MQ1 – Equation de Schrödinger pour une particule libre

A – Travaux dirigés

MQ11 – Particule libre et paquet d'ondes

Dans le cas général, l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi$$
$$\Leftrightarrow i\hbar\frac{\partial(\phi(x)f(t))}{\partial t} = E\phi(x)f(t)$$
$$\Leftrightarrow i\hbar\phi(x)\frac{\partial(f(t))}{\partial t} = E\phi(x)f(t)$$
$$\Leftrightarrow i\hbar\frac{\partial(f(t))}{\partial t} = Ef(t)\ ou\ \phi(x) = 0$$

On garde la première solution car sinon $\psi = 0$:

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\left(f(t)\right)}{\partial t} - \frac{E}{i\hbar}f(t) = 0$$

qui se résout en :

$$f(t) = Ae^{+\frac{E}{i\hbar}t}$$
$$\Leftrightarrow f(t) = Ae^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

En général on pose $A = 1$ afin de normaliser $\phi(x)$ d'où :

$$\Leftrightarrow f(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = e^{-i\omega t}$$

Or :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + V\phi = E\phi\ avec\ V = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\phi = 0$$

Qui se résout, avec E>0, en :

$$\phi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}\ \text{où}\ k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$
$$\Rightarrow \Psi = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)}$$

2°) Vu que V(x)=0, on a alors $E = E_c > 0$

Prenons l'onde qui se propoge vers les x croissants alors la condition de normalisation s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 dx = 1 \Rightarrow A \to 0$$

Ce qui n'est physiquement pas acceptable. Le modèle de l'OPPH ne correspond pas à la description quantique d'une particule, il faut faire appel au paquet d'ondes.

3°) D'après l'énoncé :

$$\psi(x,t) = B\left[e^{i(k_0x-\omega t)} + \frac{1}{2}e^{i\left(\left(k_0+\frac{\Delta k}{2}\right)x-\left(\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right)} + \frac{1}{2}e^{i\left(\left(k_0-\frac{\Delta k}{2}\right)x-\left(\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right)}\right]$$

$$\Leftrightarrow \psi(x,t) = Be^{i(k_0x-\omega t)}\left[1 + \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)} + \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\Delta k}{2}x+\frac{\Delta\omega}{2}t\right)}\right]$$

$$\Leftrightarrow \psi(x,t) = Be^{i(k_0x-\omega t)}\left[1 + \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right]$$

Pour un instant t_0 on calcule les valeurs de x qui annulent ψ :

$$\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t_0\right) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t_0 = \pi + 2p\pi$$

$$\Rightarrow x_p = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t_0 + \frac{2}{\Delta k}(\pi + 2p\pi)$$

Si on choisit deux valeurs de p successives alors :

$$\Delta x = x_{p+1} - x_p = \frac{4\pi}{\Delta k}$$

$$\Rightarrow \Delta x \Delta k = 4\pi$$

On vérifie bien que : $\Delta x \Delta k \geq 2\pi$

La particule se déplace à la vitesse de groupe : $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$

4°) Le paquet d'ondes étant d'expansion finie, il est normalisable.

$$\int_{-x_0}^{+x_0} |\Psi| dx = 1$$

Cela fonctionne même pour une OPPH tronquée dans l'espace. Or :

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\Leftrightarrow \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\Leftrightarrow v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m}$$

Pour calculer la vitesse de groupe on différentie la relation précédente :

$$d\omega = \frac{\hbar^2 2kdk}{2m}$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar^2 k}{m} = 2v_\phi$$

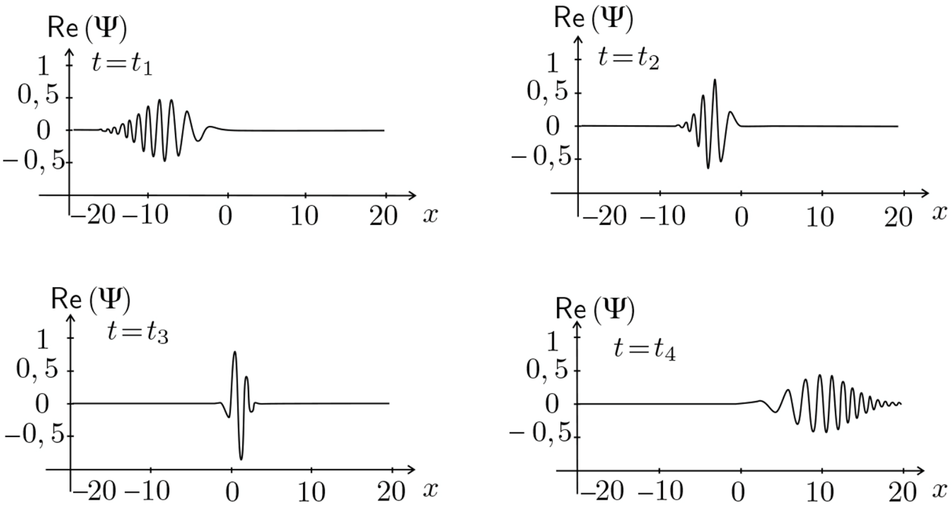
La vitesse de groupe représente la vitesse de la particule classique telle que : $p = m\, v_g$

5°) Le milieu est bien dispersif car $v_\phi \neq v_g$.

On remarque que :

$$\Leftrightarrow v_\phi = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{h}{2m\lambda} \Rightarrow v_{phi}(\lambda_2) < v_{phi}(\lambda_1)\ si\ \lambda_2 > \lambda_1$$

Par conséquent le paquet d'ondes va se rétrécir puis se dilater, par exemple :



MQ12 – Diffraction de molécules par une onde lumineuse

1°) a)

Pour le fullerène : $m = 60\, m_c \Rightarrow m = \frac{60M}{N_a} = 1{,}2.10^{-24}\, kg.$

D'où la longueur d'onde de De Broglie :

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{mv} = 4{,}6\, pm$$

1°) b) En différentiant l'expression on obtient :

$$\frac{\Delta\lambda_{DB}}{\lambda_{DB}} = \frac{\Delta v}{v} \Rightarrow \Delta\lambda_{DB} = \lambda_{DB}\frac{\Delta v}{v} = 0{,}78\, pm$$

1°) c) Par son expression on reconnaît la longueur de cohérence temporelle, vu en optique ondulatoire :

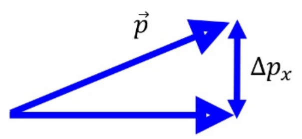
$$l_c = \frac{\lambda_{DB}^2}{\Delta\lambda_{DB}} = 27\, pm$$

2°) Les fentes de collimation permettent de limiter la composante transverse de la vitesse des molécules. Ainsi l'onde arrivera avec un vecteur d'onde parallèle à l'axe du dispositif. Cependant la première fente de largeur a provoque une dispersion de la quantité de mouvement telle que :

$$\Delta p_x \cdot a \geq \frac{\hbar}{2} \Leftrightarrow \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\, a} = 7{,}5.10^{-30}\, kg \cdot m \cdot s^{-1}$$

Ce qui entraîne une ouverture angulaire de :

$$\frac{\Delta p_x}{p} \sim \frac{7{,}5.10^{-30}}{1{,}2.10^{-24} \cdot 120} \sim 5{,}2.10^{-8}\, rad$$



Ainsi les particules sortant de la première fente pourront traverser la seconde fente à condition que leur quantité de mouvement vérifie :

$$\theta \leq \frac{b}{D} \sim 4{,}4\ 10^{-6}\, rad$$

Cette valeur est supérieure à la dispersion quantique (diffraction ici), donc les atomes passeront par la fente 2.

3°) a)
La différence de marche entre les deux faisceaux se calcule à l'aide de la formule des réseaux par exemple :

$$\delta = nd(sin\theta - sin\theta_0) = p\,\lambda$$

On est sous incidence normale ici d'où :

$$\theta_p = p\frac{\lambda_{DB}}{d}$$

3°) b)
On distingue 3 pics sur la figure tel que : $\Delta X = 22\mu m$ où $X = D\theta$

$$\Rightarrow X_p = Dp\frac{\lambda_{DB}}{d}$$

$$\Rightarrow \Delta X = X_{p+1} - X_p = D\frac{\lambda_{DB}}{d}$$

$$\Rightarrow \lambda_{DB} = \frac{d}{D}\Delta X \sim 4{,}7\ pm$$

$$\Rightarrow v = \frac{h}{m\lambda_{DB}} \sim 120\ ms^{-1}$$

Ce résultat est en accord avec la valeur donnée par l'énoncé.

3°) c) On applique le critère de visibilité des franges : $\Delta p \leq \frac{1}{2}$

Or $p = \frac{\delta}{\lambda_{DB}} \Rightarrow \Delta p = \delta\frac{\Delta\lambda_{DB}}{\lambda_{DB}^2}$ d'où :

$$\Delta p = \frac{\delta}{l_c} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |p| = \frac{l_c}{2\,\lambda_{DB}} = 2{,}9$$

On peut donc s'attendre à voir 5 franges correspondant aux ordres $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

B – Exercices supplémentaires

MQ13 – Longueurs d'onde de De Broglie

1. D'après la forme de de Broglie : $\lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{mv} = \frac{6,63.10^{-34}}{75 \times 5,0.10^3/3600} = 6,4.10^{-36}$m. La largeur d'une porte de l'ordre de 1m est bien plus grande. L'homme ne subit pas de diffraction quand il franchit une porte.

2. D'après la formule de de Broglie, la quantité de mouvement de l'électron est $p = \frac{h}{\lambda_{\text{DB}}}$ et son énergie cinétique

$$E_c = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e\lambda_{\text{DB}}^2} = \frac{(6,63.10^{-34})^2}{2 \times 9,11.10^{-31} \times (0,1.10^{-9})^2} = 2{,}4.10^{-17}\text{ J} \simeq 150\text{ eV}.$$

3. $E_c = \frac{p^2}{2m}$ donc $p = \sqrt{2mE_c}$ et, d'après la relation de de Broglie : $\lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$.

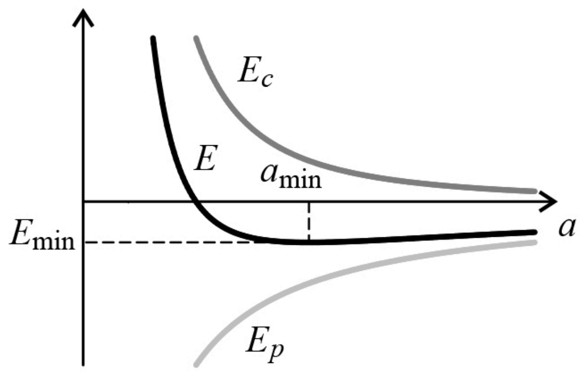
Pour l'électron : $\lambda_{\text{DB,électron}} = \frac{6,6310^{-34}}{\sqrt{2 \times 9,110^{-31} \times 100 \times 1,6.10^{-19}}} = 1,24.10^{-10}\text{m} = 0,124\text{nm}.$

Et pour le proton :

$$\lambda_{\text{DB,proton}} = \lambda_{\text{DB,électron}}\sqrt{\frac{m_e}{m_p}} = 1,24.10^{-10} \times \sqrt{\frac{9,11.10^{-19}}{1,67.10^{-27}}} = 2,87.10^{-12}\text{m} = 2,89\text{pm}.$$

MQ14 - L'atome d'hydrogène

1. Le premier terme est l'énergie cinétique minimale due au confinement de l'électron dans un volume de taille caractéristique a à cause de l'inégalité de Heisenberg. Le deuxième terme est l'énergie potentielle correspondant à l'attraction électrostatique entre l'électron (chargé négativement) et le noyau (chargé positivement).



2. La figure représente les termes d'énergies potentielle et cinétique et l'énergie mécanique de l'atome d'hydrogène en fonction de a. On observe que l'énergie passe par un minimum. Pour le localiser on pose $f(a) = \dfrac{\hbar^2}{2ma^2} - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \dfrac{A}{a^2} - \dfrac{B}{a}$. On a : $f'(a) = -\dfrac{2A}{a^3} + \dfrac{B}{a^2}$. l'équation $f'(a) = 0$ a pour solution : $a_{\min} = \dfrac{2A}{B} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} = \dfrac{(1,05.10^{-34})^2}{9,0.10^9 \times 9,11.10^{-31} \times (1,6.10^{-19})^2} =$ $5{,}3.10^{-11}$ m.

3. $E_{\min} = f(a_{\min}) = -\dfrac{B^2}{4A} = -\dfrac{me^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2} = -\dfrac{9,11.10^{-31} \times (9,0.10^9)^2 \times (1,6.10^{-19})^2}{2 \times (1,05.10^{-34})^4} \simeq$ $-2,1.10^{-18}\text{J} \simeq -14\text{eV}$. Il se trouve que $a_{\min}$ et $E_{\min}$ sont les bonnes valeurs pour le rayon et l'énergie de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental (état de plus basse énergie), mais c'est une coïncidence car le calcul est basé sur des approximations très grossières.

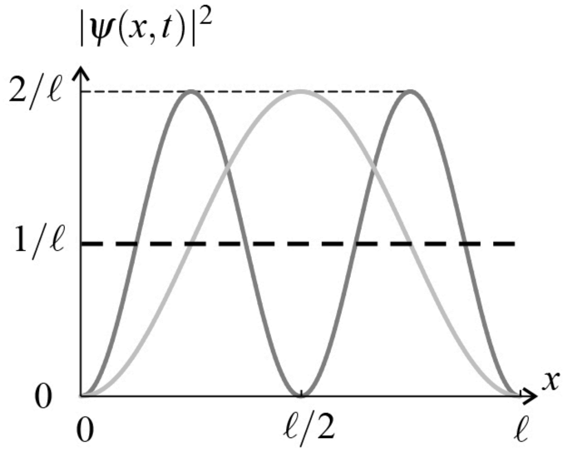
4. Avec l'expression classique de l'énergie, il n'y a pas de minimum. L'électron perdant son énergie par rayonnement devrait s'écraser sur le noyau. C'est l'inégalité de Heisenberg qui entraîne le fait que l'énergie cinétique augmente si a diminue qui permet l'existence d'un minimum d'énergie pour un rayon a non nul.

MQ15 - Fonction d'onde d'une particule dans un puits infini

1. La fonction d'onde doit s'annuler en $x = 0$ et en $x = \ell$. Il faut et il suffit pour cela que $A\sin(k\ell) = 0$. A ne doit pas être nulle (sinon il n'y a plus de fonction d'onde) donc $\sin(k\ell) = 0$ soit $k\ell = n\pi$ où n est un entier. Les valeurs possibles pour le vecteur d'onde sont : $k = \dfrac{n\pi}{\ell}$.

2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^\ell |\psi(x,t)|^2 \mathrm{d}x$ représente la probabilité de trouver la particule quelque part (n'importe où) entre $x = 0$ et $x = \ell$. Comme il est certain que la particule se trouve dans cet intervalle, cette probabilité est égale à 1.

Or : $\psi(x,t) = A\sin\left(\dfrac{n\pi x}{\ell}\right)$ et $|\psi(x,t)|^2 = A^2\sin^2\left(\dfrac{n\pi x}{\ell}\right)$. La condition de normalisation s'écrit : $A^2\displaystyle\int_0^\ell \sin^2\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\mathrm{d}x = A^2\frac{\ell}{2} = 1$. On en tire : $A = \sqrt{\dfrac{2}{\ell}}$.



3. Les courbes sont représentées sur la figure : cas $n = 1$, en gris clair, cas $n = 2$ en gris foncé. On constate que la probabilité de trouver la particule est maximale en $x = \dfrac{\ell}{2}$ pour $n = 1$. Il en est de même pour toutes les valeurs impaires de n. Pour $n = 2$ et toutes les valeurs paires de n, la probabilité de présence est nulle au centre du puits. Dans le cas classique, la particule fait des allers-retours à vitesse constante d'une extrémité à l'autre du puits, la probabilité de la trouver en un point à un instant quelconque est indépendante de ce point (courbe en tireté sur la figure).

MQ16 – Energie minimale d'un oscillateur harmonique

1°) Si $\begin{cases} < p_x > = 0 \\ < x > = 0 \end{cases}$ alors $< p_x^2 > = \Delta p_x^2$ et $< x^2 > = (\Delta x)^2$

Or :

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Rightarrow < p_x^2 > \geq \frac{\hbar^2}{4(\Delta x)^2}$$

D'où :

$$< E_c > \geq \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} \ car\ E_c = \frac{p_x^2}{2m}$$

Or $E = E_c + V\ avec\ V(x) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$

$$\Rightarrow < E > = < E_c > + \frac{1}{2} m\omega_0^2 < x^2 >$$

$$\Rightarrow < E > = < E_c > + \frac{1}{2} m\omega_0^2 (\Delta x)^2$$

$$\Rightarrow < E > \geq \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 (\Delta x)^2$$

2°) Calculons la dérivée de l'expression de droite pour trouver la valeur de Δx qui la minimise :

$$\frac{d < E_{min} >}{d(\Delta x)} = \frac{-2 \times \hbar^2}{8m(\Delta x)^3} + \frac{2}{2} m\omega_0^2 (\Delta x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d < E_{min} >}{d(\Delta x)} = (\Delta x) \left[\frac{-\hbar^2}{4m(\Delta x)^4} + m\omega_0^2 \right]$$

Donc

$$\begin{cases} (\Delta x) = 0 \\ (\Delta x)^2 = \dfrac{\hbar}{2m\omega_0} \end{cases}$$

La première valeur correspond à un maximum et la seconde valeur donne :

$$E_{min} = \frac{\hbar^2}{8m\left(\frac{\hbar}{2m\omega_0}\right)} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \left(\frac{\hbar}{2m\omega_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow E_{min} = \frac{\hbar}{4}\omega_0 + \frac{\hbar}{4}\omega_0$$

$$\Leftrightarrow E_{min} = \frac{\hbar}{2}\omega_0$$

Pour obtenir E_{min} il faut : $\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}$

3°) a)

Cherchons T_c telle que :

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} = \Delta x_T = \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega_0^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar}{2} = \frac{k_B T_c}{\omega_0}$$

$$\Leftrightarrow T_c = \frac{\hbar\omega_0}{2k_B}$$

3°) b)

Posons $f_0 = 10Hz \Rightarrow \omega_0 = 20\pi\, rad \cdot s^{-1}$

$$\Rightarrow T_c = 2.10^{-10}K$$

Donc les fluctuations quantiques sont négligeables pour un oscillateur harmonique classique car on ne peut pas réaliser de telles températures en laboratoire.

Posons $f_0 = 6{,}0\, GHz \Rightarrow T_c = 0{,}14\, K$, ainsi ils ont pu observer des fluctuations quantiques car $T < T_c$.

MQ17 - Superposition de fonctions d'ondes

1°) On pose :

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1(x) + \phi_2(x)\right) \Rightarrow \Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t)\right)$$

$$\Rightarrow \Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1(x)e^{-i\omega_1 t} + \phi_2(x)e^{-i\omega_2 t}\right)$$

$$\Rightarrow \Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_1 t}\left(\phi_1(x) + \phi_2(x)e^{-i(\omega_2-\omega_1)t}\right)$$

$$\Rightarrow \Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_1 t}\left(\phi_1(x) + \phi_2(x)e^{-i\omega t}\right) \text{ où } \omega = \omega_2 - \omega_1$$

2°)

Calculons : $|\Psi(x,t)|^2$

$$|\Psi(x,t)|^2 = \Psi(x,t)\Psi^*(x,t)$$

$$\Leftrightarrow |\Psi(x,t)|^2 = \Psi(x,t)\Psi^*(x,t)$$

$$\Leftrightarrow |\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{2}\left(\phi_1(x) + \phi_2(x)e^{-i\omega t}\right)\left(\phi_1(x) + \phi_2(x)e^{+i\omega t}\right)$$

$$\Leftrightarrow |\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{2}\left(\phi_1^2(x) + \phi_2^2(x) + \phi_1(x)\phi_2(x)\left(e^{-i\omega t} + e^{+i\omega t}\right)\right)$$

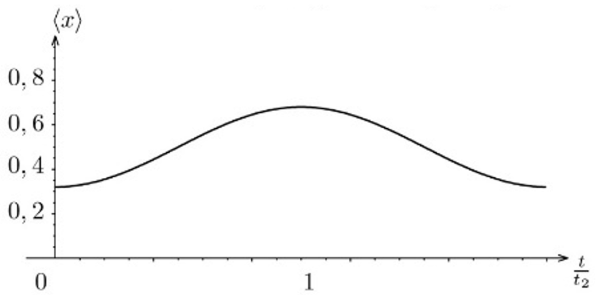
$$\Leftrightarrow |\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{2}\left(\phi_1^2(x) + \phi_2^2(x) + 2\cos(\omega t)\phi_1(x)\phi_2(x)\right)$$

La particule part de la gauche à t=0 et se déplace vers la droite, elle rebondit en x=a pour $t = t_2$. On remarque que pour $t = t_1$ le maximum de probabilité n'est pas en $\frac{a}{2}$ mais plutôt en $\frac{a}{4}$ et $\frac{3a}{4}$.

3°) On calcule la valeur moyenne de x.

$$< x > = \int_{x=0}^{a} x|\psi|^2\, dx = \frac{a}{2} - \frac{16a}{9\pi^2}\cos(\omega t)$$

Puis on représente celle-ci :



On retrouve le principe du résultat précédent :

- Pour t=0 la particule est proche de x=0.
- Pour $t = t_2$, la particule est proche de x=a.
- Pour $t = 2t_2$, la particule revient à proximité de x=0.

On cherche une estimation de l'intervalle de temps Δt au bout duquel le système a évolué de façon appréciable.
Initialement $\cos(\omega t) = 1$, on peut alors définir Δt par : $\cos(\omega \Delta t) = -1$

$$\Rightarrow \Delta t = t_2 = \frac{\pi}{\omega}$$

MQ18 – Interférences

a) La probabilité de détection d'une particule est donnée par :

$$P = \left|\left(\underline{\Psi}_1 + \underline{\Psi}_2 + \underline{\Psi}_3\right)\right|^2$$

Ainsi si seule la fente deux est ouverte :

$$P = \frac{1}{2}$$

b) Les fentes 1 et 2 sont ouvertes d'où :

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

c) Les fentes 1 et 3 sont ouvertes d'où :

$$\Psi_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-i\pi} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \sim 0{,}03$$

d) Toutes les fentes sont ouvertes d'où :

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{-1}{\sqrt{6}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{-1}{\sqrt{6}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow P = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{-1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow P = 1 - \frac{\sqrt{2}}{3} \sim 0{,}53$$

MQ19 – Fonction d'onde sphérique

1°)

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V(x)\,\psi$$

2°) Soit :

$$\Psi(x,\mathrm{t})=\varphi(x)e^{-i\omega t}=\varphi(x)e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$$

$$\Rightarrow i\hbar\times\left(\frac{-iE}{\hbar}\right)\varphi(x)e^{-\frac{iE}{\hbar}t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}e^{-\frac{iE}{\hbar}t}+V(x)\,\varphi(x)e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$$

$$\Rightarrow E\varphi(x)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+V(x)\,\varphi(x)$$

$$\Rightarrow\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=(V(x)-E)\,\varphi(x)$$

3°) Normalisation :

$$\int_{espace}A^2e^{-\frac{2r}{r_0}}4\pi r^2dr=1$$

4°) La probabilité de trouver l'électron dans son état fondamental entre deux sphères de rayons r et r+dr vaut :

$$dP(r)=|\varphi(r)|^2 4\pi r^2dr$$

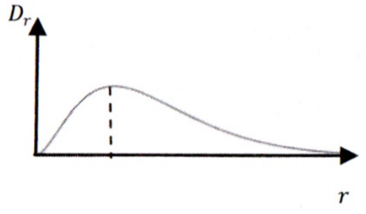
5°) La densité radiale de présence est donnée par :

$$D_r(r)=\frac{dP}{dr}=|\varphi(r)|^2 4\pi r^2=Ae^{-2\frac{r}{r_0}}\times 4\pi r^2$$

Cette fonction admet un maximum tel que :

$$\frac{dP}{dr}=0\Leftrightarrow 4\pi Ae^{-2\frac{r}{r_0}}\left(-2\frac{r^2}{r_0}+2r\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2r=2\frac{r^2}{r_0}\Leftrightarrow r=\,r_0$$

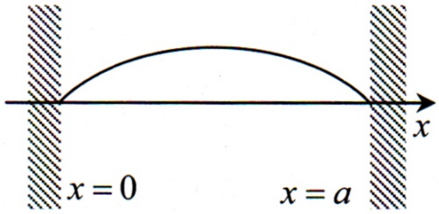


MQ110 – Fonction d'onde stationnaire

1. Il s'agit de normaliser cette fonction d'onde en déterminant B tel que :
$\int_0^a |\varphi(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 1$. Or, en utilisant la formule $\sin\theta^2 = \dfrac{1-\cos\theta^2}{2}$, il vient :
$\int_0^a \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)^2 \mathrm{d}x = a/2$, de sorte que $B = \sqrt{\dfrac{2}{a}}$.

La fonction d'onde normalisée a donc pour expression : $\varphi(x) = \sqrt{\dfrac{2}{a}} \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)$.

La figure ci-dessous représente son allure dans l'intervalle considéré.



La particule étant confinée dans l'intervalle $x \in [0, a]$, elle ne peut « partir » à l'infini, il s'agit d'un état lié.

2. Dans son mode de vibration fondamental et à t fixé, l'amplitude de l'élongation verticale d'une corde de longueur a fixée à ses extrémités a pour expression $z(x) = A \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)$, elle a la même allure que celle représentée sur la figure ci-dessus. Le fondamental comporte ainsi un unique ventre de vibration en $x = \dfrac{a}{2}$, ainsi que deux nœuds en $x = 0$ et $x = a$.

Pour la corde on a une amplitude maximum en $x = \dfrac{a}{2}$, pour la particule confinée, c'est la fonction d'onde stationnaire ainsi que la densité de probabilité qui est maximum en ce point à tout instant.

Pour la corde, l'amplitude de vibration est nulle en $x = 0$ et $x = a$, pour la particule, la fonction d'onde s'annule en ces deux points