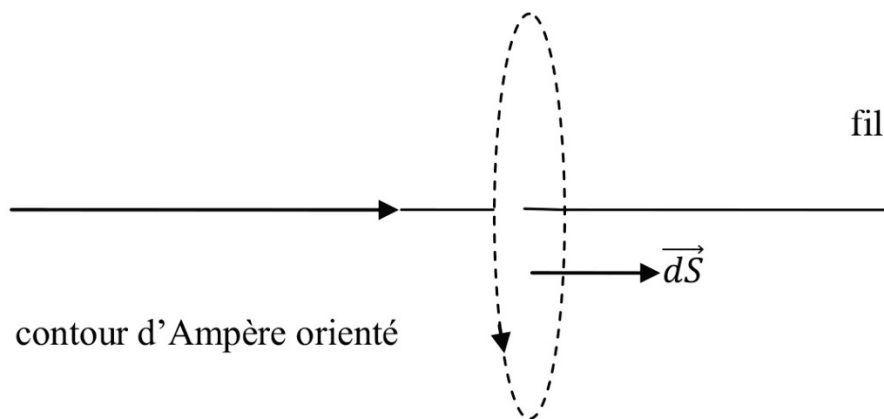
Le plan contenant le fil et le point où l'on calcule le champ magnétique est un plan de symétrie (plan \vec{e}_r, Oz) donc le champ est perpendiculaire à ce plan.

On a donc :

$$\vec{B}(r, \theta, z) = B(r)\vec{e}_\theta.$$

Les lignes de champ sont donc des cercles.

On a ainsi le schéma suivant :



L'orientation du contour d'Ampère et l'orientation de la surface s'appuyant sur le contour sont liées.

Le théorème d'Ampère donne :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl}.$$

Comme le champ magnétique est selon \vec{e}_θ , il est donc colinéaire à $d\vec{l}$. On a donc :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B \cdot dl = B \oint dl = B2\pi r.$$

Comme le courant $i(t)$ est dans le même sens que $d\vec{S}$, le courant enlacé est égal à : $I_{enl} = i(t)$. On trouve donc :

$$B2\pi r = \mu_0 i(t)$$

$$B = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}.$$

Le champ magnétique vaut :

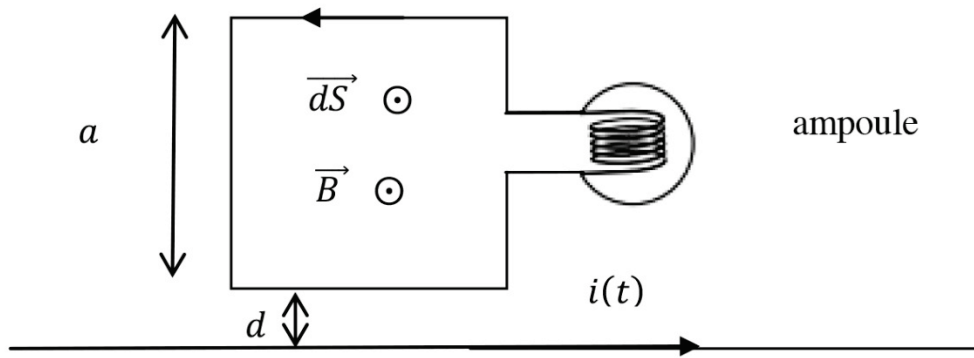
$$\boxed{\vec{B}(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} \vec{e}_\theta.}$$

On retrouve bien le champ créé par un fil infini. Penser à vérifier l'homogénéité.

3) Pour calculer le flux à travers le circuit, on utilise l'expression du flux qui est :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Il faut donc orienter le circuit. Pour cela, il est nécessaire et obligatoire de faire un schéma :



L'orientation du circuit est arbitraire. Celle de la surface est liée à l'orientation du contour par la règle du tire bouchon.

On a donc :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint B \cdot dS.$$

On prend pour élément de surface élémentaire un rectangle de hauteur a et d'épaisseur dr . On a donc pour une spire :

$$\phi = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{dr}{r}$$

$$\phi = \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} [\ln(r)]_d^{d+a}$$

$$\phi = \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right).$$

Pour N spires, on obtient donc le flux magnétique suivant :

$$\boxed{\phi = N \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right).}$$

Penser à multiplier le flux par le nombre de spires.

4) On a donc un circuit placé dans un champ magnétique variable créé par le fil. Le circuit fermé est donc le siège d'un phénomène d'induction électromagnétique et la fem induite est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}.$$

On obtient en dérivant l'intensité par rapport au temps :

$$e = -N \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \frac{di}{dt}.$$

L'expression du courant est donc la suivante :

$$i(t) = I_{eff} \sqrt{2} \cos(2\pi f t).$$

La dérivée est donc égale à :

$$\frac{di}{dt} = -2\pi f I_{eff} \sqrt{2} \sin(2\pi ft).$$

La fem induite est donc égale à :

$$e = N \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) 2\pi f I_{eff} \sqrt{2} \sin(2\pi ft).$$

En simplifiant, on obtient donc :

$$e = N \mu_0 a \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) f I_{eff} \sqrt{2} \sin(2\pi ft).$$

Pour que la lampe puisse s'allumer, il faut comme l'indique l'énoncé que l'amplitude efficace de la fem soit supérieure à la tension efficace soit :

$$N \mu_0 a \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) f I_{eff} > E.$$

Donc le nombre de spires vérifie l'inégalité suivante :

$$N > \frac{E}{\mu_0 a \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) f I_{eff}}.$$

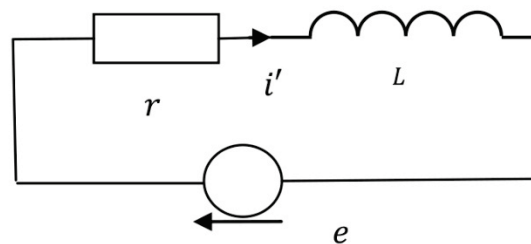
L'application numérique donne :

$$N > \frac{1,5}{4\pi 10^{-7} \times 30 \cdot 10^{-2} \times \ln\left(\frac{2+30}{2}\right) \times 50 \times 1000}$$

$$N > 28,7.$$

Il faut donc au minimum 29 spires afin que la lampe puisse s'allumer.

5) Le circuit est donc maintenant équivalent à un circuit RL . On a donc le schéma suivant :



On a donc l'équation de maille qui est :

$$e = ri' + L \frac{di'}{dt}.$$

En remplaçant, on obtient :

$$L \frac{di'}{dt} + ri' = E\sqrt{2} \sin(2\pi ft).$$

On passe en notations complexes en prenant la partie imaginaire. On a donc en posant $\omega = 2\pi f$:

$$(jL\omega + r)\underline{i}' = E\sqrt{2}e^{j\omega t}.$$

$$\underline{i}' = \frac{E\sqrt{2}e^{j\omega t}}{r + jL\omega}.$$

Le courant efficace est donc égal à :

$$I' = \frac{E}{\sqrt{r^2 + (L\omega)^2}}.$$

Le déphasage vaut :

$$\tan \phi' = -\frac{L\omega}{r}.$$

L'intensité est définie en complexe par $\underline{i}' = I'\sqrt{2}e^{j(\omega t + \phi')}$. La convention est ici en fonction d'un sinus donc pour revenir au courant réel, il faut prendre :

$$i' = \text{Im}(\underline{i}') = I'\sqrt{2} \sin(\omega t + \phi') = I'\sqrt{2}(\sin \omega t \cos \phi' + \cos \omega t \sin \phi').$$

Pour retrouver les expressions de ϕ' il suffit d'identifier les deux expressions soit :

$$\underline{i}' = \frac{E\sqrt{2}e^{j\omega t}}{r + jL\omega} = \frac{E\sqrt{2}e^{j\omega t}}{r^2 + L^2\omega^2}(r - jL\omega)$$

$$\underline{i}' = \frac{E\sqrt{2}}{r^2 + L^2\omega^2}(\cos \omega t + j \sin \omega t)(r - jL\omega).$$

On prend la partie imaginaire :

$$i' = \frac{E\sqrt{2}}{r^2 + L^2\omega^2}(r \sin \omega t - L\omega \cos \omega t).$$

En identifiant, on trouve bien que :

$$\tan \phi' = -\frac{L\omega}{r}.$$

Les applications numériques donnent :

$$I' = \frac{1,5}{\sqrt{10^2 + (10 \cdot 10^{-3} \times 2\pi \times 50)^2}}$$

$$I' = 0,14 \text{ A.}$$

$$\tan \phi' = -\frac{10 \cdot 10^{-3} \times 2\pi \times 50}{10} = -\frac{\pi}{10}$$

$$\phi' = -0,3 \text{ rad.}$$

CCP-2) lame de mica (2015)

1) L'onde 1 se réfléchit sur la lame alors que l'onde 2 traverse la lame. La différence de chemin optique est donc égale à deux fois l'épaisseur multipliée par l'indice du mica soit :

$$\delta_{op} = 2ne.$$

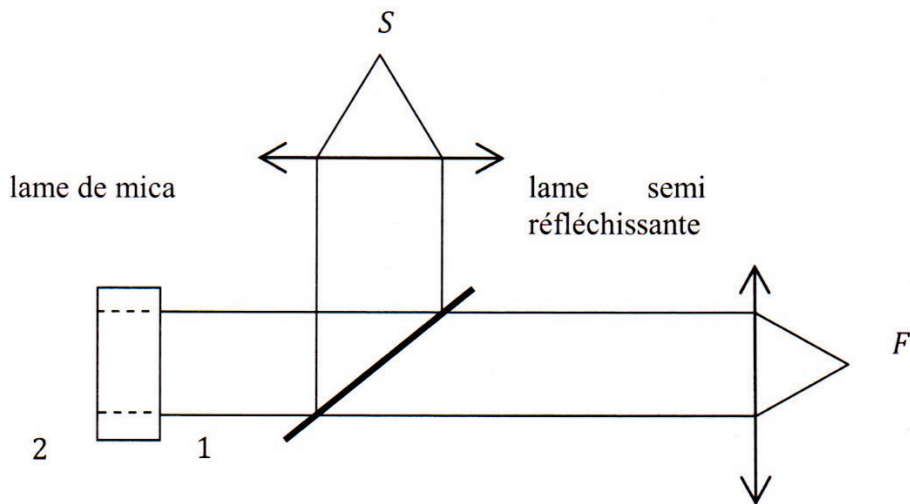
Comme le coefficient de réflexion est négatif et que l'on utilise un modèle scalaire, il faut ajouter une différence de chemin optique supplémentaire de $\frac{\lambda}{2}$.

La différence de marche totale est donc :

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2}.$$

2) On fait un schéma pour l'onde 1 qui se réfléchit sur la lame de mica. On a donc pour l'amplitude :

$$s_1 = s_0 r e^{j\psi}.$$



Pour l'onde 2, elle est transmise dans le mica, puis réfléchi sur l'air et à nouveau transmise du mica vers l'air. L'amplitude est donc la suivante :

$$s_2 = s_0 tr' t' e^{j\psi} e^{j \frac{2\pi\delta_{op}}{\lambda}}.$$

Ne pas oublier le chemin parcouru dans la lame de mica qui introduit un déphasage.

Le chemin optique supplémentaire est ici contenu dans le coefficient de réflexion négatif.

3) Comme les deux ondes sont cohérentes, on somme les amplitudes. On a donc :

$$s = s_1 + s_2$$

$$s = s_0 r e^{j\psi} + s_0 tr' t' e^{j\psi} e^{j \frac{2\pi\delta}{\lambda}}$$

$$s = s_0 e^{j\psi} (r + tr' t' e^{j\psi}).$$

On détermine maintenant l'intensité en sachant qu'elle est proportionnelle au module de l'amplitude élevé au carré. On obtient ainsi :

$$I = ss^*.$$

s est le complexe conjugué de s.*

On a donc :

$$I = s_0 e^{j\psi} \left(r + tr't' e^{j\frac{2\pi\delta}{\lambda}} \right) s_0 e^{-j\psi} \left(r + tr't' e^{-j\frac{2\pi\delta}{\lambda}} \right)$$

$$I = s_0^2 \left(r^2 + (tr't')^2 + rtr't' e^{j\frac{2\pi\delta}{\lambda}} + rtr't' e^{-j\frac{2\pi\delta}{\lambda}} \right)$$

$$I = s_0^2 \left(r^2 + (tr't')^2 + 2rtr't' \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} \right) \right)$$

$$I = I_0 \left(r^2 + (tr't')^2 + 2rtr't' \cos \left(\frac{4\pi n}{\lambda} \right) \right).$$

On aurait pu appliquer directement la formule de Fresnel pour deux ondes d'intensité différentes.

Le contraste est défini par l'expression suivante :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}.$$

L'intensité maximale est égale à :

$$I_{max} = I_0(r^2 + (tr't')^2 - 2rtr't').$$

L'intensité minimale est égale à :

$$I_{min} = I_0(r^2 + (tr't')^2 + 2rtr't').$$

Attention le coefficient r est négatif.

En reportant dans l'expression du contraste, on obtient :

$$C = \frac{I_0(r^2 + (tr't')^2 - 2rtr't') - I_0(r^2 + (tr't')^2 + 2rtr't')}{I_0(r^2 + (tr't')^2 - 2rtr't') + I_0(r^2 + (tr't')^2 + 2rtr't')}$$

$$C = \frac{-4rtr't'}{2(r^2 + (tr't')^2)} = - \frac{2 \frac{tr't'}{r}}{1 + \left(\frac{tr't'}{r} \right)^2}$$

$$C = - \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}.$$

L'application numérique donne :

$$\alpha = -0,78 \times 1,22 = -0,95$$

$$C = \frac{0,95 \times 2}{1 + 0,95^2} = 0,99.$$

On a donc un très bon contraste qui est proche de 1. La figure d'interférence est donc bien contrastée.

4) L'ordre d'interférence est donné par :

$$p = \frac{\delta}{\lambda}.$$

Pour obtenir des franges sombres, il faut que p soit demi-entier, c'est-à-dire que :

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = m + \frac{1}{2}.$$

On a finalement :

$$\boxed{\frac{2ne}{\lambda} = m.}$$

5) On a pour la longueur d'onde minimale :

$$\frac{2ne}{\lambda_{min}} = m + 40.$$

On a aussi pour la longueur d'onde maximale :

$$\frac{2ne}{\lambda_{max}} = m.$$

En faisant la différence entre les deux équations, on trouve :

$$\frac{2ne}{\lambda_{min}} - \frac{2ne}{\lambda_{max}} = 40.$$

$$e = 40 \frac{\lambda_{min}\lambda_{max}}{2n(\lambda_{max} - \lambda_{min})}.$$

Il faut déterminer l'indice du mica en fonction des indices de transmission par exemple :

$$t = \frac{2}{1+n}$$

$$1+n = \frac{2}{t}$$

$$n = \frac{2}{t} - 1.$$

On trouve donc :

$$\boxed{e = 40 \frac{\lambda_{min}\lambda_{max}}{2\left(\frac{2}{t} - 1\right)(\lambda_{max} - \lambda_{min})}.$$

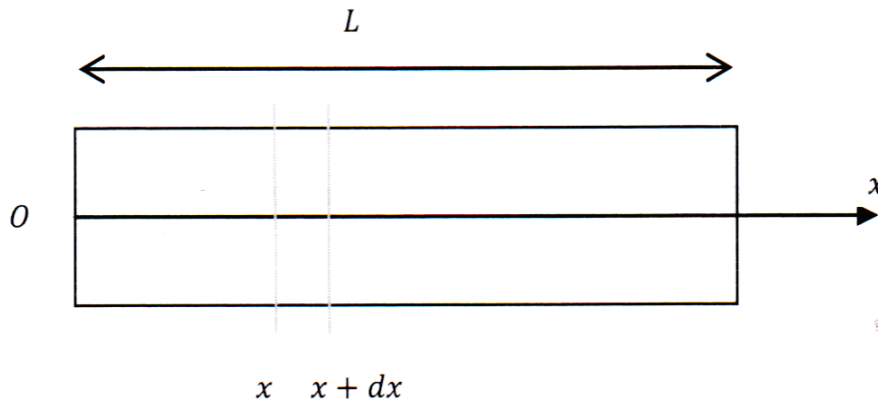
L'application numérique donne :

$$e = 40 \frac{400.10^{-9} \times 630.10^{-9}}{2\left(\frac{2}{0,78} - 1\right)(630.10^{-9} - 400.10^{-9})}$$

$$\boxed{e = 56 \mu\text{m}.}$$

CCP-3) Conduites cylindriques (2015)

1) On commence par faire le schéma de la tige de longueur L et de section σ . On appelle Ox l'axe de la tige. On a donc ici un problème de conduction unidirectionnelle le long de l'axe Ox avec des pertes latérales.



On va donc effectuer un bilan thermique sur la tranche de tige comprise entre x et $x + dx$. Ce système reçoit un flux thermique $j_{th}(x)\sigma$ du côté gauche et reçoit un flux thermique $-j_{th}(x + dx)\sigma$ du côté droit.

On met un signe moins car ce flux est effectivement perdu par le système.

On a directement utilisé les scalaires car le vecteur densité de courant thermique est colinéaire au vecteur surface.

Le système perd aussi une puissance par la surface latérale qui est donnée dans l'énoncé par :

$$dP = h(T - T_e)dx .$$

D'où la puissance reçue par le système :

$$dP_{reçue} = -h(T - T_e)dx.$$

En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système compris entre x et $x + dx$, on obtient :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = j_{th}(x)\sigma - j_{th}(x + dx)\sigma - h(T - T_e)dx$$

où ρ représente la masse volumique de la tige et c sa capacité thermique.

On n'était pas obligé de les introduire car on se place en régime permanent.

Donc :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

On obtient dans le cas du régime permanent l'équation suivante :

$$j_{th}(x)\sigma - j_{th}(x + dx)\sigma - h(T - T_e)dx = 0$$

or

$$j_{th}(x + dx) = j_{th}(x) + \frac{\partial j_{th}}{\partial x} dx$$

donc :

$$-\frac{\partial j_{th}}{\partial x} dx \sigma - h(T - T_e)dx = 0.$$

En simplifiant par dx , on trouve alors :

$$-\frac{\partial j_{th}}{\partial x} \sigma - h(T - T_e) = 0.$$

Reste à utiliser la loi de Fourier pour exprimer le vecteur densité de flux thermique :

$$\vec{j}_{th}(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{x}.$$

En utilisant la projection sur l'axe Ox pour la diffusion unidirectionnelle, on obtient :

$$j_{th}(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}.$$

L'équation de diffusion devient alors :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{h}{\sigma} (T - T_e) = 0.$$

On l'écrira plutôt sous la forme suivante afin de reconnaître une équation différentielle du second ordre à coefficients constants et avec second membre :

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{h}{\sigma \lambda} T = -\frac{h}{\sigma \lambda} T_e.}$$

Penser à vérifier l'homogénéité de la formule.

Le premier terme a pour unité : $K.m^{-2}$.

Le coefficient h est égal à une puissance divisée par une température et divisée par une longueur ; donc h a pour unité : $W.K^{-1}m^{-1}$. σ est une surface et a comme unité : m^2 . La conductivité thermique λ a pour unité : $W.m^{-1}K^{-1}$.

Alors le deuxième terme s'exprime en : $K.m^{-2}$ comme le premier. Ceci confirme alors l'homogénéité de l'équation trouvée. Il faut penser à vérifier systématiquement l'homogénéité.

Ceci vous évitera beaucoup d'erreurs.

2) On va donc résoudre l'équation différentielle trouvée en 1).

La solution particulière de cette équation vaut $T = T_e$.

La solution générale de l'équation sans second membre :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{h}{\sigma} T = 0$$

est obtenue en écrivant l'équation caractéristique :

$$\lambda r^2 - \frac{h}{\sigma} = 0.$$

Cette équation caractéristique admet comme solutions :

$$r = \pm \sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}$$

D'où la solution générale de l'équation sans second membre :

$$T(x) = \alpha e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x} + \beta e^{\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x}.$$

Il faut maintenant ajouter la solution particulière pour obtenir la solution de l'équation 1) :

$$T(x) = \alpha e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x} + \beta e^{\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x} + T_e.$$

Reste maintenant à déterminer les constantes d'intégration α et β .

Pour y parvenir, on va utiliser les conditions aux limites lorsque $x = 0$ et lorsque x tend vers l'infini.

On commence par x tendant vers l'infini. La température reste finie donc on en déduit $\beta = 0$.

La température est continue en $x = 0$ donc $T_1 = T(0) = \alpha + T_e$.

On trouve alors :

$$\alpha = T_1 - T_e.$$

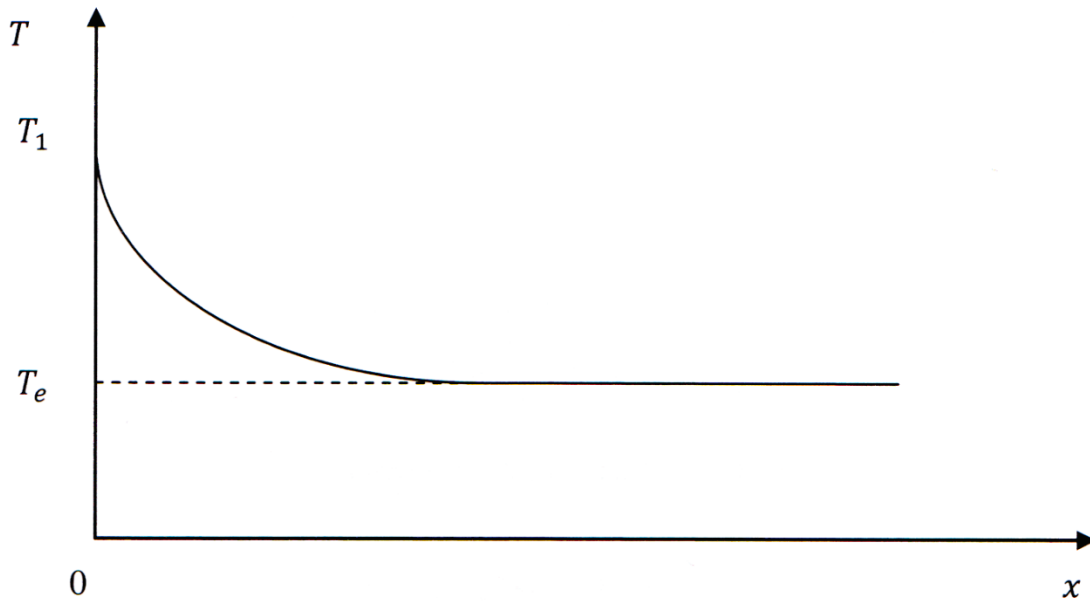
Finalement on en déduit l'expression de la température :

$$T(x) = (T_1 - T_e)e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x} + T_e.$$

On peut représenter, même si l'énoncé ne la demande pas, l'allure de la température en fonction de x afin d'avoir une idée de sa variation.

$T(x)$ est une fonction décroissante qui vaut T_1 en $x = 0$ et qui vaut T_e quand x tend vers l'infini.

D'où l'allure de la fonction température en fonction de la longueur x :



Pour la longueur de la tige, on pourra la supposer très grande si :

$$\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}} L \gg 1$$

donc pour :

$$L \gg \sqrt{\frac{\sigma\lambda}{h}}$$

Pour se rendre compte de la valeur de L , on peut faire une application numérique pour une section de 1 cm^2 , et un coefficient h égal à environ $30 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

On trouve alors :

$$L \gg \sqrt{\frac{10^{-4} \cdot 390}{30}} = 3,6 \text{ cm.}$$

3) On appelle T_{60} la température de fusion de la paraffine.

Pour le cuivre, on utilise le résultat de la question 2). On remplace x par x_1 et λ par λ_{Cu} et on obtient la relation suivante :

$$T_{60} = (T_1 - T_e) e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Cu}}} x_1} + T_e.$$

On procède de même pour la tige en étain et on obtient :

$$T_{60} = (T_1 - T_e) e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Sn}}} x_2} + T_e.$$

Reste alors à égaler les deux expressions :

$$(T_1 - T_e) e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Cu}}} x_1} + T_e = (T_1 - T_e) e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Sn}}} x_2} + T_e.$$

On peut maintenant simplifier les T_e , donc on obtient :

$$(T_1 - T_e)e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Cu}}}x_1} = (T_1 - T_e)e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Sn}}}x_2}$$

$(T_1 - T_e)$ est en facteur et donc se simplifie.

On arrive donc à l'égalité suivante :

$$e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Cu}}}x_1} = e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Sn}}}x_2}$$

Reste maintenant à appliquer le logarithme à chacun des membres et on obtient :

$$-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Cu}}}x_1 = -\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda_{Sn}}}x_2.$$

On veut maintenant exprimer λ_{Sn} .

En élevant au carré l'expression précédente, on obtient :

$$\frac{h}{\sigma\lambda_{Cu}}x_1^2 = \frac{h}{\sigma\lambda_{Sn}}x_2^2.$$

On peut donc, en simplifiant par $\frac{h}{\sigma}$, trouver λ_{Sn} :

$$\boxed{\lambda_{Sn} = \lambda_{Cu} \frac{x_2^2}{x_1^2}}$$

On constate immédiatement que l'expression est bien homogène.

On peut alors faire l'application numérique afin de trouver λ_{Sn} .

$$\lambda_{Sn} = 390 \frac{(12,4)^2}{(30)^2}.$$

On peut laisser les longueurs en cm puisqu'elles interviennent sous forme d'une fraction.

On trouve alors :

$$\boxed{\lambda_{Sn} = 66,63 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} .}$$

Penser à préciser l'unité de la grandeur calculée.

Ce système peut illustrer le principe de fonctionnement du banc Kofler que l'on utilise en chimie pour déterminer le point de fusion d'un corps.

4) La puissance dissipée Φ est égale à la puissance fournie par le thermostat. Elle est donc égale au flux du vecteur densité de courant thermique en $x = 0$. On obtient donc :

$$\Phi = j_{th}(0)\sigma$$

avec :

$$j_{th}(0) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(0).$$

Or :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x) = -\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}(T_1 - T_e)e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x}.$$

Donc en $x = 0$, on obtient :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0) = -\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}(T_1 - T_e).$$

On peut donc en déduire la puissance dissipée au niveau du thermostat :

$$\Phi = \lambda \sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}(T_1 - T_e)\sigma.$$

En simplifiant au maximum on obtient alors :

$$\boxed{\Phi = (T_1 - T_e)\sqrt{h\sigma\lambda}.}$$

On procède maintenant au calcul direct de la puissance dissipée.

Par définition, elle est égale à :

$$\Phi = \int_0^\infty h(T - T_e)dx.$$

On remplace $T - T_e$ par son expression.

On obtient alors :

$$\Phi = \int_0^\infty h(T_1 - T_e)e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x} dx.$$

Reste ainsi à calculer la primitive de $e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x}$:

$$\Phi = -h(T_1 - T_e) \sqrt{\frac{\sigma\lambda}{h}} \left[e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x} \right]_0^\infty.$$

$e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x}$ vaut 1 pour $x = 0$.

$e^{-\sqrt{\frac{h}{\sigma\lambda}}x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini.

Et finalement :

$$\boxed{\Phi = (T_1 - T_e)\sqrt{h\sigma\lambda}.}$$

On a donc bien obtenu deux expressions identiques pour la puissance dissipée.

CCP-4) Tunnel terrestre (2015)

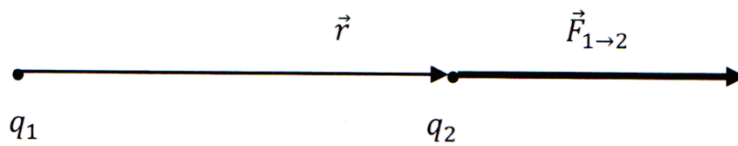
1) On va dans un premier temps retrouver l'analogie avec le champ électrostatique.

Pour cela, il faut reprendre la force d'interaction entre deux particules chargées q_1 et q_2 .

La force exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 s'écrit :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$$

où \vec{r} représente le vecteur allant de la charge q_1 à la charge q_2 .



La force d'attraction gravitationnelle exercée par la masse m_1 sur la masse m_2 est donnée par :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

avec G la constante de gravitation universelle.

Les deux forces ont donc la même structure. On peut donc en déduire les analogies suivantes :

Électrostatique	Gravitation
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-G$
charge q_1	masse m_1
\vec{E}	\vec{g}
Théorème de Gauss $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$	Équivalent du théorème de Gauss $\oiint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \sum m_{int}$

Maintenant que l'analogie est bien définie, on peut déterminer le champ de gravitation à l'intérieur de la sphère homogène.

On a donc un problème à symétrie sphérique et on utilise les coordonnées sphériques.

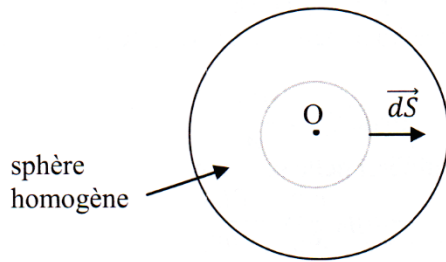
Le champ de gravitation est donné par :

$$\vec{g} = \vec{g}(r, \theta, \varphi).$$

L'axe \overline{OM} est un axe de symétrie. Le problème est invariant par rotation autour de Oz , donc \vec{g} ne dépend pas de φ . Il est aussi invariant par rotation autour de Ox , donc \vec{g} ne dépend pas de θ .

On a donc :

$$\vec{g} = g(r)\vec{e}_r.$$



On applique le théorème de Gauss à la sphère de rayon r (en gris sur le schéma) et on obtient :

$$\oiint \vec{g} \cdot \vec{dS} = -4\pi G \sum m_{int}.$$

Le flux de \vec{g} est égal à :

$$\oiint \vec{g}(r) \cdot \vec{dS} = g(r) 4\pi r^2.$$

La masse intérieure à la sphère de rayon r est :

$$\sum m_{int} = \iiint \rho d\tau.$$

Pour une sphère homogène, on peut sortir ρ de l'intégrale :

$$\sum m_{int} = \rho \frac{4\pi}{3} r^3.$$

Le flux de \vec{g} est égal à :

$$\oiint \vec{g}(r) \cdot \vec{dS} = g(r) 4\pi r^2.$$

Donc en remplaçant dans l'équation initiale, on trouve :

$$g(r) 4\pi r^2 = -4\pi G \rho \frac{4\pi}{3} r^3$$

donc :

$$g(r) = -\frac{4\pi}{3} G \rho r.$$

On obtient alors l'expression de la force :

$$\vec{f} = m\vec{g}(r).$$

On pose :

$$g_0 = \|\vec{g}(R)\| = \frac{4\pi}{3} G \rho R.$$

Et finalement :

$$\boxed{\vec{f} = -mg_0 \frac{r}{R} \vec{e}_r.}$$

Le résultat est bien homogène.

2) Pour l'énergie potentielle, on utilise la définition :

$$\vec{f} = -\overline{\text{grad}} E_P.$$

Pour une fonction qui ne dépend que de r , on exprime le gradient en coordonnées sphériques :

$$\overline{\text{grad}} E_P = \frac{\partial E_P}{\partial r} \vec{e}_r.$$

On aboutit alors à l'équation différentielle suivante :

$$-mg_0 \frac{r}{R} = -\frac{\partial E_P}{\partial r}.$$

On peut maintenant intégrer par rapport à r :

$$E_P = \frac{1}{2} m g_0 \frac{r^2}{R} + \text{constante.}$$

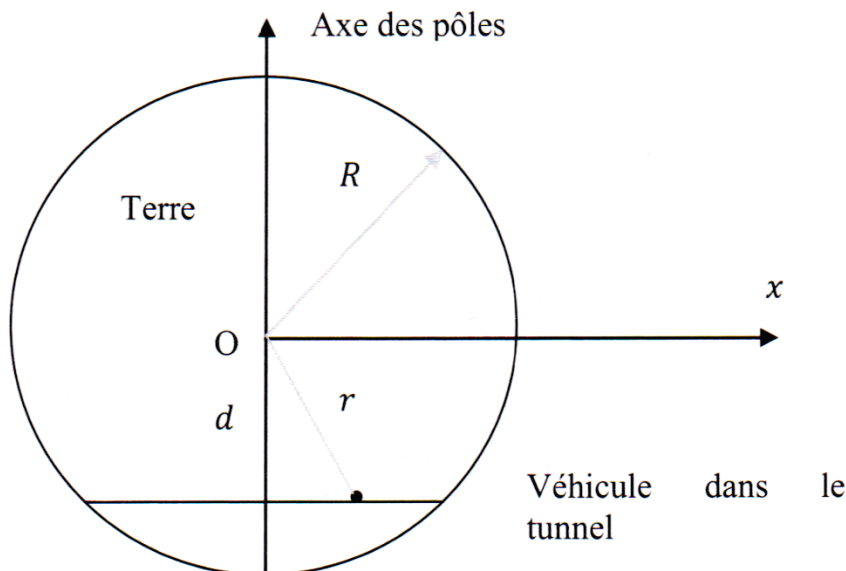
L'énoncé impose l'énergie potentielle nulle en $r = 0$ donc la constante est nulle.

Et donc finalement :

$$E_P = \frac{1}{2} m g_0 \frac{r^2}{R}.$$

3) On utilise les questions précédentes en identifiant la terre à la sphère homogène.

Le système étudié est le véhicule placé dans le champ de pesanteur terrestre. Le référentiel est supposé galiléen puisque l'on néglige pour l'instant le mouvement de rotation de la terre.



Le véhicule se déplace sans frottement, donc le système est conservatif.

On va donc faire une étude énergétique. C'est logique puisque dans la question 2) on nous fait calculer l'énergie potentielle.

On exprime alors l'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_P = \text{constante.}$$

L'énergie cinétique est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2.$$

Le système a sa vitesse maximale lorsque son énergie potentielle est minimale.

L'énergie potentielle est minimale lorsque la distance au centre de la terre est minimale donc égale à d .

Le véhicule part avec une vitesse nulle au niveau de la surface de la terre, c'est-à-dire pour $r = R$.

Donc on finit par obtenir :

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 + \frac{1}{2}mg_0 \frac{d^2}{R} = 0 + \frac{1}{2}mg_0 \frac{R^2}{R}.$$

On obtient alors :

$$v_{max} = \sqrt{g_0 R \left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right)}.$$

On détermine maintenant l'équation du mouvement à partir de l'intégrale première pour une position quelconque du véhicule :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mg_0 \frac{r^2}{R}$$

avec :

$$r = \sqrt{x^2 + d^2}$$

et

$$v = \dot{x}.$$

En remplaçant :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mg_0 \frac{x^2 + d^2}{R}.$$

En dérivant, on obtient l'équation du mouvement :

$$m\dot{x}\ddot{x} + mg_0 \frac{x\dot{x}}{R} = 0$$

et en simplifiant par $m\dot{x}$:

$$\ddot{x} + g_0 \frac{x}{R} = 0.$$

On trouve alors l'équation d'un oscillateur harmonique dont la solution est de la forme :

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{g_0}{R}}t + \alpha\right).$$

On détermine les constantes d'intégration grâce aux conditions initiales qui sont :

$$\begin{aligned} x(t=0) &= \sqrt{R^2 - d^2} \\ \dot{x}(t=0) &= 0. \end{aligned}$$

En remplaçant dans la première condition, on trouve :

$$\sqrt{R^2 - d^2} = A \cos(\alpha)$$

or :

$$\dot{x}(t) = -A \sqrt{\frac{g_0}{R}} \sin\left(\sqrt{\frac{g_0}{R}} t + \alpha\right).$$

En remplaçant dans la deuxième condition pour $t = 0$:

$$0 = -A \sqrt{\frac{g_0}{R}} \sin(\alpha).$$

On en déduit :

$$\alpha = 0$$

et

$$A = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

D'où la position en fonction du temps :

$$x(t) = \sqrt{R^2 - d^2} \cos\left(\sqrt{\frac{g_0}{R}} t\right)$$

et la vitesse en fonction du temps :

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{\frac{g_0(R^2 - d^2)}{R}} \sin\left(\sqrt{\frac{g_0}{R}} t\right)$$

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{g_0 R \left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right)} \sin\left(\sqrt{\frac{g_0}{R}} t\right)$$

On retrouve alors l'expression de la vitesse maximale :

$$v_{max} = \sqrt{g_0 R \left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right)}.$$

4) On trace la courbe de l'énergie potentielle en fonction de x :

$$E_P = \frac{1}{2} m g_0 \frac{x^2 + d^2}{R}.$$

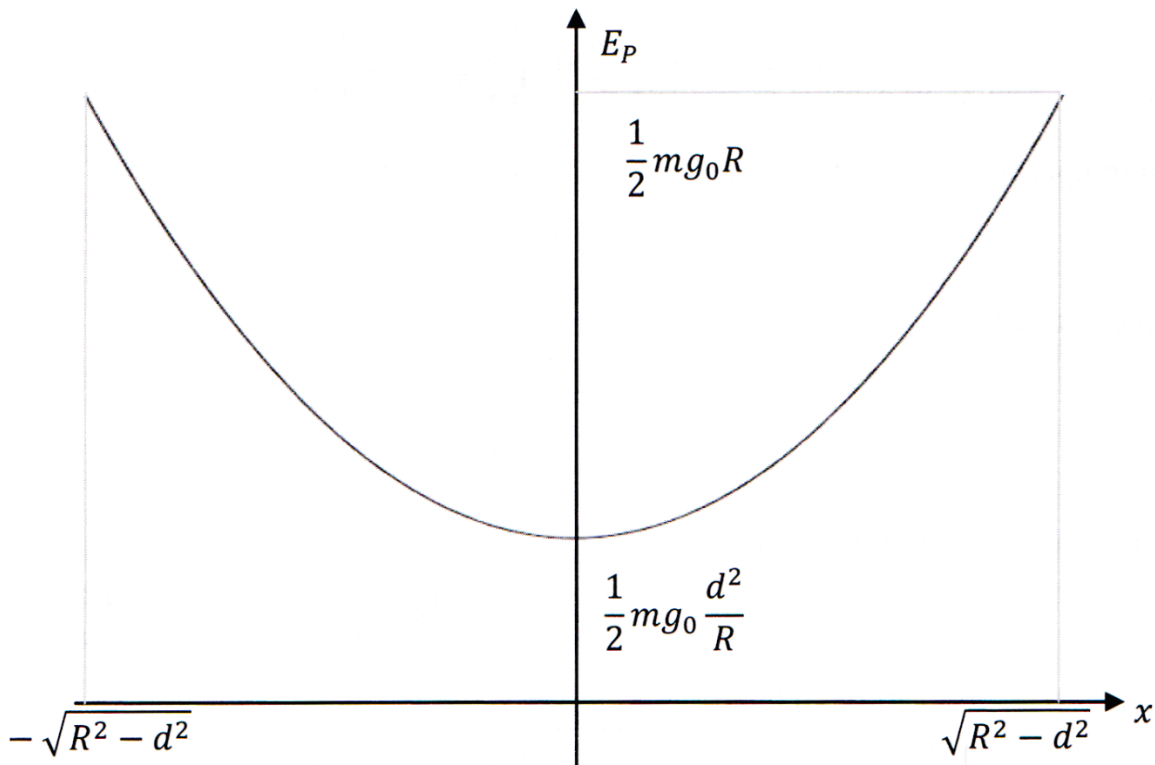
Cette courbe est une parabole.

On a donc un minimum d'énergie potentielle pour $x = 0$.

Cette position correspond donc à un équilibre stable.

Le mouvement du véhicule est donc un mouvement oscillatoire autour de cette position $x = 0$.

D'où la courbe :



5) On tient compte maintenant du mouvement de rotation de la terre. On doit tenir compte des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis car le référentiel d'étude qui est la terre n'est plus galiléen. Maintenant l'axe Ox est en rotation à la vitesse angulaire Ω autour de l'axe des pôles.

Pour la force d'inertie d'entraînement, on a :

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$$

où \vec{a}_e est l'accélération d'entraînement. Cette accélération est égale à l'accélération du point coïncident qui est supposé fixe par rapport à la terre. Ce point coïncident a un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des pôles.

On a donc :

$$\vec{a}_e = -x\Omega^2\vec{x}.$$

D'où la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie} = mx\Omega^2\vec{x}.$$

Cette force est conservative et dérive d'une énergie potentielle :

$$\vec{F}_{ie} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_{Pie}.$$

On a l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dE_{Pie}}{dx} = -mx\Omega^2.$$

En intégrant et en prenant l'énergie potentielle nulle pour $r = 0$, on a :

$$E_{Pie} = -\frac{1}{2}mx^2\Omega^2.$$

La force d'inertie de Coriolis est donnée en fonction de la vitesse relative par :

$$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r.$$

Or cette force est perpendiculaire au déplacement donc ne travaille pas. Elle n'intervient donc pas dans le bilan énergétique. Le bilan énergétique devient donc :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mg_0 \frac{x^2 + d^2}{R} - \frac{1}{2}mx^2\Omega^2.$$

En dérivant par rapport au temps sachant que E_m est constante:

$$m\dot{x}\ddot{x} + mg_0 \frac{x\dot{x}}{R} - mx\dot{x}\Omega^2 = 0$$

En simplifiant par $m\dot{x}$, on obtient :

$$\ddot{x} + \left(\frac{g_0}{R} - \Omega^2\right)x = 0.$$

Or :

$$\frac{g_0}{R} - \Omega^2 > 0.$$

Il suffit de faire l'application numérique pour le voir :

$$\frac{10}{6400 \cdot 10^3} - \left(\frac{2\pi}{24 \times 3600}\right)^2 = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}.$$

On retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique. La solution est donc :

$$x(t) = \sqrt{R^2 - d^2} \cos\left(\sqrt{\left(\frac{g_0}{R} - \Omega^2\right)}t\right).$$

Les conditions initiales étant inchangées, il n'y a que la pulsation qui est modifiée.

CCP-5) Citerne de pompier (2015)

1) L'équivalent volumique des forces de pression est donné par : $\vec{f}_p = -\overrightarrow{\text{grad}P}$.

On prend comme système une particule fluide de volume $d\tau$. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les forces qui s'exercent sur cet élément de volume sont le poids et la force de pression.

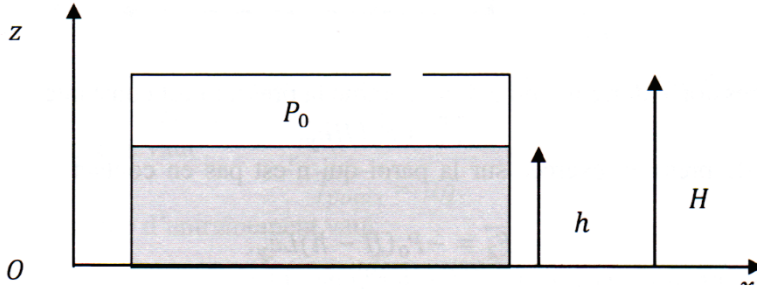
Le poids volumique vaut :

$$\overrightarrow{f_{poids}} = \mu \vec{g}.$$

Le bilan s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \vec{f}_p + \overrightarrow{f_{poids}} &= 0 \\ -\overrightarrow{\text{grad}P} + \mu \vec{g} &= 0. \end{aligned}$$

On définit maintenant un axe Oz vertical dirigé vers le haut. On fait un schéma pour mettre l'origine :



On a donc :

$$\vec{g} = -g\vec{e}_z.$$

L'équation de la statique donne :

$$\overrightarrow{\text{grad}P} = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_z = -\mu g \vec{e}_z.$$

En projetant, on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= -\mu g. \end{aligned}$$

On trouve donc que la pression ne dépend pas de x ni de y grâce aux deux premières équations.

En résolvant la troisième équation, on trouve :

$$P(z) = -\mu g z + cte.$$

La constante d'intégration est définie en fonction de la pression de surface qui impose :

$$P(z = h) = P_0.$$

On obtient donc :

$$P_0 = -\mu g h + cte.$$

En remplaçant dans l'expression de la pression, on obtient donc :

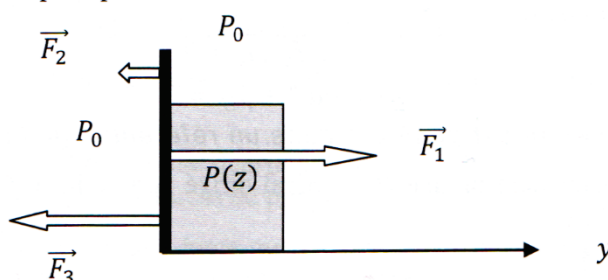
$$P(z) = \mu g(h - z) + P_0.$$

On a bien une pression qui est maximale au fond du réservoir.

2) L'expression de la force de pression sur une surface s'écrit :

$$\vec{F} = \iint P d\vec{S}.$$

On refait un schéma pour placer les différentes forces :



Pour la pression extérieure, on a donc comme la pression est constante :

$$\vec{F}_1 = P_0 L H \vec{e}_y.$$

La force de pression exercée sur la paroi qui n'est pas en contact avec le fluide vaut :

$$\vec{F}_2 = -P_0(H - h)L\vec{e}_y.$$

La force de pression exercée par l'eau sur la paroi vaut :

$$\vec{F}_3 = - \iint P(z) dS \vec{e}_y = - \int_0^h (\mu g(h - z) + P_0) dz L \vec{e}_y$$

$$\vec{F}_3 = \left(-P_0 L h - \mu g L \left[h z - \frac{z^2}{2} \right]_0^h \right) \vec{e}_y$$

$$\vec{F}_3 = \left(-P_0 L h - \mu g \left(h^2 - \frac{h^2}{2} \right) L \right) \vec{e}_y$$

$$\vec{F}_3 = \left(-P_0 L h - \mu g \frac{h^2}{2} L \right) \vec{e}_y.$$

La résultante des forces de pression est donc égale à :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\boxed{\vec{F} = -\mu g \frac{h^2}{2} L \vec{e}_y.}$$

On a bien une expression qui est homogène car on a la masse volumique multipliée par g qui est une force volumique et $h^2 L$ représente le volume.

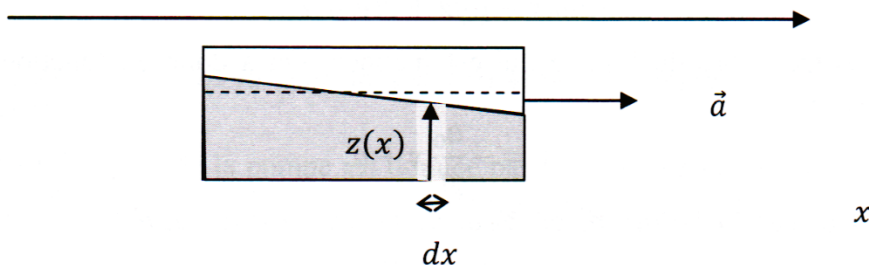
La force est bien dirigée de l'eau vers l'extérieur. Le signe est donc correct.

L'application numérique donne :

$$F = \mu g \frac{h^2}{2} L = 1000 \times 10 \times \frac{(0,65)^2}{2} \times 0,95$$

$$\boxed{F = 2006 \text{ N.}}$$

3) On se place maintenant dans le référentiel lié au camion qui est non galiléen. Il est en accélération uniforme par rapport au référentiel terrestre considéré comme galiléen.



Les forces qui s'exercent sur cet élément de volume sont le poids, la force de pression et la force d'inertie d'entraînement.

Le poids volumique vaut :

$$\vec{f}_{poids} = \mu \vec{g}.$$

La force volumique d'entraînement vaut :

$$\vec{f}_{ie} = -\mu \vec{a} = -\mu a_0 \vec{e}_x.$$

Le bilan s'écrit donc :

$$\vec{f}_P + \vec{f}_{poids} + \vec{f}_{le} = 0$$

$$-\overrightarrow{grad}P + \mu\vec{g} - \mu a_0 \vec{e}_x = 0.$$

L'équation de la statique donne :

$$\overrightarrow{grad}P = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_z = -\mu g \vec{e}_z - \mu a_0 \vec{e}_x.$$

En projetant, on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\mu a_0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\mu g.$$

On trouve donc que la pression ne dépend pas de y grâce à la deuxième équation.

En résolvant la troisième équation, on trouve :

$$P(z) = -\mu g z + f(x).$$

$f(x)$ est une fonction de x qu'il faut déterminer en remplaçant dans la première équation soit :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = f'(x) = -\mu a_0.$$

En intégrant cette équation, on obtient :

$$f(x) = -\mu a_0 x + cte.$$

L'expression de la pression dans l'eau vaut :

$$P(x, z) = -\mu a_0 x - \mu g z + cte.$$

La constante d'intégration est définie en fonction de la pression de surface qui impose $P(x, z) = P_0$.

On obtient donc :

$$-\mu a_0 x - \mu g z + cte = P_0.$$

On a la surface libre du liquide qui est inclinée. On a donc en fonction d'une constante α :

$$z = -\frac{a_0}{g} x + \alpha.$$

Pour trouver la solution, on peut aussi remarquer que :

$$\mu\vec{g} = -\overrightarrow{grad}(\mu g z)$$

$$-\mu a_0 \vec{e}_x = -\overrightarrow{grad}(\mu a_0 x)$$

On a donc l'équation $-\overrightarrow{grad}P + \mu\vec{g} - \mu a_0 \vec{e}_x = 0$ qui devient :

$$-\overrightarrow{grad}P - \overrightarrow{grad}(\mu g z) - \overrightarrow{grad}(\mu a_0 x) = 0$$

$$\overrightarrow{grad}(P + \mu g z + \mu a_0 x) = 0.$$

Cette équation a donc comme solution :

$$P + \mu g z + \mu a_0 x = cte.$$

On retrouve bien la même solution. À vous de choisir la méthode que vous préférez.

Pour trouver la constante d'intégration, il faut en plus écrire la conservation du volume d'eau en supposant qu'il soit conservé.

On a donc en prenant comme élément de surface le rectangle de largeur dx et de hauteur $z(x)$:

$$\begin{aligned} Lhd &= d \int_0^L z(x) dx \\ Lhd &= d \int_0^L \left(-\frac{a_0}{g} x + \alpha \right) dx \\ Lhd &= d \left[-\frac{a_0 x^2}{2g} + \alpha x \right]_0^L \\ Lh &= -\frac{a_0 L^2}{2g} + \alpha L \\ \alpha &= h + \frac{a_0 L}{2g}. \end{aligned}$$

L'équation de la surface libre est donc :

$$z(x) = -\frac{a_0}{g} x + h + \frac{a_0 L}{2g}$$

$$\boxed{z(x) = \frac{a_0}{g} \left(\frac{L}{2} - x \right) + h.}$$

Lorsque le camion accélère, l'eau a tendance à se déplacer vers l'arrière tout comme le passager du camion qui est plaqué contre le siège.

4) Le fluide est aspiré par la pompe qui va permettre de l'élever et de lui donner une vitesse. La vitesse d'entrée dans la pompe est nulle.

$$v_0 = 0.$$

La pression avant la pompe est forcément supérieure à la pression extérieure.

La vitesse de sortie de la pompe est donnée par le bilan énergétique qui est que la puissance de la pompe est transformée en énergie cinétique soit :

$$\frac{P}{D_v} = \mu \frac{v_1^2}{2}$$

$$v_1^2 = \frac{2P}{\mu D_v}$$

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{2P}{\mu D_v}}.}$$

L'application numérique donne :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \times 1,3 \cdot 10^3}{10^3 \times 3 \cdot 10^{-3}}}$$

$$v_1 = 29,4 \text{ m.s}^{-1}.$$

La vitesse de sortie de la lance est donnée par l'expression du débit de volume soit :

$$D_v = \pi \frac{d_2^2}{4} v_2.$$

$$v_2 = \frac{4D_v}{\pi d_2^2}.$$

L'application numérique donne :

$$v_2 = \frac{4 \times 3 \cdot 10^{-3}}{\pi (1,9 \cdot 10^{-2})^2}$$

$$v_2 = 10,6 \text{ m.s}^{-1}.$$

On peut constater qu'il y a des pertes dans la canalisation car la conservation du débit volumique donnerait une vitesse v_1 de 4 m.s^{-1}

On applique maintenant la relation de Bernoulli sur une ligne de courant qui va de la sortie de la lance jusqu'en haut du jet d'eau. On obtient en supposant que la vitesse est nulle en haut du jet :

$$\frac{P_0}{\mu} + gZ + 0 = \frac{P_0}{\mu} + \frac{v_2^2}{2}.$$

On obtient ainsi la hauteur maximale atteinte :

$$Z = \frac{v_2^2}{2g}.$$

L'application numérique donne :

$$Z = \frac{(10,6)^2}{2 \times 9,8} = 5,7 \text{ m.}$$

CCP-6) Potentiel de Yukawa (2015)

1) On donne l'expression du potentiel qui ne dépend que de r . Le problème est donc à symétrie sphérique. Le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire et on a donc la relation suivante :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V.$$

En coordonnées sphériques pour un potentiel qui ne dépend que de r , on a :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r \\ \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{qe^{-\frac{r}{a}}}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \vec{e}_r\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{qe^{-\frac{r}{a}}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{ra} \right) \vec{e}_r.}$$

On vérifie que le champ est bien homogène. Un champ électrique est homogène à charge divisée par ϵ_0 et divisée par une distance au carré. Ici le terme $e^{-\frac{r}{a}}$ est bien sans dimension.

2) On détermine maintenant le flux ϕ du champ à travers une sphère de rayon r . On a :

$$\phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS}.$$

Or \vec{E} et \vec{dS} sont colinéaires donc :

$$\phi = \oiint E dS.$$

Mais E ne dépend que de r , donc :

$$\phi = E \oiint dS.$$

On trouve finalement :

$$\phi = E(r)4\pi r^2.$$

En remplaçant avec l'expression du champ :

$$\phi = \frac{qe^{-\frac{r}{a}}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{ra} \right) 4\pi r^2$$

et en simplifiant :

$$\phi(r) = \frac{qe^{-\frac{r}{a}}}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a} \right).$$

En utilisant le théorème de Gauss, on a :

$$\phi(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}.$$

Lorsque r tend vers 0, alors :

$$\phi(r) \rightarrow \frac{q}{\epsilon_0} \text{ quand } r \text{ tend vers } 0.$$

On en déduit qu'il existe une charge ponctuelle q placée au centre 0.

Lorsque r tend vers $+\infty$, alors :

$$\phi(r) \rightarrow 0 \text{ quand } r \text{ tend vers } +\infty.$$

On en déduit que la charge totale est nulle.

Il existe donc une charge volumique négative répartie dans l'espace.

3) On détermine le flux à travers la sphère de rayon $r + dr$:

$$\phi(r + dr) = \frac{Q_{int}(r + dr)}{\epsilon_0}.$$

De même pour la sphère de rayon r , on a :

$$\phi(r) = \frac{Q_{int}(r)}{\epsilon_0}.$$

Donc en faisant la différence, on obtient le flux à travers la couronne sphérique :

$$\phi(r + dr) - \phi(r) = \frac{\rho 4\pi r^2 dr}{\epsilon_0}.$$

Et la différence des charges intérieures est égale à la charge contenue dans la couronne sphérique considérée, c'est-à-dire à $\rho 4\pi r^2 dr$.

On obtient l'équation suivante :

$$\frac{d\phi}{dr} dr = \frac{\rho 4\pi r^2 dr}{\epsilon_0}.$$

On en déduit la densité volumique de charges après simplifications :

$$\rho = \frac{\epsilon_0}{4\pi r^2} \frac{d\phi}{dr}.$$

En utilisant l'expression du flux de la question 2), on obtient :

$$\rho = \frac{\epsilon_0}{4\pi r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{qe^{-\frac{r}{a}}}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a} \right) \right)$$

$$\rho = \frac{qe^{-\frac{r}{a}}}{4\pi r^2} \left(-\frac{1}{a} \left(1 + \frac{r}{a} \right) + \frac{1}{a} \right)$$

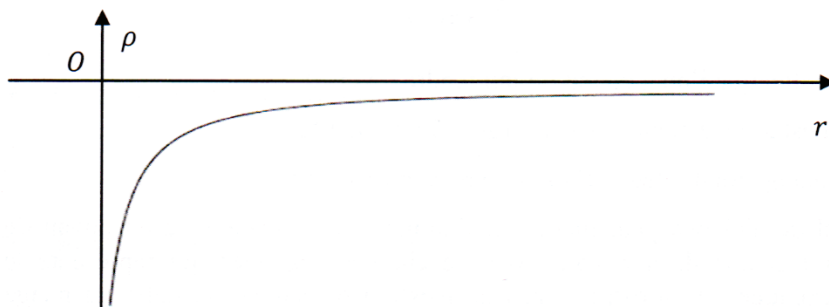
$$\rho = -\frac{qe^{-\frac{r}{a}}}{4\pi r a^2}.$$

On trouve donc une densité volumique de charges négatives.

On aurait pu aussi utiliser la loi locale suivante :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Cette charge diverge quand r tend vers 0. Cette charge volumique tend vers 0 quand r tend vers l'infini. D'où l'allure de la charge volumique ρ en fonction de r :



4) On détermine la charge de la couronne sphérique considérée : $dQ = \rho 4\pi r^2 dr$.

On en déduit la charge surfacique σ :

$$\sigma = \frac{dQ}{dr} = \rho 4\pi r^2.$$

Et en remplaçant par la valeur de ρ :

$$\sigma = - \frac{qe^{-\frac{r}{a}}}{4\pi r a^2} 4\pi r^2.$$

En simplifiant on trouve :

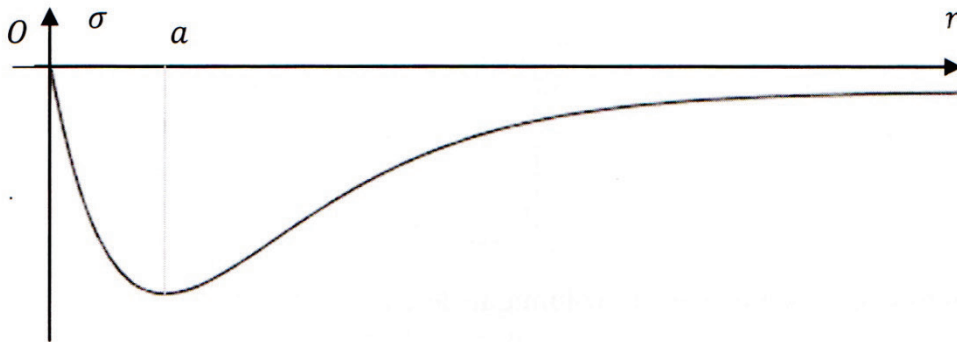
$$\sigma = - \frac{qre^{-\frac{r}{a}}}{a^2}.$$

On cherche les variations de $\sigma(r)$, on va donc calculer sa dérivée :

$$\frac{d\sigma(r)}{dr} = - \frac{q}{a^2} \left(1 - \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}}.$$

On obtient donc un minimum pour $r = a$.

On peut représenter σ en fonction de r :



Pour la valeur $r = a$, on a donc la charge de la couronne la plus importante (en valeur absolue).

5) Le potentiel Coulombien est donné pour une charge ponctuelle par :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

C'est le potentiel que l'on a quand on fait tendre r vers 0.

Le potentiel est alors écranté par la charge volumique négative.

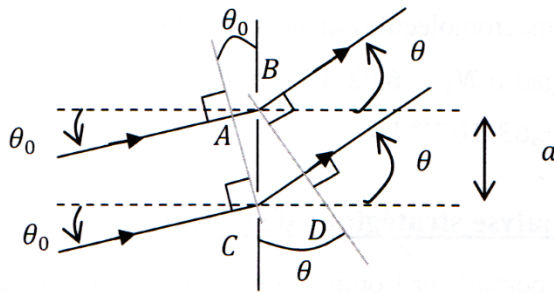
On a un écrantage total lorsque l'on fait tendre r vers l'infini.

Ce potentiel de Yukawa peut modéliser l'atome d'hydrogène avec un noyau de charge $q = e$ et une densité volumique de charges négatives qui représente le nuage électronique. On a estimé dans la question précédente la taille du nuage électronique qui est de l'ordre de a .

6) On ne peut pas trouver de modèle équivalent en gravitation car il n'existe pas de masses négatives.

CCP-7) Réseau de diffraction (2015)

1) On commence par faire un schéma des rayons lumineux à travers deux fentes consécutives :



La différence de chemin optique est égale à $\delta = CD - AB$.

En effet les points A et C appartiennent au plan d'onde et ils sont donc en phase. Les points B et D n'appartiennent pas au plan d'onde mais la différence de phases acquise reste identique jusqu'à l'infini.

On a donc en utilisant les angles :

$$AB = a \sin \theta_0$$

$$CD = a \sin \theta.$$

On a donc :

$$\delta = a(\sin \theta - \sin \theta_0).$$

L'ordre d'interférence est donc :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{a(\sin \theta - \sin \theta_0)}{\lambda_0}.$$

Pour les interférences constructives, on a donc p entier soit :

$$a(\sin \theta - \sin \theta_0) = p\lambda_0.$$

Donc les angles de sortie qui interfèrent de façon constructive vérifient la relation suivante :

$$\sin \theta_p = \sin \theta_0 + p \frac{\lambda_0}{a}.$$

On retrouve la formule du réseau.

2) L'énoncé indique que pour l'ordre 1, le rayon ressort avec $\theta_1(\lambda_2) = 0$. On applique donc la formule :

$$\sin \theta_1 = 0 = \sin \theta_0 + \frac{\lambda_2}{a}.$$

On a donc :

$$\sin \theta_0 = -\frac{\lambda_2}{a}.$$

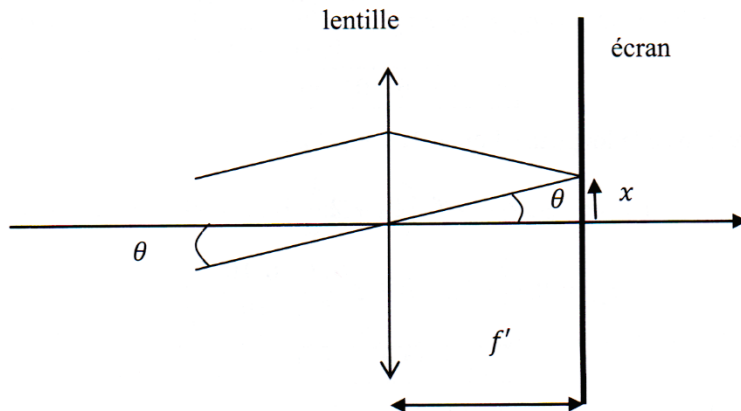
L'application numérique donne :

$$\sin \theta_0 = -\frac{579,07 \cdot 10^{-9}}{0,01 \cdot 10^{-3}} = -0,058.$$

Comme la valeur est faible, on a donc :

$$\theta_0 = -0,058 \text{ rad.}$$

3) On commence par faire un schéma afin de déterminer la relation entre l'angle d'observation et le point de l'écran :



En utilisant le schéma, on a donc :

$$\tan \theta = \frac{x}{f'}$$

La lentille n'introduit pas de différence de chemin optique.

Comme les angles sont petits, on peut utiliser les développements limités afin de simplifier les expressions. On a donc :

$$\tan \theta \approx \theta.$$

La position sur l'écran est donc donnée par :

$$x = f' \theta.$$

On reprend l'expression de l'angle qui est donnée par :

$$\sin \theta_p = \sin \theta_0 + p \frac{\lambda_0}{a}$$

$$\theta_p = \theta_0 + p \frac{\lambda_0}{a}$$

On remplace dans l'expression de la position x et on obtient pour les petits angles :

$$x = f' \theta_p$$

$$x = f' \left(\theta_0 + p \frac{\lambda_0}{a} \right).$$

On peut donc maintenant passer aux applications numériques. Pour l'ordre 1 avec la longueur d'onde λ_1 , on a donc :

$$x_{11} = f' \left(\theta_0 + \frac{\lambda_1}{a} \right)$$

$$x_{11} = 0,2 \left(-0,058 + \frac{576,96 \cdot 10^{-9}}{0,01 \cdot 10^{-3}} \right)$$

$$x_{11} = -6 \cdot 10^{-5} \text{ m.}$$

Pour l'ordre 2 avec la longueur d'onde λ_1 , on a donc :

$$x_{21} = f' \left(\theta_0 + 2 \frac{\lambda_1}{a} \right)$$

$$x_{21} = 0,2 \left(-0,058 + 2 \frac{576,96 \cdot 10^{-9}}{0,01 \cdot 10^{-3}} \right)$$

$$x_{21} = 11,47 \text{ mm.}$$

Pour l'ordre 2 avec la longueur d'onde λ_2 , on a donc : $x_{22} = f' \left(\theta_0 + 2 \frac{\lambda_2}{a} \right)$

$$x_{22} = 0,2 \left(-0,058 + 2 \frac{579,07 \cdot 10^{-9}}{0,01 \cdot 10^{-3}} \right) \quad \boxed{x_{22} = 11,56 \text{ mm.}}$$

La distance entre les deux traits de l'ordre p est donnée par :

$$x_{p2} - x_{p1} = f' \left(\theta_0 + p \frac{\lambda_2}{a} \right) - f' \left(\theta_0 + p \frac{\lambda_1}{a} \right)$$

$$x_{p2} - x_{p1} = \frac{pf'}{a} (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Pour que le doublet soit visible, il faut :

$$x_{p2} - x_{p1} = \frac{pf'}{a} (\lambda_2 - \lambda_1) \geq \Delta x.$$

On trouve ainsi que : $p \geq \frac{a\Delta x}{f'(\lambda_2 - \lambda_1)}$.

L'application numérique donne : $p \geq \frac{0,01 \cdot 10^{-3} \times 0,5 \cdot 10^{-3}}{0,2(579,07 \cdot 10^{-9} - 576,96 \cdot 10^{-9})}$

$$p \geq 11,85$$

On trouve donc une séparation à partir de l'ordre 12.

4) Maintenant, on envoie à la place de la lumière, des particules. On a donc un système d'interférences analogue aux ondes lumineuses. Pour interpréter ce phénomène, il faut associer grâce à la relation de Louis de Broglie une longueur d'onde aux macromolécules.

On a donc : $P = \frac{h}{\lambda}$.

5) La longueur d'onde est donc définie par l'interfrange qui est :

$$i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda f'}{a}.$$

Comme l'interfrange n'est pas modifié, la longueur d'onde est la même que pour les ondes lumineuses soit :

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = 578 \text{ nm.}$$

On en déduit la quantité de mouvement : $P = mv = \frac{h}{\lambda}$.

La vitesse est donc donnée par :

$$v = \frac{h}{\lambda m}$$

$$\boxed{v = \frac{hN_A}{\lambda M}}.$$

L'application numérique donne :

$$v = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \times 6,02 \cdot 10^{23}}{578 \cdot 10^{-9} \times 515 \cdot 10^{-3}}$$

$$\boxed{v = 0,0013 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

CCP-8) Câble coaxial (2015)

1) La forme du champ magnétique est donné par :

$$\vec{B} = B(r, \theta, z)\vec{e}_\theta.$$

Le problème est invariant par rotation autour de l'axe Oz , donc le champ ne dépend pas de l'angle θ . Donc :

Le champ magnétique vérifie l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

On se place en régime quasi-permanent, donc on peut négliger le courant de déplacement. On a donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Le théorème de Stokes est donné par :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

On en déduit le théorème d'Ampère :

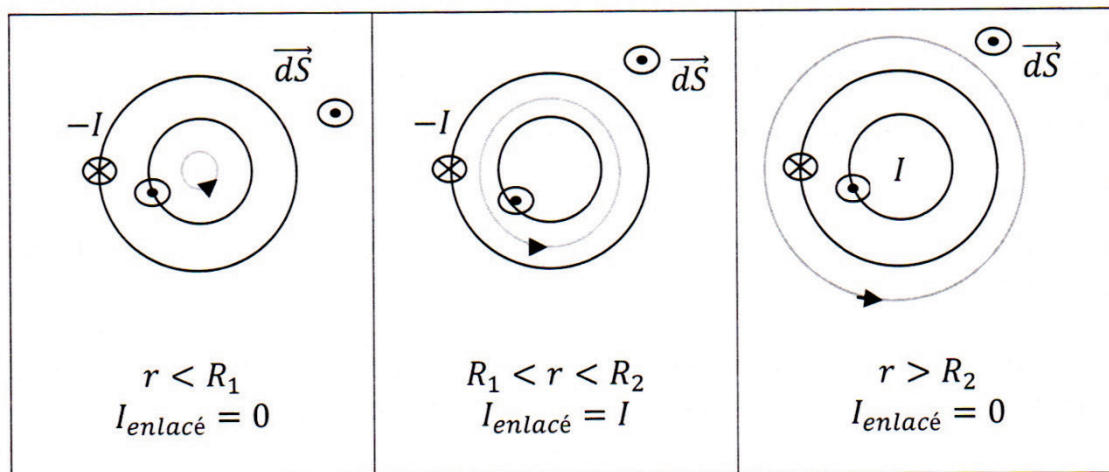
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

En calculant la circulation du champ magnétique sur une ligne de champ (ici un cercle de rayon r), on trouve :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r).$$

On doit alors distinguer trois régions de l'espace pour calculer le flux du vecteur densité de courant à travers la surface s'appuyant sur le contour.

On place sur le schéma les trois contours d'Ampère orientés correspondant aux trois cas. La normale qui oriente le contour est sortante.



Pour $r < R_1$, on a :

$$\iint \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{dS} = 0$$

donc le champ magnétique est nul dans cette région :

$$\vec{B}(r < R_1) = 0.$$

Pour $R_1 < r < R_2$, on a :

$$\iint \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{dS} = \mu_0 I$$

donc :

$$2\pi r B(r, z, t) = \mu_0 I$$

soit :

$$B(r, z, t) = \frac{\mu_0 I_0 \cos(\omega t - kz)}{2\pi r}.$$

Et enfin pour $r > R_2$, on a :

$$\iint \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{dS} = \mu_0 (I - I) = 0$$

donc :

$$B(r > R_2) = 0.$$

En conclusion, le champ magnétique est non nul uniquement entre les deux conducteurs constituant le câble et vaut :

$$\boxed{\vec{B}(r, z, t) = \frac{\mu_0 I_0 \cos(\omega t - kz)}{2\pi r} \vec{e}_\theta.}$$

2) On utilise maintenant la relation de Maxwell-Faraday qui relie le champ électrique au champ magnétique :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

On peut commencer par les cas $r < R_1$ et $r > R_2$, où le champ magnétique est nul.

On trouve donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = 0.$$

Il s'agit donc d'un champ électrostatique que l'on prendra égal à 0 car on s'intéresse ici uniquement à un champ variable au cours du temps.

On va donc se placer entre les deux conducteurs, c'est-à-dire pour :

$$R_1 < r < R_2.$$

Le problème est invariant par rotation autour de l'axe Oz , donc le champ électrique ne dépend pas de l'angle θ .

On ne connaît pas l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques, donc on va utiliser le théorème de Stokes afin de calculer une circulation :

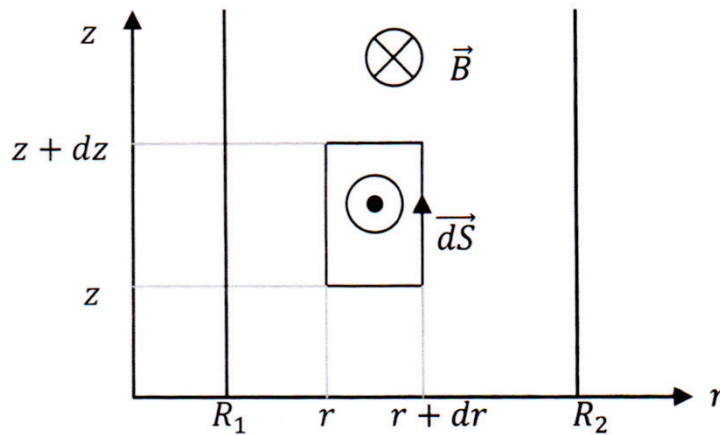
$$\oint \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = \iint \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

donc en utilisant la relation de Maxwell-Faraday, on obtient :

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = \iint - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}.$$

Il faut maintenant prendre le contour adéquat.

Le contour est soit une ligne de champ, soit un morceau de ligne de champ. Ici le champ électrique est suivant la direction \vec{e}_r et il dépend de r et de z . On prendra donc comme contour élémentaire un petit rectangle de hauteur dz suivant \vec{z} et de longueur dr suivant \vec{e}_r . On obtient donc le schéma suivant :



On exprime alors la circulation élémentaire du champ électrique sur le contour fermé :

$$d\mathcal{C} = E(r, z, t)dr - E(r, z + dz, t)dr.$$

Le flux du champ magnétique à travers ce contour est égal à :

$$d\phi = -B(r, z, t)drdz.$$

En remplaçant dans la relation de Maxwell-Faraday, on obtient :

$$E_r(r, z, t)dr - E_r(r, z + dz, t)dr = \frac{\partial B(r, z, t)}{\partial t} drdz.$$

Reste maintenant à simplifier :

$$-\frac{\partial E(r, z, t)}{\partial z} drdz = \frac{\partial B(r, z, t)}{\partial t} drdz.$$

D'où la relation demandée :

$$\boxed{-\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial t}.$$

On peut maintenant remplacer par les expressions des champs :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0 I_0 \cos(\omega t - kz)}{2\pi r} \right) \\ \frac{\partial E}{\partial z} &= \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r} \sin(\omega t - kz). \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à z et en ne gardant que les termes variables :

$$E = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r k} \cos(\omega t - kz).$$

D'où l'expression du champ électrique :

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r k} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_r.$$

3) On va maintenant établir l'équation de propagation entre les deux conducteurs.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) &= \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Reste maintenant à remplacer avec l'expression du champ, en utilisant l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \frac{\partial E}{\partial z} \vec{e}_\theta.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} &= k \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r k} \sin(\omega t - kz) \vec{e}_\theta \\ \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} &= \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r} \sin(\omega t - kz) \vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

On réapplique le rotationnel :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial x} \left(r \frac{\partial E}{\partial z}\right) \vec{z}$$

donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = k \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_r.$$

Puis, on calcule la dérivée seconde par rapport au temps :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r k} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_r.$$

En remplaçant dans l'équation de propagation :

$$k \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_r = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r k} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_r.$$

En simplifiant, on obtient :

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2$$

avec :

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}.$$

Donc en prenant la valeur positive :

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}}.$$

4) On calcule le vecteur de Poynting. Attention à prendre les expressions réelles des champs car le produit vectoriel n'est pas une opération linéaire.

Le vecteur de Poynting a pour expression :

$$\vec{\pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}.$$

En remplaçant :

$$\vec{\pi} = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r k} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_r \wedge \frac{\mu_0 I_0 \cos(\omega t - kz)}{2\pi r \mu_0} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{\pi} = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi^2 k r^2} I_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \vec{z}.$$

Le vecteur de Poynting donne la direction de propagation de l'énergie. Elle se propage donc suivant l'axe Oz .

On calcule maintenant le flux à travers une section du cylindre. On prend comme surface élémentaire une petite couronne comprise entre les rayons r et $r + dr$:

$$dS = 2\pi r dr.$$

Donc le flux élémentaire est égal à :

$$d\Phi = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi^2 k r^2} I_0^2 \cos^2(\omega t - kz) 2\pi r dr$$

donc :

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 \omega}{4\pi^2 k r^2} I_0^2 \cos^2(\omega t - kz) 2\pi r dr$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 \omega}{2\pi k} I_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 \omega}{2\pi k} I_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

On l'écrit en fonction de la célérité :

$$\Phi = \frac{\mu_0 c}{2\pi} I_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

On détermine la moyenne temporelle du flux : $\langle \Phi \rangle = \frac{\mu_0 c}{4\pi} I_0^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$

5) On détermine maintenant la densité volumique d'énergie électromagnétique à l'aide de la formule suivante :

$$e = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

En remplaçant par les expressions des champs :

$$\begin{aligned} e &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r k} \cos(\omega t - kz) \right)^2 + \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I_0 \cos(\omega t - kz)}{2\pi r} \right)^2 \\ e &= \frac{(I_0 \cos(\omega t - kz))^2}{8\pi^2 r^2} \left(\varepsilon_0 \mu_0^2 \frac{\omega^2}{k^2} + \mu_0 \right) \\ e &= \frac{\mu_0 (I_0 \cos(\omega t - kz))^2}{4\pi^2 r^2}. \end{aligned}$$

On détermine la moyenne temporelle de la densité volumique d'énergie qui vaut :

$$\langle e \rangle = \frac{\mu_0 I_0^2}{8\pi^2 r^2}.$$

L'énergie contenue entre les deux conducteurs de hauteur $v_e dt$ est égale au flux du vecteur de Poynting à travers la section du cylindre multiplié par dt . Donc :

$$\int_{R_1}^{R_2} \langle e \rangle 2\pi r dr v_e dt = \Phi dt.$$

On en déduit la vitesse de propagation de l'énergie : $v_e = \frac{\langle \Phi \rangle}{\int_{R_1}^{R_2} \langle e \rangle 2\pi r dr}$.

On calcule déjà l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} \langle e \rangle 2\pi r dr &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I_0^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I_0^2}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \\ \int_{R_1}^{R_2} \langle e \rangle 2\pi r dr &= \frac{\mu_0 I_0^2}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right). \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression de la vitesse, on trouve :

$$v_e = \frac{\frac{\mu_0 c I_0^2}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{\frac{\mu_0 I_0^2}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

et finalement après simplification :

$$\boxed{v_e = c.}$$

On trouve donc que l'énergie se propage à la vitesse de la lumière.